[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：15 応用数学

0.1 ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div $\mathbf{a}$ を求めよ.

(2) 回転 rot $\mathbf{a}$ を求めよ.

(北海道大 1997)　(m19970103)

0.2 z は複素数である.

(1) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ.

(2) 方程式 $\sin z = 2$ を解け.

(北海道大 1997)　(m19970104)

0.3 $f(x) = |\sin x|$ をフーリエ級数展開せよ.

(北海道大 2003)　(m20030104)

0.4 以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする.

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ （r, θ は実数）で表せ.
(a) $1+j$　(b) j

(2) 次の複素数を $x+jy$ （x, y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ.
(a) j の平方根　(b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R = \cos\theta + j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ.

(北海道大 2004)　(m20040104)

0.5 周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005)　(m20050102)

0.6 (1) 次の関係式が成り立つとき, w と z との関係を求めよ. ただし, w と z は複素数である.

$$e^z = e^w$$

(2) e^z は複素数平面の全域で正則であることを示せ.

(3) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(北海道大 2005)　(m20050103)

0.7 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “$\cdot$” はベクトルの内積（スカラー積）, “$\times$” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S (x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}) \cdot d\boldsymbol{S} \qquad 曲面\ \boldsymbol{S}\ :\ 2x+y+2z=6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.8 図 1 に示す周期が 2π の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい.

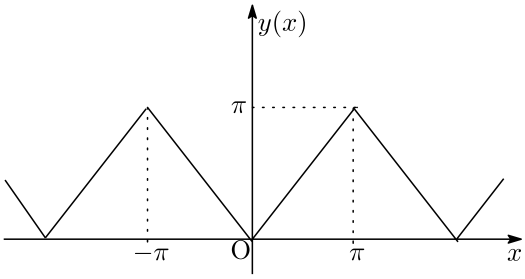


図 1

(北海道大 2006)　　(m20060103)

0.9 関数 f が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，$\mathrm{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します.

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい.

(1) f, h が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，h が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right) = \dfrac{h \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1, 1, 1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい.

(北海道大 2006)　　(m20060104)

0.10 $u = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ.

(1) $\mathrm{grad}\, u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x, y, z) = c \quad (c : 定数)$ で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである.

(2) $\mathrm{grad}\, u \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\, u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“$\cdot$” は内積を表している.

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x, y, z) = c \quad (c : 定数)$ で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである.

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.11 次の設問に答えよ．ここで，z は複素数である.

(1) $e^z \neq 0$ を証明せよ.

(2) $e^z = e^{2z}$ を満足する z を求めよ．また z の値を複素平面上に図示せよ.

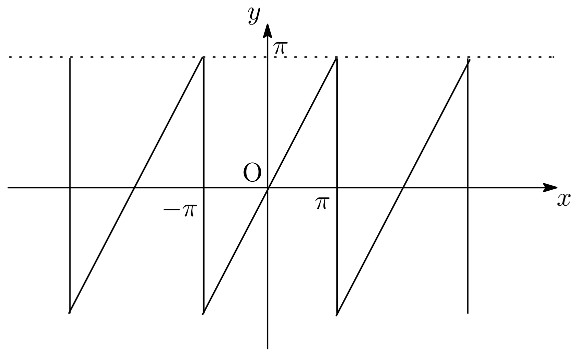
(3) e^{nz} は正則であることを示せ．n は整数とする.

(4) $\dfrac{d}{dz}e^{nz} = ne^{nz}$ を証明せよ.

(北海道大 2007)　　(m20070103)

0.12 (1) 次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ． $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ． $\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　　(m20070104)

0.13 z は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，u, v, x, y, a, b, c は実数とする．

(1) 次の計算をしなさい． $(1+i)^7$

(2) 次の極限値は存在するか．存在する場合はそれを求めなさい．

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^3 - 2iz^2 + z - 2i}{z - 2i}$$

(3) 次の関数を $w = u + vi$ の形で表しなさい．ただし，$z = x + yi$ とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする．

$$w = z\overline{z} + z - \overline{z}$$

(4) 次の関数が正則関数となるように係数を a, b, c 定めなさい．

$$w = ax^2y - 2y^3 + (bxy^2 + cx^3)i$$

(5) 次の関数は調和関数であることを確かめなさい．また，u を実部にもつ正則関数を求めなさい．

$$u = x^2 - 6xy - y^2$$

(北海道大 2008)　　(m20080102)

0.14 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　　(m20080104)

0.15 z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である．

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ．

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ と表せることを示せ．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.16 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である.

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい.

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.17 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (y,\ -x,\ z)$ において, 位置 $A(1,1,1)$ から位置 $B(1,2,3)$ の線分 C の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ここで, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $d\boldsymbol{r}$ の内積を表す.

(2) 位置 $O(0,0)$ から位置 $D(2,4)$ の放物線 $y = x^2$ 上の曲線を曲線 C' とし, その曲線上の点を $(t,\ t^2)\quad [0 \le t \le 2]$ とする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ において, 位置 O から位置 D までの曲線 C' に沿った積分 $\displaystyle\int_{C'} f(\boldsymbol{r})\, dt$ を求めよ.

(北海道大 2010)　　(m20100102)

0.18 区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) (1) の結果を利用して，

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 2010)　　(m20100103)

0.19 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である.

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)f(\tau)d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110102)

0.20 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$
$\alpha_k = a_k + ib_k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$ とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ.

(2) $f(z) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\ \ (z = x+iy)$ が正則か否かを調べよ.

(3) 次の式を証明せよ.

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.21 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 積分経路 $C : \boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}$（$t=0$ から $t=2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$ （$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p} = x_p\boldsymbol{i} + y_p\boldsymbol{j} + z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする.

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.22 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が
$2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$
となることを示せ.

(2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$x^2 = a^2 + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)-\cos(na)}{n^2}$
が成立することを示せ.

(3) (2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$x^3 - \pi^2 x = 12\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$
を導け.

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.23 複素数に関する以下の設問に答えよ.

(1) z を複素数，$\overline{z}$ を z の複素共役とするとき，次式が成り立つことを示せ．ただし，$Re[z]$ は z の実数部分を表す.

$$Re[z] = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|z| \geq |Re[z]| \geq Re[z]$$

(3) 複素数 z_1 , z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを，それぞれ証明せよ．

$$|z_1\overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(4) 複素数 $z = x + iy$ $(x, y$ は実数, i は虚数単位) に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

(北海道大 2013) (m20130103)

0.24 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ．

(北海道大 2014) (m20140103)

0.25 以下の設問に答えよ．ここで，$z(= x + iy)$ は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$, x, y は実数である．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $z^3 = -8i$ を満たす z を全て求め，複素平面上に図示せよ．

(2) 次の関数が正則か否かを調べよ．

(a) $f(z) = z\overline{z} + 1$ (ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$)

(b) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3}{z}$ (ただし，$z = 0$ を除く)

(3) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において，$u(x, y) = x^2 + y - y^2$ であるとき，$u(x, y)$ が調和関数であることを示し，$u(x, y)$ を実部に持つ正則関数 $f(z)$ を求めよ．

(北海道大 2014) (m20140104)

0.26 以下の設問に答えよ．ここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，X, Y, t は実数である．

(1) $z = \pm i$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1}$ を求めよ．

(2) $z = it$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1} = X + iY$ とおく，このとき (X, Y) の軌跡を求めよ．

(北海道大 2015) (m20150103)

0.27 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

$$P(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < t_0 \\ 0 & , |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t+4t_0)+P(t-4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150104)

0.28 周期 2π の周期関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\pi}\quad\left(-\pi\leq x\leq\pi\right)$ のフーリエ級数 $S[f]$ を求めよ．

(北海道大 2016)　　(m20160103)

0.29 一次関数 $f=\dfrac{z-i}{z+2}$ による，z 平面上の単位円 $|z|=1$ の f 平面への写像を求めよ．
ここで，$i=\sqrt{-1}$ である．

(北海道大 2016)　　(m20160104)

0.30 二つの複素数 $z_1=a+bi$ と $z_2=c+di$ （i は虚数単位，a,b,c,d は実数，$z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$）に関して以下の設問に答えなさい．

(1) z_1 に z_2 を乗じたところ，その積 z_1z_2 は，絶対値と偏角がともに z_1 の 2 倍である複素数となった．z_2 を a と b を用いて表しなさい．ただし，偏角の範囲はすべての実数とする．

(2) z_1 と z_2 が設問 (1) の条件を満たし，かつ，積 z_1z_2 が純虚数となるとき，z_1 の取り得る値を複素数平面上に図示しなさい．

(北海道大 2017)　　(m20170111)

0.31 次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0<D<1$ とする．

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\leqq x<-D\pi)\\ 1 & (-D\pi\leqq x<D\pi)\\ 0 & (D\pi\leqq x<\pi)\end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい．

$$f(x)=\frac{1}{2}a_o+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.32 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t)*q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i=\sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqq 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$h(t)=g(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019)　　(m20190104)

0.33 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \leqq x < \pi)$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

について，次式のようにフーリェ級数展開したとき，各係数 a_0，a_n，b_n を求めなさい.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020)　　(m20200105)

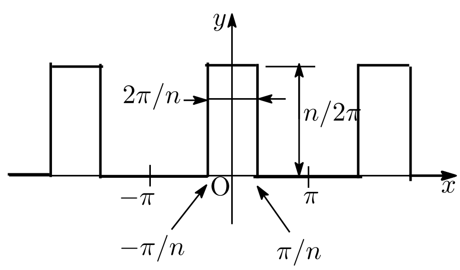
0.34 複素数 z について，以下の設問に答えなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 方程式 $z^3 = 27$ を解きなさい.

(2) z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の 1 次変換により得られる w の軌跡を描きなさい.　$w = \dfrac{1+iz}{1+z}$

(北海道大 2020)　　(m20200106)

0.35 右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい.



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1) $n = 2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい.

(2) 2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい.

(3) (2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.36 1 の 3 乗根のうち 1 でない解を ω, ω' とする．以下の設問に答えなさい.

(1) $\omega\omega' = 1$ を示しなさい.

(2) $\omega^2 = \overline{\omega} = \omega'$ を示しなさい．ただし，$\overline{\omega}$ は ω の複素共役を表す.

(3) $\omega^{100} + \omega^{50} + 1$ を求めなさい.

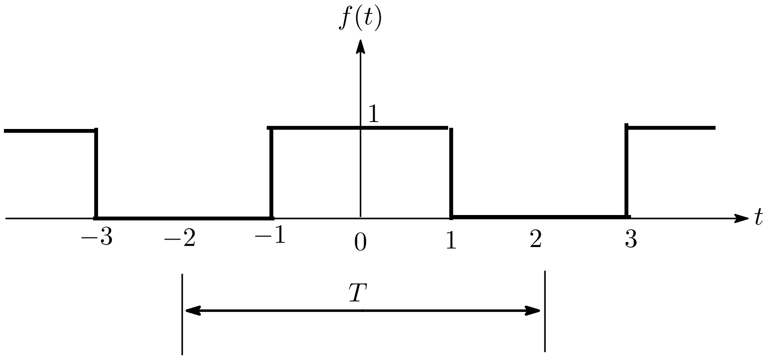
(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \omega^k$ を求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210104)

0.37 次の図のような矩形パルス（周期 $T=4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)+b_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい．

(2) $T=4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.38 xyz 空間に 2 つの平面

α : $x+3y-2z+1=0$

β : $2x-y+3z-2=0$

があるとき，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい．

(2) (1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい．

(3) 点 $(1,2,-1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080301)

0.39 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ．

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k,l はともに自然数である．

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx$　$(k\neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx$　$(k\neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+a_3\cos 3x+b_3\sin 3x+\cdots\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 a_0, a_k, b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.40 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\,, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ ;\ |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.41 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)\,,\ f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)\,,\ tf'(t)\,,\ tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100504)

0.42 数列 $\{a_n\}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ とする. このとき. $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ.

(2) $(n+2)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1}\cos\theta + na_n = 0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて $a_n\,(n \geqq 3)$ を表せ，ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = i$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 $OA_nA_{n+1}\,(n \geqq 3)$ の面積を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.43 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義する．ここで，s は $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である．

以下の問いに答えよ．ただし，関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする．

(1) $f'(t),\ e^{-t}f'(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $s,\ F(s)$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau$，$\displaystyle e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau$ のラプラス変換を，それぞれ $s,\ F(s)$ を用いて表せ．

(3) 次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau = e^t$$

をラプラス変換により，s と $F(s)$ を用いて表せ．

(4) (3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120504)

0.44 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，　$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(東北大 2015)　　(m20150501)

0.45 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.46 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3 z)\,\mathbf{i} + (x^2 yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2 + y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ただし，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.47 m と n を整数として以下の定積分を考えましょう．

$$I(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx,$$

$$J(m, n) = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx,$$

$$K(m, n) = \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx,$$

(1) 任意の m, n に対して $I(m, n)$ を求めてください．

(2) m と n が異なるときに，$J(m, n), K(m, n)$ を求めてください．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します：

$$f(x) = c_0 + c_1 \cos(x) + c_2 \cos(2x) + c_3 \cos(3x) + \cdots + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots$$

このとき，係数 c_1, a_2 を求めてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980602)

0.48 図の様に，x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．

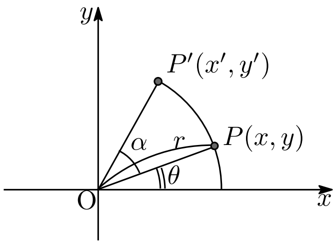
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta + \alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta - \alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999） (m19990610)

0.49 関数

$$f(x) = |\cos x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090608)

0.50 2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y) = (A_x(x,y), A_y(x,y))$，に対して，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である.

(お茶の水女子大 2009) (m20090610)

0.51 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{④}$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ $(r \neq 0)$. ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 2010) (m20100608)

0.52 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.53 (1) 一定面密度 σ，半径 r の球殻が作る重量ポテンシャルを求めてください．理由や計算を詳しく示してください.

(2) 地球がそのような中空の球殻構造になっていない根拠を自由に考えて，できるだけ定量的に 3 つ以上書いてください.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140605)

0.54 3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して ∇r を求めなさい.

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

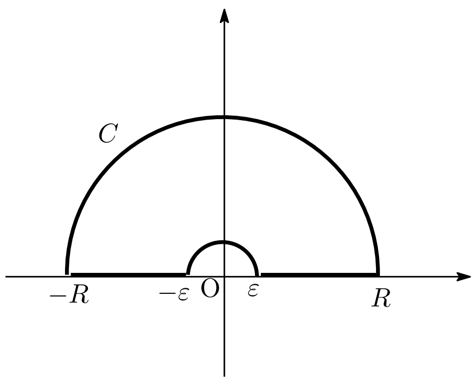
0.55 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \ \boldsymbol{r}/2$ で定義する．このとき，$\triangledown \times \ \boldsymbol{A}$ を計算せよ.

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190608)

0.56

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより，$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ.



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.57 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi \le x \le \pi$ で $f(x) = |x|$ の周期 2π の周期関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190611)

0.58 実 3 次元空間の任意の点を (x, y, z) と表すとき，ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 (div$\vec{V}$) と回転 (rot$\vec{V}$)，及び $|\vec{V}|$ の勾配 (grad$|\vec{V}|$) を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220607)

0.59 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \cdot \left\{ \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt} - \alpha} \right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha| \neq 1$ なる任意の複素数，j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする．

(東京大 1997）　　(m19970704)

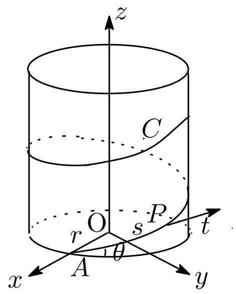
0.60 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ．

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし，$\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする．

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ．

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．



(東京大 1998）　　(m19980703)

0.61 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする．

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について，

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \dfrac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$ を証明せよ．

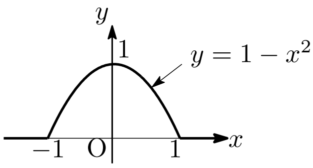
(東京大 1998）　　(m19980704)

0.62 $f(t)$, $h(t)$ が下記のように与えられるとき，ラプラス変換を用いて $f(t)$ と $h(t)$ のたたみ込み (convolution) $g(t) = f(t) * h(t)$ を計算せよ．ここに $*$ はたたみ込み演算を表す．

$f(t) = 1 - at$　　　　$h(t) = \exp(at)$

(東京大 1999）　　(m19990704)

0.63 下記のグラフで与えられる関数のフーリエ変換を求めよ．



(東京大 1999）　(m19990705)

0.64 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \le \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \quad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0 \quad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r, \theta) = \sum_m d_m u_m(r, \theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r, \theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　(m20000705)

0.65 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ．

(2) 次の複素関数を特異点 $z = 0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1 - z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z) dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001)　(m20010703)

0.66 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ を $L\,[f(x)] = F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L\left[e^{ax}f(x)\right] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001)　　(m20010704)

0.67 方程式

$$z^{17} = 1$$

を満たす複素数のうち, 1 でないものをひとつとり, ω とする. 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を満たす 1 でない複素数は,

$$\omega^{\pm 1},\ \omega^{\pm 2},\ \omega^{\pm 3}, \cdots,\ \omega^{\pm 8}$$

で全てであることを示せ.

(2)

$$f_n = \omega^n + \omega^{-n}$$

と書くとき, 以下の各式が成り立つことを示せ.

$$f_i f_j = f_{i+j} + f_{i-j}\,,$$

$$f_{-i} = f_i\,,$$

$$f_{i+17} = f_i\,.$$

(3)

$$f_1 + f_2 + f_4 + f_8 = \alpha_0\,,$$

$$f_3 + f_5 + f_6 + f_7 = \alpha_1$$

とおくと, α_0 , α_1 は方程式

$$X^2 + X - 4 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(4)

$$f_1 + f_4 = \beta_0\,,$$

$$f_2 + f_8 = \beta_1\,,$$

$$f_3 + f_5 = \beta_2\,,$$

$$f_6 + f_7 = \beta_3\,,$$

とおくと, β_0 , β_1 は方程式

$$X^2 - \alpha_0 X - 1 = 0$$

の 2 解で, β_2 , β_3 は方程式

$$X^2 - \alpha_1 X - 1 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(5) f_1 , f_4 を 2 解とする 2 次方程式を一つ作れ. さらにこれを用いて, ω の満たす 2 次方程式を一つ作れ, 必要ならば係数に α_0〜α_3 , β_0〜β_3 などを用いてよい.

(東京大 2002)　　(m20020704)

0.68 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(nt)dt\,,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)dt\,,\qquad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

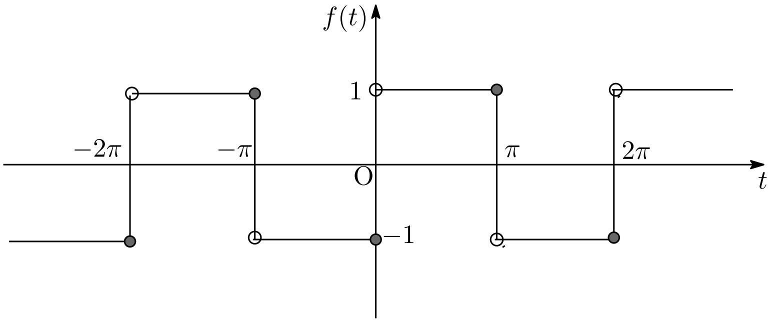
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A\sin B=-\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$, $\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$

$\cos A\sin B=\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$, $\cos A\cos B=\dfrac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$

を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



(東京大 2003)　　(m20030704)

0.69 複素数平面上で次の式を満たす点 $z=x+yi$ (x,y は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left|z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right|=2$　　(2) $\left|z-\sqrt{2}i\right|=\left|z-\sqrt{2}\right|$

(3) $\left|z-\sqrt{2}i\right|+\left|z-\sqrt{2}\right|=4$　　(4) $\left|z-\sqrt{2}i\right|-\left|z-\sqrt{2}\right|=1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006)　　(m20060704)

0.70 1 の n 乗根は，方程式

$$z^n=1 \qquad (\ n \text{ は自然数}\ )$$

をみたす n 個の複素数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は，

$0\le\arg z_1<\arg z_2<\cdots<\arg z_n<2\pi$ をみたしているとする．また，複素数平面において，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1,P_2,\cdots,P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1,P_2,P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ．

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1,P_2,P_3 と原点が O がつくる三つの三角形，すなわち OP_1P_2，OP_2P_3，OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ．

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2\cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.71 複素数 $z(t) = e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a + ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n = z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ を a, b, n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a, b, N の関数として求めよ．また，a を固定して $b \to \infty$ および $b \to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.72 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \ : \ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \ : \ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

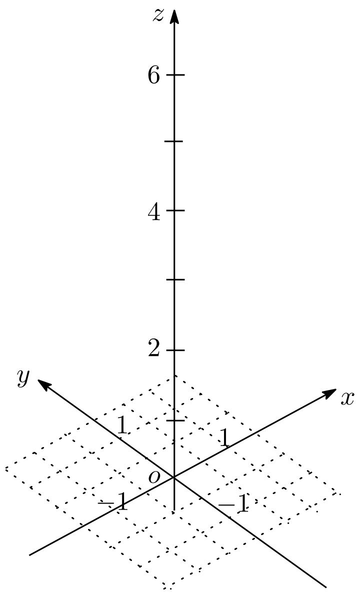
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.73　関数 $f(x)=\dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めたい. ただし, $m,\ n$ は自然数で, $m<n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C=C_1+C_2+C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z=x+iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R>1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $R\to\infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

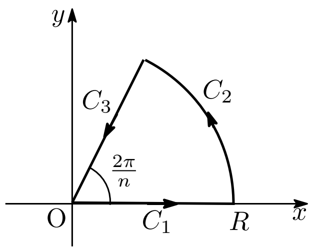


図 1

(東京大 2010)　　(m20100704)

0.74　(1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left|\frac{z+\alpha-\alpha i}{2z-\beta+\beta i}\right|=2$$

(2) 複素関数

$$f(z)=\frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p,q) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ.

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110704)

0.75 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

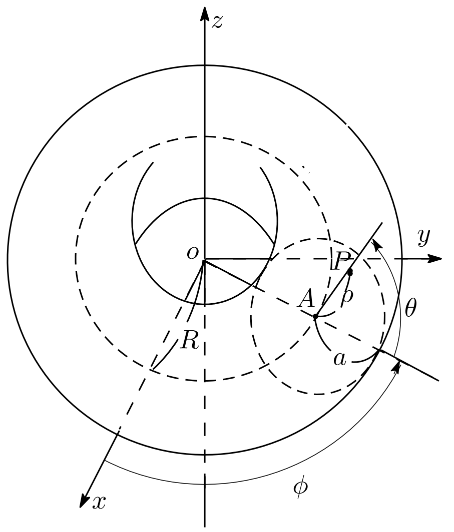
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot dS \tag{$*$}$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.76 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ． ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.77 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.78 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z) = z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a > 1)$$

を求めたい．$z = \exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = \left(x^2 - y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130704)

0.79 複素変数 $z = x + iy$（x, y は実数）から複素変数 $w = X + iY$（X, Y は実数）への写像 $w = f(z)$ を考える．以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z) = z^2$ のとき，z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(2) $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき，z 平面上の単位円周 $|z| = 1$ と単位円の内部 $|z| < 1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

(3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ のとき，z 平面上の領域 $1 \leq |z| \leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140704)

0.80 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1, C_2, C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

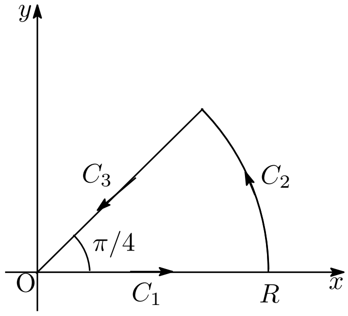


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.81 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1 < |z| < 2$, および $2 < |z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.82 以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos\gamma\sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき,

$$I = \int_C f(z)dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ．

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170704)

0.83 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2+z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

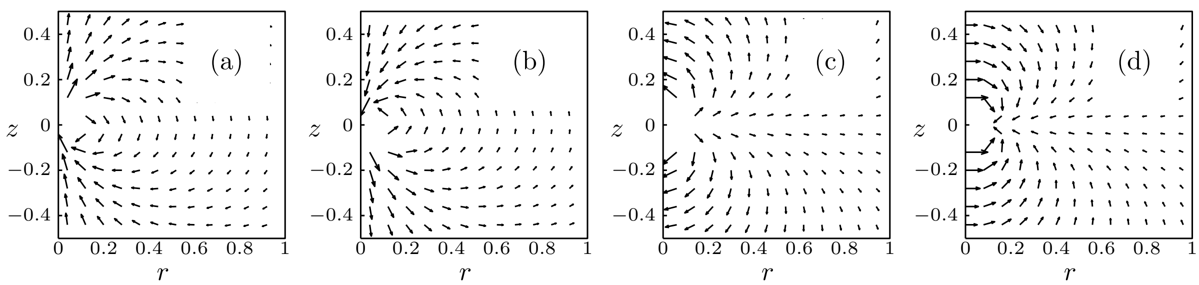
(1) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0，z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \le r_0$ および $z_1 \le z \le z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0，z_1，z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C}\cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.84 i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える．

(a) A を全て求めて $a+ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない．

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) x と y を実数として複素数 $z = x+iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ．

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ．

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ．

(3) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180704)

0.85 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0 < k < 1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1} dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z) e^{iz} dz = 0$$

であることを用いてよい．

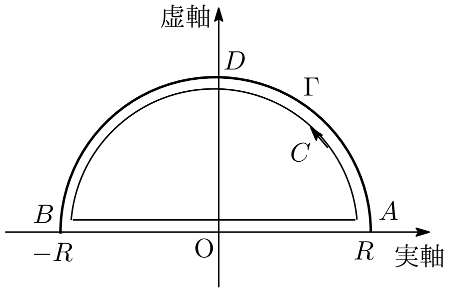


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.86 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x+iy$ 　(x, y は実数) の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x+iy \quad (x,y$ は実数) の形で求めよ．ただし，x,y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\log_e(1+ae^{it})\right]dt$$

(a) $z=e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1+ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z=x+iy$ が上半面 $y>0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.87 (1) $1+\sqrt{3}\,i$ を極表示せよ．

(2) 関数 $f(z)=(x^3-3xy^2-2y)+iv(x,y)$ で $f(z)$ を正則とする実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960908)

0.88 原点を中心とし，半径 2 の円周を C とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^z}{9z^2+\pi^2}\,dz$$

を計算せよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941005)

0.89 C_r は円 $z=re^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z(z-\pi)}dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_4}\frac{1}{z(z-\pi)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$　　(4) $\displaystyle\int_{C_4}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz$

(電気通信大 1998)　　(m19981005)

0.90 整関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ は，$f(0)=0$ を満たし，その実部が $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+ay\sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $u(x,y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を満たす）ことから a の値を定めよ．

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991005)

0.91 複素数 z の複素数値関数 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のマクローリン展開とその収束半径を求めよ．

(2) $f(z)$ の $\{z:0<|z-i|<2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(3) i を中心とし，半径 1 の円を正の向きに一周する曲線 C に沿っての $f(z)$ の積分を求めよ．

(電気通信大 2000) (m20001006)

0.92 a を正の実数とするとき，実数 x, y の関数 $u = e^{-ax}\sin(2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 u が，すべての x, y について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たすように，正数 a の値を定めよ．

(2) a を (1) で定めた定数とし，u を実部にもつ $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ．(ひとつ求まればよいものとする．答えは z の式で表すこと．)

(電気通信大 2000) (m20001007)

0.93 次の問いに答えよ．

(1) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001) (m20011009)

0.94 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i\arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ．(答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること)

(電気通信大 2001) (m20011010)

0.95 次の各複素積分の値を求めよ．

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)}dz$

(電気通信大 2005) (m20051006)

0.96 次の実定積分について考える（ただし $a > 1$ とする）.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta + a - 1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ.

(1) $z = e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

(2) 設問 (1) で示した変数変換 ($z = e^{2i\theta}$) によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051007)

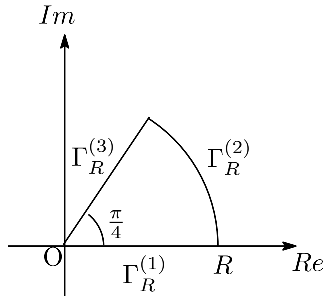
0.97 (1) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$ の極をすべて求め，それらを複素平面上で図示せよ．

(2) (1) の関数 $f(z)$ について次の積分を計算せよ．

$$(a) \quad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz . \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)dz .$$

(電気通信大 2006)　　(m20061005)

0.98 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\lim\limits_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.99 複素平面の円 $|z+i| = \sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$

(電気通信大 2007)　　(m20071005)

0.100 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z=\alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z=\alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.101 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}\ , \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.102 α を 0 でない複素数とし，

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\alpha)}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数 a, b を使って

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\alpha}$$

と書くとき，a, b を α の式で表せ．

(2) $f(z)$ を $z=0$ を中心として，領域 $0 < |z| < |\alpha|$ においてローラン展開せよ．

(3) $\alpha = 1+i$ とする．$z=0$ を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路に沿って $f(z)$ を積分したときの値を計算せよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101005)

0.103 定積分

$$I = \int_o^{2\pi} \frac{1}{5-4\sin\theta} d\theta$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z で表せ．ただし，i は虚数単位である．

(2) $I = \displaystyle\int_C f(z) dz$ の形に表せ．ここで，積分路 C は円 $|z| = 1$ を正の向きに一周するものとする．

(3) I の値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111005)

0.104 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\left(re^{i\theta}\text{の形}\right)$ で表せ．

(2) α を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121005)

0.105 複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{x + iy \;:\; x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.106 複素関数 $f(z) = \dfrac{8}{2z^4 + 1 - \sqrt{3}i}$ に対して，　以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路は正の向きに一周するものとする．

(電気通信大 2014)　　(m20141005)

0.107 以下の問いの答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ.

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.108 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ で，　e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z = Re^{i\theta}$　$(R > 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{R^2 - 1}$$

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.109 以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z| = 1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 I_1，I_2 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2}\,, \qquad I_2 = \int_{C_2} \frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I = \int_{|z-1|=1} f(z)dz \qquad \text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z) = \dfrac{1}{z(1 - \cos z)}$ の極 $z = 0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171005)

0.110 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ．

(2) $f(z)$ の極 $z=\alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を α を用いた簡単な式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

0.111 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　$f(z) = \dfrac{1}{az^2 - i(a^2+1)z - a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ．　$I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}$

(電気通信大 2019)　　(m20191005)

0.112 (1) $z^4 + 1 = 0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x = \sqrt{\tan\theta}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.113 (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211006)

0.114 複素関数 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z-i)}$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\, dz$ （積分路は正の向きに 1 周）の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221005)

0.115 複素数 z についての次の方程式を解け．

$$\left(e^z\right)^2 = i - 1$$

ただし $i^2 = -1$ とする．

(横浜国立大 2005)　　(m20051102)

0.116 (1) m, n を整数とするとき，以下の式が成り立つことを示せなさい．

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\, \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$$

(2) 次の周期関数について解答しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \qquad k > 0$$

この関数を以下のように無限級数で表すとき，その係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい．さらに，求められる無限級数を $n = 7$ の項まで示しなさい．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081105)

0.117　次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ．

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\ , & a \text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.118　複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - \alpha} dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z| = 1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5 + 0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.119　x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i = \sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} \big(f(x)\, e^{-i\omega x} \big) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x} \big) dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega} F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2} F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 (*) の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.120 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i = \sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリェ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリェ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリェ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリェ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリェ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - x^2f(x) = -(2n+1)f(x)\ , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリェ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 (*) の微分方程式の解のフーリェ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.121 $\sin z = \dfrac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$ であることを利用して，その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z = -i\log\big(iz + \sqrt{1-z^2}\big)$$

と表されることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001311)

0.122 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 3 点 A, B, C を考える. ただし, t は実数である. 以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, t の値によらず常に一次独立であることを示せ.

(2) 外積 $(\mathbf{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ を計算せよ.

(3) 3 点 A, B, C を通る平面 Π の方程式を求めよ.

(4) 実数 t が変化するとき, 平面 Π が通らない点の集合を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051307)

0.123 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式　$\Delta\phi = 0$ を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

0.124 $\dfrac{(1-i)^2}{1+i} z = 1$ となる複素数 z を $a + bi$ の形で表せ．ただし $i^2 = -1$ で，a, b は実数とする．

(筑波大 2007)　　(m20071329)

0.125 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) (a) $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ を示せ．

(b) 積分変数を $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント}：\cos\theta = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ．

(2) (a) 複素数 $z = e^{i\theta}$ とおいたとき，$z + \dfrac{1}{z}$ を計算せよ．

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ．

(c) 留数定理を用いて I を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.126 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z) = z^i$ $(i = \sqrt{-1})$ において，$f(i)$ の値をすべて求めよ．

(2) xyz 空間における曲面 $z = (x+y)^2 e^{x-y}$ 上の点 $(1, 0, e)$ での接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091305)

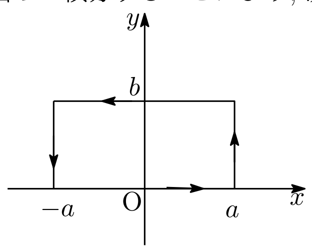
0.127 $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$（複号同順）という関係は, 複素関数としての指数関数, 三角関数の間にも成り立つ. この関係を使って, 逆余弦関数 $\arccos z$ ($\cos^{-1} z$ と書くこともある.) を対数関数を使って表せ.

(筑波大 2010)　　(m20101308)

0.128 (1) 次の式が成り立つことを示せ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

(2) 複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $i = \sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ibx - x^2}\, dx$$



(筑波大 2010)　　(m20101312)

0.129 複素数 $z=x+iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり，その実部 $u=u(x,y)$, 虚部 $v=v(x,y)$ は $u(x,y)=x^3-3xy^2+x,\ v(0,0)=0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ. 必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい.

(2) $f(z)$ を求めよ.

(3) C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ.

(筑波大 2011)　　(m20111303)

0.130 複素関数の閉曲線 C に沿っての積分

$$I=\int_C \frac{e^z}{2z-5}\,dz$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C が $|z|=2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ.

(2) 閉曲線 C が $|z-3|=2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121304)

0.131 (1) 2 つの複素数 $z_1=a+bi$ および $z_2=c+di$ を考える（a,b,c,d は実数であり, i は虚数単位である）．いま, 新たな複素数 z を $z=z_1z_2$ で定義する．このとき，$|z|=|z_1||z_2|$ であることを示しなさい.

(2) 前小問 (1) で述べた状況で，z の偏角が，z_1 の偏角と z_2 の偏角の和に等しいことを示しなさい. ただし，$a,c,ac-bd$ がいずれも 0 でないとする.

(筑波大 2012)　　(m20121315)

0.132 複素数 z についての方程式 $\sin z=3i$ を考える．i は虚数単位である．以下の問いに答えよ.

(1) $\omega=e^{iz}$ とする．$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い，この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ.

(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き，その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ.

(3) $\sin z=3i$ の解を $x+iy$ (x,y は実数) の形で求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131310)

0.133 複素関数 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ （z の実部）の微分可能性を定義に基づいて調べよ.

(筑波大 2014)　　(m20141307)

0.134 $x^2+3y^2=3$ で与えられる楕円 E について，以下の問いに答えよ．計算過程も示せ.

(1) $(x,y)\in R^2$ が楕円 E 上を動くとき，実関数 $f(x,y)=xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ.

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2+3y^2\le 3)$ で $0\le y\le x$ を満たす領域の面積を求めよ.

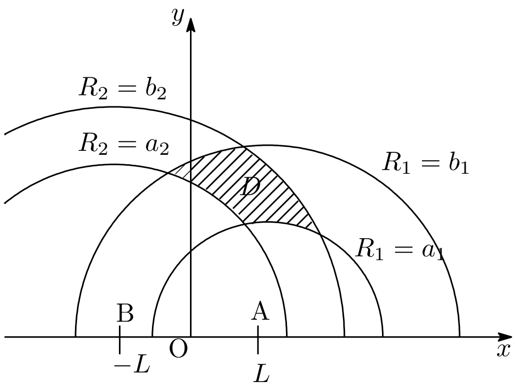
(3) x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面を考える．この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする．このとき $z=x+iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5}e^{-z}dz$ の値を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151310)

0.135 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x - L)^2 + y^2 , \qquad R_2 = (x + L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2} \log \left(\dfrac{R_1}{R_2} \right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi \int_D y dx dy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z) = \log \left(\dfrac{z - L}{z + L} \right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$, $0 < r_2$, $0 < \theta_1 < \pi$, および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.136 関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ．

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ．

(3) 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(x, y) + ig(x, y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\, z > 0$ $(x > 0)$ において正則となるように，関数 $g(x, y)$ を定めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.137 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$　について，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．　なお，$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z) = u + iv$ とするとき，u, v を x, y を用いて表せ．　ただし，u, v は x, y の実関数とする．

(2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ．

(3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171302)

0.138 留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 - 2x + 2} dx$$

ただし，m は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

0.139 複素変数 z の三角関数 $f(z) = \cos z$ に対し，$z = x + iy$,　$f(z) = re^{i\theta}$　(i は虚数単位) とおくとき，以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を求めよ．

$r^2 = \cos^2 x + \boxed{\quad (\mathrm{a}) \quad}$

(筑波大 2022)　　(m20221301)

0.140 次のベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積が 50 のとき，z を求めよ．

(埼玉大 2011)　　(m20111405)

0.141 3 つのベクトルが，$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$，$\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$，$\boldsymbol{c} = (1, 0, 0)$ であるとき，

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141402)

0.142 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$,　$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx \right) e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$,　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$ とする．

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.143 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする．

(埼玉大 2016)　　(m20161405)

0.144 xyz 空間上のスカラー場 $\varphi = x - \dfrac{2}{3}yz$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．C は原点 O から $(3,3,3)$ に至る線分とする．

(埼玉大 2016)　(m20161406)

0.145 次の各問に答えよ．

(1) 複素平面で，i を中心とした，原点を通る円の方程式を求めよ．

(2) 複素関数 $w = \dfrac{1}{z}$ によって，(1) で求めた円がどのような図形に移るか具体的に答えよ．

(茨城大 1998)　(m19981704)

0.146 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-1}$ について，

(1) $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．

(2) 次に示された曲線上を正の向きにとった積分路を C として，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ．

(a) $C : |z-1| = 1$

(b) $C : |z-i| = 2$

(茨城大 1999)　(m19991708)

0.147 2つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$
$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta = 0$ のときの点から $\theta = \pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000)　(m20001704)

0.148 z を複素数とするとき，$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ， $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ を示せ．

(2) y を実数とするとき，$\cos(iy) \geqq 1$ を示せ．

(3) $\cos z$ が実数となる z の条件を求めよ．

(茨城大 2001)　(m20011707)

0.149 次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)dz$, $C : 0$ から $1+i$ に至る線分，ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を表す．

(2) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$, ただし，積分路は正の向きにとる．

(茨城大 2002)　(m20021707)

0.150 複素関数 $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$ について

(1) $z=1$ のとき，$|\omega|=1$ であることを示せ.

(2) z を ω の式で表せ.

(3) z 平面の円 $|z+1|=\sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか.

(茨城大 2003)　　(m20031704)

0.151 複素平面上の曲線 $z(t)=\cos t+i(1+\sin t)$ $(0 \leqq\ t \leqq \pi)$ を C とするとき,

(1) C を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C z dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$ を求めよ．ただし,$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す.

（茨城大 2004）　　(m20041704)

0.152 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3-\left(\overline{z}\right)^3}{hi}$ を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分 $\displaystyle\int_0^i \left(\overline{z}\right)^2 dz$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051704)

0.153 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}-1\right)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-1\right|d\theta$

(茨城大 2006)　　(m20061704)

0.154 複素数の数列 $z_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ.　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ を求めよ.　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz_n$ を求めよ.

(茨城大 2007)　　(m20071704)

0.155 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ.
関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$
を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ.

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.156 n を正の整数とする．C は複素平面上の円 $|z| = \dfrac{1}{2}$ を正の向きに一周する閉曲線とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{z^n(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n} + \dfrac{b}{z-1}$ を満たすような定数 $a_1, a_2. \cdots, a_n, b$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(z-1)}\,dz$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081707)

0.157 複素数 $z = x + iy$（x, y は実数）の関数 $f(z) = x^2 - y^2 + y + i(2xy - x)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z)$ はすべての z で正則で，$f'(z) = 2z - i$ となることを示せ．

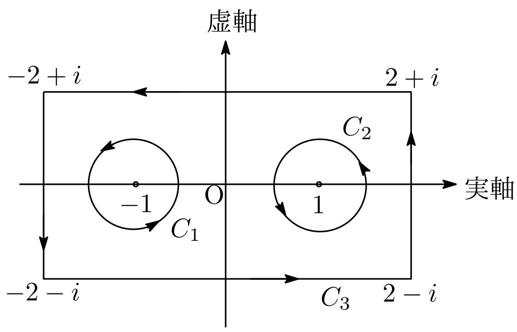
(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f'(z)}dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面上の円 $|z| = 1$ を正の向きに一周する閉曲線とする．

(茨城大 2009)　　(m20091704)

0.158 以下の各閉曲線 $C_k(k = 1, 2, 3)$ に沿う複素積分

$$\int_{C_k} \frac{ze^z}{(z+1)(z-1)^2}\,dz \quad (k = 1, 2, 3)$$

の値を求めよ. ただし, 各閉曲線 $C_k(k = 1, 2, 3)$ はいずれも正の向きに一周するものとする.



(1) C_1 : -1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(2) C_2 : 1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(3) C_3 : 4 点 $-2-i,\ 2-i,\ 2+i,\ -2+i$ を頂点とする長方形の辺

(茨城大 2010)　　(m20101704)

0.159 実数 x, y に対して，$z = x+iy$ とする．複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて，$f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ とおく．$u(x, y) = e^{-2x}\cos 2y$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(2) $v(x, y)$ は，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすとする．このとき，$v(0, 0) = 3$ となるような $v(x, y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(茨城大 2012)　　(m20121707)

0.160 複素数 z の絶対値を $|z|$，z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す．$w=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ．

(1) 次の値をそれぞれ求めよ．

(i) w^3　　(ii) $|w|$　　(iii) $w\overline{w}$　　(iv) $1+w+w^2$

(2) 複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対して，

$$c_n=\alpha+\beta\,\overline{w^n}+\gamma\,\overline{w^{2n}} \qquad (n=0,1,2)$$

とおく．このとき，

$$d_n=c_0+c_1w^n+c_2w^{2n} \qquad (n=0,1,2)$$

とおく．d_0，d_1，d_2 をすべて計算して，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を使って表せ．

(茨城大 2013)　　(m20131705)

0.161 i を虚数単位とし，$z=\dfrac{\sqrt{3}(i-1)-(1+i)}{1+i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ．

(1) $z=a+ib$ を満たす実数 a,b を求め，絶対値 $|z|$ を答えよ．

(2) $z=re^{i\theta}$ となる r と θ を求めよ．ただし，$r>0$ かつ $0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(3) z^n が実数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141702)

0.162 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，$a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.163 複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C: z(t)=t+i\sin t \quad (0\leqq t\leqq\pi)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ．

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C\overline{z}dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.164 i を虚数単位とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，複素数 $1-e^{i2x}$ を $a+ib$ (a,b は実数) の形で答え，その絶対値を求めよ．

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a+ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ．ただし，$r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$1-e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ．

(茨城大 2020)　　(m20201707)

0.165　2 つのベクトル $(-1,2,5)$ と $(1,-3,5)$ との外積を求めよ．

（山梨大 2003）　　(m20031807)

0.166　2 つのベクトル $(3,-2,1)$ と $(-2,5,4)$ との外積を求めよ．

(山梨大 2004)　　(m20041806)

0.167　位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_i)$ と時間 t の関数として，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ が与えられているとき，次の設問に答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{A}$ の成分 A_i (但し，$i=1,2,3$) を用いて，

(a) $\bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A}$　(b) $\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{A}$　(c) $\bigtriangledown\cdot\bigtriangledown\boldsymbol{A}\equiv\bigtriangledown^2\boldsymbol{A}$ を表せ．

(2) $\bigtriangledown\times\ \bigtriangledown\times\ \boldsymbol{A}=\bigtriangledown(\bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A})-\bigtriangledown^2\boldsymbol{A}$ という関係が成り立つことを，i 成分について示せ．

(3) $\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ および $\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ から，$\boldsymbol{E}$ を消去して $\boldsymbol{B}$ の満たす方程式を求めよ．但し，c はゼロでない定数とする．

(4) $\boldsymbol{B}=\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{A}$ かつ $\bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A}=0$ が成り立つとき，(2) と (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式を求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161807)

0.168　z は複素数で，$z^n=1$ を満たす 1 の n 乗根（但し，n は自然数）であるとする．このとき，以下の小問に答えよ．

(1) 全ての z（n 乗根）を求めよ．また要点を押さえて，n 乗根の概略を複素平面上に図示せよ．

(2) 1 でない n 乗根の一つを ω とし，$\omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$ のいずれも 1 でないとする．また，m が自然数で n の倍数でないとき，次の 2 式 $P,\ S_m$ の値を求めよ．

$$P=(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\ ,$$

$$S_m=1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}\ .$$

(3) $n=10$ の場合を考え，$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots,\ \omega^9$ がいずれも 1 にならないような ω はいくつあるか求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181803)

0.169　(1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5=1$ の解を全て求めよ．また，$z\neq1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5=5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 $\sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4$ によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n=1,2,3,4,5)$ により α を変換せよ．

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.170 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t) = (f(t), g(t))$ で与えられている．但し，$f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[0, 1]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり，それらの導関数 $f'(t)$，$g'(t)$ は同じ開区間で連続である．

さて，動点 P が時刻 $t = 0$ に原点 $O(0, 0)$ を出発して時刻 $t = 1$ に点 $A(1, 1)$ に到着するとせよ．このとき，途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t) = (f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ．

(信州大 2007)　　(m20071904)

0.171 次の公式を示せ．

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} r) = 0$$

ここで，$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ であり，$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(新潟大 2001)　　(m20012009)

0.172 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.173 位置ベクトル $\vec{r} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ と力をあらわすベクトル $\vec{F} = (2, 2, 0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) xy 平面内にあり，ベクトル $\vec{r}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

(2) トルク $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ を計算せよ．

(3) 二つのベクトル $\vec{r}$ と $\vec{F}$ の間の角度を求めよ．

(新潟大 2007)　　(m20072001)

0.174 次の複素数を極形式 $(re^{i\theta})$ であらわし，複素数平面上に図示せよ．

(1) $2i$

(2) $-1 + \sqrt{3}i$

(3) $2 + 2i$

(新潟大 2009)　　(m20092001)

0.175 ベクトル $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ は，$\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ である．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ の内積 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ の外積 $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092003)

0.176 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,a_x+\boldsymbol{j}\,a_y+\boldsymbol{k}\,a_z\ \ (\neq 0)$ と $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\,b_x+\boldsymbol{j}\,b_y+\boldsymbol{k}\,b_z\ \ (\neq 0)$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ がゼロであれば, 2 つのベクトルが直交することを示せ. また, 内積の成分表示が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z$ で与えられることを示せ.

(2) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,a_x+\boldsymbol{j}\,a_y+\boldsymbol{k}\,a_z\ \ (\neq 0)$ と $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}\,b_x+\boldsymbol{j}\,b_y+\boldsymbol{k}\,b_z\ \ (\neq 0)$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ であれば, 2 つのベクトルは平行であることを示せ.

(新潟大 2010)　　(m20102003)

0.177 次の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ の行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{i})(\boldsymbol{j}\times\ \boldsymbol{k})+(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{j})(\boldsymbol{k}\times\ \boldsymbol{i})+(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i}\times\ \boldsymbol{j})$$

ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ, x 方向, y 方向, z 方向の単位ベクトルとする.

(新潟大 2011)　　(m20112002)

0.178 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1+i\\x+iy\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{a}$ のノルムが 3, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積の絶対値が $\sqrt{7}$ となるような x と y の値を求めよ. ただし i は虚数単位, x,y は実数とする.

(新潟大 2012)　　(m20122008)

0.179 4 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(3,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$, $\boldsymbol{d}=(0,3,1)$ について, 次の値を求めよ.

$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{d})$$

(新潟大 2014)　　(m20142002)

0.180 ベクトル場 $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{r})=\dfrac{A\overrightarrow{r}}{r^3}$ が存在する. ここで A は定数であり, $\overrightarrow{r}=(x,\ y,\ z)$ で, $r=|\overrightarrow{r}|$ である. $r\neq 0$ として以下のものを計算せよ. 計算過程も書くこと.

(1) $\mathrm{div}\ \overrightarrow{V}(\overrightarrow{r})$　　(2) $\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}(\overrightarrow{r})$

(新潟大 2018)　　(m20182005)

0.181 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる. 物理の問題を扱うには, よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い. このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け. つまり, 実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

で定義する. J^2 を計算し, J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022) (m20222006)

0.182 複素数 z で $z^3 - 8 = 0$ を満たすものをすべて求めよ．

(長岡技科大 1995) (m19952106)

0.183 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される．
$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n \big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052106)

0.184 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.185 次のベクトル解析の公式を証明しなさい.

(1) $\overrightarrow{A}\times\ (\overrightarrow{B}\times \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}) - \overrightarrow{C}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})$

(2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{A}) = 0$

(金沢大 1999)　　(m19992210)

0.186 位置ベクトルを $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, $r = |\overrightarrow{r}|$ と示す．ベクトル $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は各々x, y, z 方向の単位ベクトルである．このとき以下の式が成り立つことを示しなさい．

$\mathrm{grad}(r^n) = n\,r^{n-2}\,\overrightarrow{r}$

(金沢大 1999)　　(m19992211)

0.187 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で， $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする．

$s > 0$ に対して $g(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f''(x)\,dt = s^2g(s) - sf(0) - f'(0)$ を示せ．

(2) ω は定数とする． $f(t) = \sin\omega t$ のとき， $g(s)$ を求めよ．

(金沢大 1999)　(m19992212)

0.188 3次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とします．x, y, z は直交座標系の座標で，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです．3次元ベクトル場

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ =grad $U(r)$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\ ,\ \ U(r) = \exp(-ar)$$

で，a は定数です.

(1) div $\boldsymbol{A}$　(2) rot $\boldsymbol{A}$

(3) 3次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B = \oint \boldsymbol{A} \cdot da$$

(金沢大 2005)　(m20052210)

0.189 $\vec{c}$ を定ベクトル, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ を位置ベクトルとするとき, $\vec{c} \times \vec{r}$ の回転 (rot) を求めなさい.
ただし, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は, 右手直交座標系の x, y, z 軸に対する基本ベクトルである.

(金沢大 2010)　(m20102212)

0.190 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y \neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　(m20152210)

0.191 次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである.

(1) スカラー関数 $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　(m20162209)

0.192 始点 $(0, 0, 0)$ と終点 $(1, 1, 1)$ を直線で結ぶ経路を C とする．経路 C に沿ったベクトル関数
$\boldsymbol{A} = (x^2 + y)\boldsymbol{i} + (xy + z)\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \cdot dr$ を計算しなさい.

(金沢大 2016)　(m20162210)

0.193 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A,B,C，3 点 A,B,C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする．

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.194 流体の密度を $\rho(x,y,z,t)$，速度を $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ とする． 湧き出しも吸い込みもないとき，連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

が成り立つことを示しなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172210)

0.195 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が恒等的に $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ を満たすとき，始点を P_1，終点を P_2 とする $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ は，P_1 から P_2 への経路によらないことを示しなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172211)

0.196 虚数単位 i の平方根を複素平面上に図示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212211)

0.197 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))=(\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0\leq t\leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.198 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

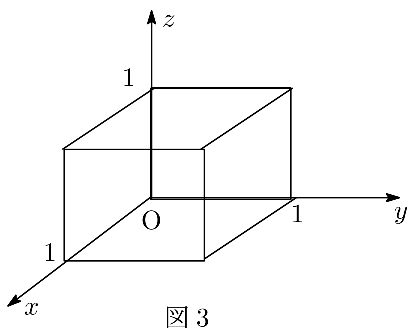


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.199 空間の 3 次元座標を $\vec{r}=(x,y,z)$ とし，$|\vec{r}|=r\neq 0$ とする. 微分演算子 $\vec{\nabla}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いた次の計算の結果を $\vec{r}$ と r または数値で表せ.

(a) $\vec{\nabla}r$　　　(b) $\vec{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$

(富山大 2004)　　(m20042313)

0.200 3次元空間 $O-xyz$ に相異なる点 A, A' を通る直線と相異なる点 B, B' を通る直線がある．2つの直線はねじれの位置にあるものとし, その間の距離 l を考える．2つの直線の距離とはそれぞれの直線上の2点間の距離の最短距離であって, 最短距離となる2点は互いに他方の直線への垂線の足（交点）となっている．ここで, $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB'}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{s} = \overrightarrow{OB}$ として以下の問いに順次答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ をベクトルの外積（ベクトル積）を用いて書け．

(2) 原点を通りベクトル $\vec{n}$ に平行な直線への点 A, B からの垂線の足を P, Q とする．長さ $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ をベクトルの内積（スカラー積）を用いて書け．

(3) 点 P と Q の距離が, 求めるべきねじれの位置にある2つの直線の距離 l であることをふまえ, l を $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) 点 $A(1,-1,-1)$, $A'(-1,1,0)$ を通る直線と点 $B(2,1,1)$, $B'(1,-1,3)$ を通る直線の距離を (3) の結果を用いて求めよ．

(富山大 2006)　　(m20062304)

0.201 図のように直交座標軸と点 A, B, C で交わる平面 S がある．各点の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a} = a\vec{i}$, $\vec{b} = b\vec{j}$, $\vec{c} = c\vec{k}$ として以下の問いに答えよ．ただし, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は各軸の単位ベクトルである．また, $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$ は平面 S に垂直である．

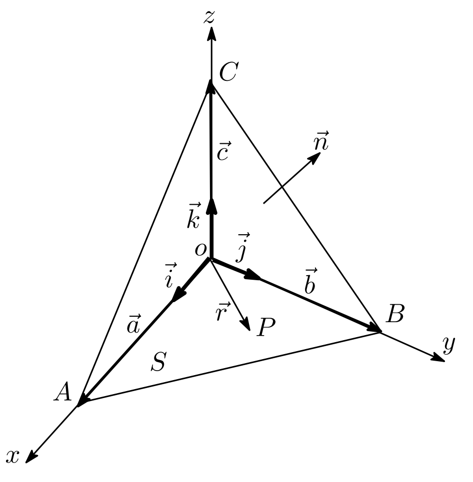
(1) 平面 S 上の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，平面 S の方程式は

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

となることを示せ.

(2) 平面 S の方程式を x, y, z, a, b, c を用いて表せ.

(3) $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ のとき，原点 O から平面 S までの最短距離 d を求めよ.



(富山大 2007)　　(m20072304)

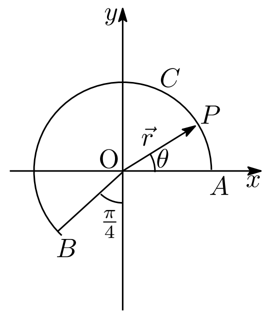
0.202 (1) 位置ベクトル $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ とし，スカラー関数
$f(x, y, z) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{r}|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ の勾配 grad f を，$\overrightarrow{r}$ を用いて表せ.

(2) ベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x, y, z) = (x^2y, xy^2, 2z)$ の発散 div $\overrightarrow{A}$ を求めよ.

(3) スカラー関数 $f(x, y, z)$ について，その勾配の回転 rot grad f は，常に零ベクトルとなることを示せ.

(富山大 2009)　　(m20092302)

0.203 図のように円 $x^2+y^2=25,\ z=0$ の x 軸上の点 A から B までの円弧を C, C 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$, $\vec{r}$ と x 軸とのなす角を θ とする．



(1) $\displaystyle\int_C \vec{r}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\left|\int_C d\vec{r}\right|$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\left|\int_C \vec{r}\times d\vec{r}\right|$ の値を求めよ．

(富山大 2010)　　(m20102303)

0.204 $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{b}=3xyz^2\vec{i}+2xy^3\vec{j}-x^2yz\vec{k}$, $\phi=e^{xyz}$ とする．点 $P(1,-1,1)$ において，次の値を求めよ．ただし，$\vec{a},\vec{b},\vec{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$　　(2) $\mathrm{div}\,(y\,\mathrm{grad}\,\phi)$　　(3) $\vec{a}$と $\mathrm{rot}\,\vec{b}$ のなす角度　　(4) $(\vec{a}\times\ \nabla)\phi$

(富山大 2012)　　(m20122303)

0.205 集合 $A=\left\{z\,\middle|\,z\text{ は複素数},\ |z|=1,\ z\neq 1\right\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A に属す z に対して，$z=\dfrac{c+i}{c-i}$ をみたす実数 c が存在することを示せ．ただし，i は虚数単位とする．

(2) 上の (1) で存在する c は一意的であることを示せ．

(3) A に属す z に $z=\dfrac{c+i}{c-i}$ によって一意的に定まる実数 c を対応させる写像 $f:A\to\boldsymbol{R}$ は全単射であることを示せ．

(富山大 2013)　　(m20132308)

0.206 $\phi(x,y,z)=e^{2x^2-4y^3+z^2}$, $\overrightarrow{A}(x,y,z)=2xyz^3\overrightarrow{i}+x^2z^3\overrightarrow{j}+3x^2yz^2\overrightarrow{k}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{0}$ を示せ．

(2) 点 $(1,1,-1)$ において，$\phi\overrightarrow{A}$ の発散の値を求めよ．

(3) 点 $(1,1,-1)$ における ϕ の点 $(-3,5,6)$ に向かう方向の方向微分係数を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}dS$ の値を求めよ．ただし，S は円柱面 : $x^2+y^2=1$ の $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 0\leqq z\leqq 1$ を満たす部分とし，$\overrightarrow{n}$ は S の単位法線ベクトルとする．

(富山大 2014)　　(m20142303)

0.207 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r\ \ (r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ．

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ．

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.208 スカラー関数 $f(x,y,z)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について， 次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ は，それぞれ直角座標系の x，y，z 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\vec{n}$ の x，y，z 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla\cdot\nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla\times\nabla f$ を計算し，$\vec{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1,0,1)$ における，ベクトル $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.209 直角座標系 xyz におけるベクトル場 $\vec{F}(x,y,z)=-y\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+y\,\vec{k}$，
スカラー場 $\phi(x,y,z)=axy+byz+czx$ $(a,b,c$ は定数$)$ について，次の問いに答えよ．
ただし，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ はそれぞれ x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) 次の計算をせよ．
(a) div $\vec{F}$　　(b) rot $\vec{F}$
(c) grad ϕ　　(d) rot(grad ϕ)

(2) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき，
ϕ がベクトル場 $\vec{F}$ のポテンシャル（スカラーポテンシャル）となることを示せ．

(3) $a=1,\ b=-1,\ c=0$ のとき，
点 $P(1,1,1)$ から点 $Q(0,2,2)$ までの線積分 $\displaystyle\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を求めよ．
ここで $\vec{r}$ は P から Q へ向かう経路上の点の位置ベクトルである．

(富山大 2018)　　(m20182305)

0.210 次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ はそれぞれ x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．

(1) ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)=(xyz)\,\vec{i}+(-y^2z^3)\,\vec{j}+(2x^2y)\,\vec{k}$ に対して $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A})$ を求めよ．

(2) スカラー場 $\phi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(ただし，$x^2+y^2+z^2\neq 0$) に対して，

(a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ を計算せよ．
(b) grad ϕ を求めよ．
(c) div(grad ϕ) $=0$ を示せ．

(富山大 2019)　　(m20192303)

0.211 ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z)=xye^z\vec{i}+x\log_e(z)\vec{j}+yz^4\sin(2x)\vec{k}$，スカラー場 $\phi(x,y,z)=xyz$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ直角座標系の x，y，z 軸方向の単位ベクトルとする．

(1) 回転 rot$\vec{A}$ を求めよ．

(2) 勾配 gradϕ を求めよ．

(3) 点 $P(1,1,2)$ における，単位ベクトル $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{i}-\dfrac{2}{3}\vec{j}+\dfrac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\dfrac{d\phi}{du}$ を求めよ．

(富山大 2020)　　(m20202304)

0.212 スカラー場 $\phi(x,y,z)=x^2y+y^2z-xy\,e^{(z^2)}$，ベクトル場 $\vec{F}(x,y,z)=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ は直交座標系 x，y，z の各軸方向の単位ベクトルとする．また，点 P の座標を (2, 1, 0) とする．

(1) 点 P における，ϕ の等位面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 P における，$\overrightarrow{F}$ 方向に対する ϕ の方向微分係数を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}$ を求めよ．

(4) 原点 O から点 P に至る線分 OP における，$\overrightarrow{F}$ の線積分 $\displaystyle\int_{OP}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．ここで，$\overrightarrow{r}$ は位置ベクトルである．

(富山大 2022)　　(m20222304)

0.213 以下の各問いに答えよ．ただし，a, k, L は定数とする．

(1) $g'(t) = -ak^2g(t)$ の一般解を求めよ．

(2) $f''(x) = -k^2f(x)$ の一般解を求めよ．

(3) (1)，(2) の解を合成した $y(x,t) = f(x)g(t)$ が $(*)$ を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \cdots(*)$$

(4) $(*)$ 式において，$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad (t > 0)$ を満たす，y の一般解を求めよ．

(富山大 2022)　　(m20222305)

0.214 次の 2 つのベクトルがある．

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ が $\begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$ となることを誘導しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002417)

0.215 次の複素数を極形式で表せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である．

(1) $1 + j$

(2) $(1 + \sqrt{3}j)/(1 + j)$

(福井大 2000)　　(m20002418)

0.216 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする．

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0\,(m \neq n) \\ \pi\,(m = n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる．

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k \geq 0)$, $b_k\,(k \geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ．

(福井大 2003)　　(m20032417)

0.217 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式（$\cos\theta+i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006)　　(m20062411)

0.218 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ に対して次のものを計算して求めよ．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　(2) 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(福井大 2010)　　(m20102408)

0.219 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a+bi$ の形で表せ．

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2+i}\right|$ の値を求めよ．

(3) 次の複素数を極形式で表せ．

1) $2+2\sqrt{3}i$　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $y=\cos\beta+i\sin\beta$ とするとき，$xy=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.220 $t<0$ で $f(t)=0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は，以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $f(t)=e^{at}$

(2) $f(t)=\displaystyle\int_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014)　　(m20142426)

0.221 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z\neq 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする．

$$f(z)=z-\frac{1}{z}$$

(1) $z=x+yi$ のとき，複素関数 $f(z)=u+iv$ の実部 $u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z)$ および虚部 $v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z)$ を x, y の関数として表しなさい．

(2) (1) の実関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい．

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が,

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$

となることを，実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい.

(福井大 2015)　(m20152424)

0.222 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする.

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t} dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{1-i} (iz + 2) dz$　なお，積分経路は直線とする.

(福井大 2016)　(m20162423)

0.223 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t - \alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t - \alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t - 1)$ のラプラス変換を求めなさい.

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t - 1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい.

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)\theta(t - \alpha)] = e^{-s\alpha} F(s)$$

(福井大 2018)　(m20182410)

0.224 (1) 積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = \theta(t - 1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい.

(2) (1) の積分方程式を解きなさい.

(福井大 2018)　(m20182411)

0.225 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換　$\displaystyle F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$　を求めよ.

(福井大 2020)　(m20202413)

0.226 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ.

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ.　$\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t \sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ.　$\mathcal{L}[t \sin at]$

(福井大 2020)　　(m20202414)

0.227 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021)　　(m20212412)

0.228 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx \ dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx \ dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.229 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|\right| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.230 (1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$ を求めよ．ここで，C は複素数平面の原点を中心とする半径 1 の円周を正の向きに 1 周する積分路とする．

(2) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ を (1) を利用して求めよ．

(静岡大 2004) (m20042507)

0.231 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3}\,dz$ の値を求めよ. ここで i は虚数単位, C は複素平面上の原点を中心とする半径 2 の円周で向きは反時計回りとする.

(静岡大 2005) (m20052505)

0.232 正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の虚部が $v(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ で与えられるとき，実部 $u(x,y)$ を求め，$f(z)$ を z の関数として表せ．ただし，$z=x+iy$ で，i は虚数単位である．

(静岡大 2007) (m20072503)

0.233 (1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ を $x=1$ を中心にテイラー展開せよ．

(2) 複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3}+2i)$, $B(2\sqrt{3}+3i)$ をとる．以下の問いに答えよ．

(a) 点 C を三角形 ABC が正三角形となるように定める．点 C を表す複素数を求めよ．

(b) 点 D は直線 AC に関して B と線対称となる点である．点 D を表す複素数を求めよ．

(静岡大 2009) (m20092505)

0.234 $z^3=\dfrac{1}{i}$ をみたす複素数 z を全て求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(静岡大 2010) (m20102506)

0.235 $(1-i)^{11}=a+bi$ を満たす実数 a, b を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(静岡大 2011) (m20112505)

0.236 3 つの複素数を $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，$\gamma=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする．ここで，i は虚数単位をあらわす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) α, β, γ を複素平面上に図示せよ．

(2) α^{2011} を $x+yi$ (x,y は実数) という形にあらわせ．

(3) $\alpha^m=\beta$, $\alpha^n=\gamma$ をみたす整数 m,n があれば求めよ．

(4) 複素平面上で α, β, γ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a,b,c とするとき，

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)(\cos c+i\sin c)$$

を求めよ．

(静岡大 2012) (m20122507)

0.237 α, β, z_1, z_2, z_3 は複素数で $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$z_1+z_2+z_3=\alpha$，$z_1z_2z_3=\beta$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=\overline{\alpha}$ であることを示せ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．

(2) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\overline{\alpha}\beta$ であることを示せ.

(静岡大 2013) (m20132507)

0.238 ベクトル解析に関して以下の問いに答えよ．

(1) $f = e^x \sin y$ に対する勾配（grad f）を求めよ．

(2) ベクトル $\mathbf{v} = 3xz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ の発散（div $\mathbf{v}$）を求めよ．
(ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ はそれぞれ x-, y-, z- 方向の単位方向成分を表すものとする．）

(岐阜大 2001)　　(m20012613)

0.239 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$， $r = |\boldsymbol{r}|$ とするとき, 次の式を証明せよ.

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ここで, $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$， $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の基本ベクトルである.

(岐阜大 2005)　　(m20052607)

0.240 ベクトル $\boldsymbol{a} = (6, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, 4, 0)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, -2)$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) $|(\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ の値を求めよ.
ただし, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積を示し, $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積を示す.

(2) (1) 式の値の幾何学的意味を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052614)

0.241 i を虚数単位としたとき，$\sqrt{i}$ を複素数 $a + bi$ の形で表せ．ただし a, b は実数とする．

(岐阜大 2006)　　(m20062602)

0.242 $-4 + i4$ の 3 乗根を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

(岐阜大 2006)　　(m20062611)

0.243 $\phi(x, y, z)$ を微分可能なスカラー関数，$\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ を微分可能なベクトル関数とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は直交する 3 本の直線 x, y, z を座標軸とする座標系（デカルト座標系）における基本ベクトルである．

(1) rot (grad ϕ) $= \mathbf{0}$　　（注 ： 太字 $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.）

(2) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$

(岐阜大 2007)　　(m20072620)

0.244 実平面上の x-y で表される直交座標系がある．その上で定義される関数 $f = 3x^2 + 3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0, 0)$，$A(2, 0)$，$B(2, 2)$，$C(0, 2)$ とする．$OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\, dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\, dS}$$

は，いくらになるか計算せよ．なお式中の dS は面要素である．

(岐阜大 2009)　　(m20092601)

0.245 複素数 $-2 + 2\sqrt{3}i$ について,

(1) 絶対値を求めよ.

(2) 偏角を求めよ.

(3) 2 乗根を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042708)

0.246 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^8$ を計算すると，$A+Bi$ となる．A および B を求めよ．ただし，A と B は実数とする．

（豊橋技科大 2004）　　(m20042709)

0.247 3 次元直交座標系における点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{a}=(1,4,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{c}=(3,p,q)$

とする．$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p，q の関係式を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから，もう一つの p，q の関係式を求めよ．

(3) 以上の関係式から p，q の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ．

(5) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(6) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ．

(8) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2005)　　(m20052704)

0.248 複素数 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+\sqrt{3}i$ について，次の値を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を，$|z|$ は z の絶対値を表す．

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2$$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062701)

0.249 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．

ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s]>0)$ とする．

(a) $f(t)=\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$

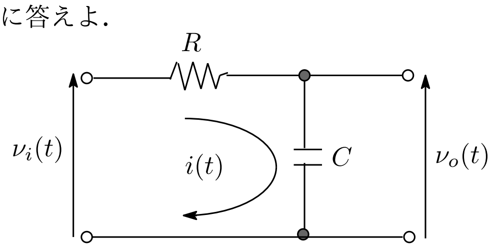
(b) $f(t)=u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

(c) $f(t)=t\,u(t)=\begin{cases}t & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

(d) $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & t\geq 0 \quad (\alpha>0)\\ 0 & t<0\end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．

(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t=0$ のとき，$\nu_o(t)=0$ である．



(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.250 $\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする． 以下の問に答えよ．なお， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'$ と記すこととする．

(1) $\boldsymbol{f}(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合， $\boldsymbol{f}(t)$ と $\boldsymbol{f}'(t)$ は直交することを証明せよ．ただし， $|\boldsymbol{f}(t)| > 0$, $|\boldsymbol{f}'(t)| > 0$ とする．

(2) 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}(t)$ とするときに，位置ベクトルが $\boldsymbol{g}'(t)$ となる点を点 B とする．もし， $\boldsymbol{g}(t)//\boldsymbol{g}''(t)$ が成り立つならば，三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ．ただし， $\boldsymbol{g}(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし，O は原点とする．また，$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}'$ の公式を用いてよい．

(名古屋大 2011)　　(m20112804)

0.251 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (2n-1)\pi < x \leqq 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \leqq (2n+1)\pi \end{cases}$$

(名古屋大 2016)　　(m20162803)

0.252 三次元ユークリッド空間において，点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3 (= \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある． また，点 P があって，点 O から点 P までの位置は実変数 t に関するベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ で表される． 座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を変数 t に関して 2 階微分すると $\sin(t)\boldsymbol{e}_1 - \cos(t)\boldsymbol{e}_2$ となった． なお， $t = 0$ のとき，座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ の変数 t に関する 1 階微分の値は $-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$ であり，また， $t = 0$ のとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(0)$ の値は $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ である． このとき，以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を求めよ．

(2) 正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1 = \cos(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(t)\boldsymbol{e}_2$,　$\boldsymbol{b}_2 = -\sin(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(t)\boldsymbol{e}_2$,　$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3$ がある．また，ある点 Q があって，点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)$ は
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t) = 5t\boldsymbol{b}_1 + 7t\boldsymbol{b}_2$ である．

(a) 座標系 E を用いて表したベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ について， 変数 t に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(b) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ とおく． 座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ の変数 t に関する 2 階微分を求めよ． 得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(名古屋大 2017)　　(m20172806)

0.253 原点と正規直交する基底ベクトル $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ をもち，それぞれの基底ベクトルに対応する座標を x, y, z とするユークリット空間を考える．また，演算子 ∇ を $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$ と定義する．

(1) $V = xy(x^2 + y^2 + z^2)$ とする．∇V を基底ベクトルと x, y, z を用いて表せ．

(2) 以下に示す $\overrightarrow{f}$ に対して，$\nabla W = \overrightarrow{f}$ となるスカラー関数 $W(x, y, z)$ が存在するかを考える．ここで，W の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0) = 0$ とする．W が存在するならばそれをひとつ示し，W が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + zx)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(ii) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + z)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

0.254 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において，
曲線 C を $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\cos z\,\boldsymbol{k}$ を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222802)

0.255 (1) 2 変数の関数 $f(x,y) = x^4 - 4x^3y + ax^2y^2 + bxy^3 + cy^4$ が次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

をみたすとき，実定数 a, b, c の値を求めよ．

(2) 上の関数 $f(x,y)$ に対して次の関係式

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

をみたす 2 変数の関数 $g(x,y)$ を求めよ．

(3) $w = f(x,y) + ig(x,y)$ を $z = x + iy$ を用いて表せ．ただし，i $(i^2 = -1)$ は虚数単位である．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002907)

0.256 xyz 空間で円柱 $x^2 + y^2 = 4$，xy 平面，放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032904)

0.257 xyz 空間内の半円柱面 $y^2 + z^2 = 1$，$z \geqq 0$ を 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ によって切ったときに得られる曲面

$$S = \{(x,y,z)\,|\,y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geqq 0\,,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ が外向きに（つまり S 上の $z > 0$ なる点では z の正方向に）貫く流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2005)　　(m20052904)

0.258 直交デカルト座標系における基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ のとき, 内積（スカラー積）$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の交角の余弦を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ の $\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ 上への正射影を求めよ.

(3) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ のとき, 外積（ベクトル積）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ. また, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めよ.

（三重大 2004）　(m20043114)

0.259 以下の文章の $\boxed{}$ に適切な語句または数式を入れ, 解答欄に記入しなさい.

大きさがで 0 ない 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある. いま, 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ と表し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{①}}$

と表すことができる. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{②}}$

である.

内積については, 次が成り立つ.

交換法則： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{③}}$

分配法則： $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \boxed{\text{④}}$

ここで, $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{⑤}}$

である.

一方, 外積については, 次が成り立つ.

歪対称： $\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{\text{⑥}}$

分配法則： $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \boxed{\text{⑦}}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \boxed{\text{⑧}}$

ここで, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ であるとき,

$\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{\text{⑨}}$

である. ただし, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は基本ベクトルである.

(三重大 2010)　(m20103104)

0.260 次の方程式を z について解きなさい. 解が複素数になる場合には $a + bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) の形で表現しなさい.

$z^3 = -64i$

(三重大 2010)　(m20103105)

0.261 i を虚数単位とし，複素数 α を $\alpha = (x - i)^2$，$\overline{\alpha}$ を α の共役複素数とするとき，次の (1) と (2) に答えよ.

(1) $\alpha + \overline{\alpha} = 2$ を満たす実数 x の値を求めよ.

(2) $\alpha \times \overline{\alpha} = 4$ を満たす実数 x の値を求めよ.

(三重大 2012)　(m20123118)

0.262 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$ （ただし，ω は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{l}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_z \, dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.263 z を複素数とするとき，方程式 $z^4 = -1$ のすべての解を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173105)

0.264 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$　を用いよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033210)

0.265 3 次元空間の 0 でないベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ があり, それらの間の内積（スカラー積）が

$$\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{a_j} = \begin{cases} |\overrightarrow{a_i}|^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられている. ただし, i, $j = 1, 2, 3$ で, $|\overrightarrow{a_i}|$ はベクトル $\overrightarrow{a_i}$ の大きさである. 以下の問いに答えよ.

(1) λ_1, λ_2, λ_3 を係数とする方程式

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3} = 0$$

が, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ のときのみ成り立つ場合, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立なベクトルであるという. 実際に, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ が線形独立であることを示せ.

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して,

$$\overrightarrow{a_1} \cdot (\overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{a_3}) = \overrightarrow{a_2} \cdot (\overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{a_1}) = \overrightarrow{a_3} \cdot (\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2})$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\overrightarrow{a_i} \times \overrightarrow{a_j}$ は $\overrightarrow{a_i}$ と $\overrightarrow{a_j}$ のベクトル積である.

（奈良女子大 2004）　　(m20043209)

0.266 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散，$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ は，$\mathrm{div}\, \boldsymbol{r}$ とも書く．

(2) $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla \times \boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla \times \boldsymbol{v}$ は，$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007)　　(m20073209)

0.267 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla \times (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla \times (\nabla \phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.268 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル A の成分 A_x , A_y , A_z を求めよ．

(2) $\mathrm{div}\, A = \nabla A$ を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\, A = \nabla \times A$ を求めよ．

ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(奈良女子大 2009)　　(m20093208)

0.269 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0\right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x - y$ 平面上に図示せよ．

ここで，∇ は次のように定義された演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2012)　　(m20123204)

0.270 A を連続微分可能なベクトル場，$f(x, y, z)$ を連続微分可能な関数とするとき，以下の関係式を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ である．

(1) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \nabla f(x, y, z)) = 0$

(2) $(A \cdot \nabla)A = \dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2) - A \times (\nabla \times A)$

(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{A \times \boldsymbol{r}}{r}\right) = \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times A)}{r}$

ここで，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である．必要なら，以下の関係式を用いてよい．

(a) $\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f\nabla \cdot A$

(b) $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f\nabla \times A$

(c) $\nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B$

(d) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133207)

0.271 次のスカラー関数 $U(x, y, z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする．

$$U(x, y, z) = \exp\left[-a(x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot F = 0$ となるとき，x, y, z が満たす条件をすべて求めよ．

(3) $\nabla \times\ F$ を求めよ．

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014)　　(m20143204)

0.272 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の時，以下の量を計算せよ．ただし，$r \neq 0$ とする．

(1) ∇r^n　(2) $\nabla \times\ r^n \boldsymbol{r}$　(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(4) $\nabla \left(\dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　(5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで，∇ は以下で定義する微分演算子であり，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数，$\boldsymbol{p}$ は定ベクトル，n は定数である．

(奈良女子大 2015)　　(m20153204)

0.273 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla \dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.274 つぎの各問いに答えよ．

(1) i , $1 + i$, $1 - \sqrt{3}i$ を極形式で表せ．

(2) $e^z = 4i$ なる z を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z - \frac{1}{3}}{z^3 - z} dz$,　$C : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ の反時計を計算せよ．

(4) $\dfrac{1}{z(z-i)}$ を $z=i$ 近辺でローラン展開せよ．

(京都大 1999)　　(m19993304)

0.275 次の複素積分を行え．ただし，$i=\sqrt{-1}$（虚数単位）とする．

(1) $I=\displaystyle\int_C (z-z_0)^n dz \qquad C:|z-z_0|=r$

(2) 留数定理を用いて，次の積分を行え．

$$I_1=\int_{C_1}\frac{3z+1}{z^2+1}dz \qquad C_1:|z-i|=1$$

$$I_2=\int_{C_2}\frac{(z^2+2)^2}{(2z^2-z)(z+3)}dz \qquad C_2:|z|=1$$

(京都大 2000)　　(m20003303)

0.276 z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w=f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1|<1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w>0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2})=i$，$f(0)=0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V=\{w \mid 0<\mathrm{Im}w<1\}$ の現像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002)　　(m20023304)

0.277 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{e^z-1} & (z\neq 0)\\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

この関数は $|z|<2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n=0,1,2,\cdots$ を定義する．$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z-1)f(z)=z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$$

ただし，$\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.278 関数 $f(z)$ は $z=a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big)$$

を証明せよ．ただし，C は $z=a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である．

(京都大 2002)　　(m20023306)

0.279 a を $-1<a<1$ なる実数とする．複素数 z に対して

$$w=\frac{z-ai}{1+aiz}$$

とおく．$i=\sqrt{-1}$ は複素単位．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z \mid |z|=1\}$ 上を動くとき点 w はどのような図形を描くか.

(2) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z \mid |z|=1\}$ の内部にあるとき点 w はどのような領域にあるか図示せよ.

(京都大 2006)　　(m20063305)

0.280 C を複素数平面上の単位円周 $C=\{z \mid |z|=1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1=\{z \mid |z|<2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分 $I=\displaystyle\int_C \frac{f(z)-f(0)}{z}dz$ の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z)=\dfrac{1}{z}$ に対し，積分 $\phi(z)=\displaystyle\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ で与えられる領域 $D_2=\{z \mid |z|>1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006)　　(m20063306)

0.281 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w}=\sum_{n=1}^{\infty}(-w)^{n-1}\ , \quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi <\mathrm{Im}\log(1+z)\leq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right)=z\ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$ を示せ．

(京都大 2006)　　(m20063307)

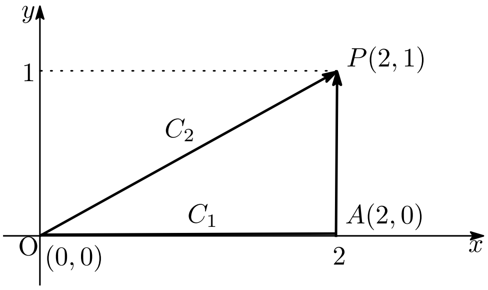
0.282 (x,y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x,y)=2x+ay\ , \qquad G(x,y)=2x+5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1=\int_{C_1}(Fdx+Gdy)\ , \qquad I_2=\int_{C_2}(Fdx+Gdy)$$



(2) $F=\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G=\dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x,y)$ が存在するように定数 a を定めよ．また，そのときの $U(x,y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_C (Fdx + Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ.

(4) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2+y^2=1)$ でのその極値を考える.

(a) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ.

(b) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx+Gdy=0$ となる点において $U(x,y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ.

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x, y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ.

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.283 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i=\sqrt{-1}$ である.

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x-z_1} - \frac{1}{x-z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A，z_1，z_2 は複素数の定数である.

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする.

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ.

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ.

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ.

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ.

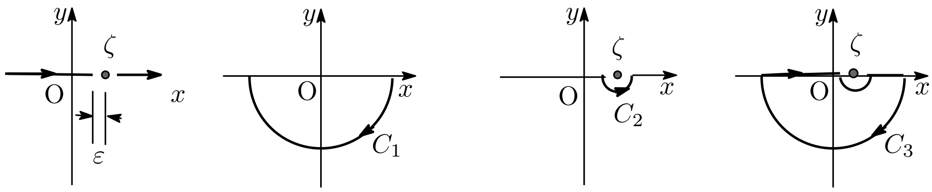


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す.

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.284 $f(z)$ が $z=a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(a+e^{i\theta})d\theta\ ,\qquad n=1,2,\cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.285 t を実変数とし，複素数平面上において $z=-1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,dz$$

(京都大 2008)　　(m20083307)

0.286 複素数平面から実軸の $|x|\leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z\in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dt}{z-t}$ ，　$z\in D$（t は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z|>1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z\in D$ と実軸上の区間 $[-1,1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h|\leq d/2$ なら，$|z+h-t|\geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z|>1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.287 (1) 複素数 z が以下の式で表されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする.

$$z=\left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$$

(a) z を極形式で表せ.

(b) z^n が実数となる最小の正の整数 n と, そのときの z^n を求めよ.

(c) $\sqrt[3]{z}$ を求めよ.

(2) 次の関数 $f(z)$ の極を求め, それらの点における留数を求めよ.

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4-z^2}$$

(京都大 2010)　　(m20103305)

0.288 D を複素平面上の単連結な開集合とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で正則であり, D 上で零点を有しないとする. D 上の一点 z_0 において $\arg f(z_0)$ を定めることにより, 関数 $u(x,y)=\arg f(z)$ を D 上の連続関数として定めることができる. ここに, x, y は, それぞれ z の実部, 虚部である. このとき, $u(x,y)$ は D において調和関数であることを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103306)

0.289 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r>0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r)=\int_{C(r)}\frac{\overline{z}+1}{z+1}\,dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき，以下の問に答えよ.

(1) $0<r<1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r>1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 2010)　　(m20103307)

0.290 複素関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0 < |z| < a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n\ , \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)\ , \qquad c_m \neq 0\ , \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\, dz$$

(京都大 2010) (m20103308)

0.291 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 $4-1$ に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする.

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 $4-1$，$4-2$）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする.

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1 = d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ.

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ.

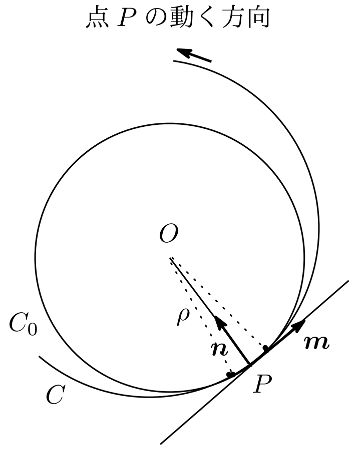


図 $4-1$

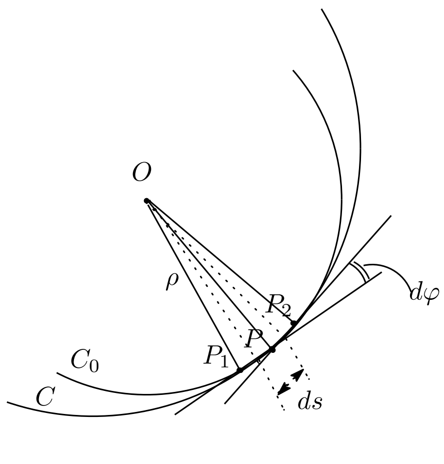


図 $4-2$

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が,

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$ （b，c は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ.

(京都大 2013) (m20133304)

0.292 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083405)

0.293 インパルス応答が

$$h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

であたえられる線形時不変な離散時間システムに対して，

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \leq -1 \text{ または } n \geq 2) \end{cases}$$

となる離散時間信号 $u(n)$ を入力したときの出力を $y(n)$ とする．ただし，n は離散時刻を表す整数とする．このとき，$n = 1$ および $n = 3$ におけるシステムの出力 $y(1)$ と $y(3)$ の値を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083406)

0.294 ２つの３次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ に対して，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は次のように定義される．

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ１，互いに垂直）を，また，$|\ \ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2) 外積について $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) ３つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ．（・は，内積を表す.）

(大阪大 1996）　　(m19963501)

0.295 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a|<1$ なる実数 a に対して

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0)\ , \quad k=0,1,2,\cdots$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 1996) (m19963502)

0.296 C は複素数平面上の円 $|z-i|=1$ を表すとするとき，次の複素積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i}dz+\int_C \frac{1}{z+i}dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-i)^2}dz+\int_C \frac{i}{(z-i)(z+2i)}dz.$

(大阪大 2001) (m20013508)

0.297 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2}dx$ を計算せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ.

(大阪大 2002) (m20023505)

0.298 (1) 関数 $f(x)=x^2\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$$

とフーリェ級数展開したとき，$a_n(n\geqq 0)$, $b_n(n\geqq 1)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を示せ.

(大阪大 2002) (m20023506)

0.299 関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ （$z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$, x と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z=z_0=x_0+iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005) (m20053509)

0.300 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(P_N(x) - f(x)\right)^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.301 複素平面上の点 a を内部に含む領域で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ が与えられ，$f(a) \neq 0$ とする.

(1) a が $g(z)$ の 1 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値とそれぞれの導関数の a における値を用いて表しなさい.

(2) a が $g(z)$ の 2 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値と，それぞれの 3 階までの導関数の a における値を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とするとき，$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}dz$ の値を求めなさい。

(大阪大 2006)　　(m20063509)

0.302 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている.

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$\displaystyle a_k := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt,\quad k = 1, 2, \cdots.$

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を示しなさい．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$ であることを示しなさい.

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ が成立したとすると，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt\right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.303 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ.　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$

(大阪大 2007)　　(m20073510)

0.304 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $\displaystyle f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき，a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007)　　(m20073511)

0.305 次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e = 2.718\cdots$ である.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta} d\theta$$

(大阪大 2008)　　(m20083505)

0.306 $|a| < 1$ とする．以下の式を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$

ただし $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ.

(2) $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008)　　(m20083506)

0.307 a, b, c, d, e, f, g, h はすべて実数で $d \neq 0$ とする．このとき，複素数 z についての方程式

$$\frac{a^2}{z-e} + \frac{b^2}{z-f} + \frac{c^2}{z-g} = d^2 z + h \qquad (*)$$

を考える．次の問いに答えよ.

(1) z を一つの複素数解とするとき，その共役複素数 $\bar{z}$ がみたす方程式を求めよ.

(2) 上の方程式 $(*)$ の解はすべて実数であることを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093502)

0.308 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1 \cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.309 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.310　次の問いに答えよ. ただし, z, ω は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1)　$|5z-i| = |3z-7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2)　z に対し,

$$w = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z - 1}{2z + 2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2010)　　(m20103504)

0.311　関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1)　任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2)　$u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3)　任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\,dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.312　n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 f, g を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1)　$p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\,ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103510)

0.313 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b>0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}e^{-\frac{t^2}{2b}}\,dt=e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1\leqq\ j,k\leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_jx_ke^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det B}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n=\mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010) (m20103511)

0.314 複素数 z に関する方程式

$$z^4+(1-a^2)|z|^4-a^2\overline{z}^4=0\quad(*)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$|z|$ は z の絶対値，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．また，a は ±1 以外の実数とする．

(1) 恒等式 $|z|^2=z\overline{z}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $(*)$ の解を $z=x+iy$（ i は虚数単位，x,y は実数 ）と表すとき，x と y が満たす関係式を求めよ.

(3) 方程式 $(*)$ の $z=0$ 以外の解のうち，任意の 2 つの解を z_1，z_2 とするとき，$\arg(z_2)-\arg(z_1)$ が取りうる値を $-\pi\leq\arg(z_2)-\arg(z_1)<\pi$ の範囲ですべて求めよ．ただし，$\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ はそれぞれ z_1，z_2 の偏角を表す.

(4) $\dfrac{z_2}{z_1}$ は実数または純虚数となることを示せ.

(大阪大 2011) (m20113503)

0.315 次の複素積分を考える.

$$I=\int_C\frac{e^z}{(z-a)(z-b)^2}\,dz$$

ただし，積分路 C は単位円 $\{|z|=1\}$（反時計まわり）を表し，複素数 a,b は C 上にないものとする.
以下の場合について I の値を求めよ.

(1) $a \neq b$ のとき.

(2) $a = b$ のとき.

(大阪大 2011)　　(m20113509)

0.316 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx\,dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\ .\quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p_n(mx)dx = a_0\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n\to+\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)dx\cdot\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.317 以下の問に答えよ．ただし，u, v, w は複素数である.

(1) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす u が描く図形を複素平面上に図示せよ.

(2) 方程式 $|u| = 2$ を満たす複素数 u を

$$v = u + \frac{1}{4u}$$

により変数変換する．このとき，複素数 v が描く図形を複素平面上に図示せよ.

(3) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす複素数 u を

$$w = i\left(\frac{4u^2 - 16u + 17}{4u - 8}\right)$$

により変数変換する．ただし，i は虚数単位とする．このとき，複素数 w が描く図形を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2012)　　(m20123503)

0.318 C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z| = 4\}$, D は $\{z\,;\,|z| < 4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

(大阪大 2012)　　(m20123509)

0.319 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x)\right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n = 0, 1, 2, \cdots),\ b_n,\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123510)

0.320 (1) 2 つの複素数 a_1 と a_2 について，各々の和，積がいずれも実数であるとき，a_1 と a_2 が満たすべき条件をすべて示せ.

(2) 複素数 b について，$b + \dfrac{2}{b}$ の値が有限の実数であるとき，b が複素平面上で描く図形を示せ.

(3) 2 つの複素数 c_1 と c_2 について，各々の和，積がいずれも純虚数であり，かつ $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right| = k$ であるとき，$\dfrac{c_1}{c_2}$ を k を用いて表せ，ただし $k \neq 0$ とする.

(大阪大 2013) (m20133504)

0.321 (1) 以下を示せ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2+1} e^{iz} dz = \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2-1} e^{iz} dz = 0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta} \,\big|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする.

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ.

(大阪大 2013) (m20133506)

0.322 自然数 m, k に対して,

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \, \cos kx \, dx, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく.

(1) 任意の自然数 m, k に対して，以下の等式を示せ．

$$A_{m,k} = \frac{1}{1+\frac{k}{m}} A_{m-1,k-1}$$

ただし，$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい．

(2) 自然数 m が与えられたとき，$\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し，フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ．

ただし，$\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.323 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha| < R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z-\alpha} dz$$

を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z) = h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z) &= h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z) + h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad + \cdots + h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z) = 0$ の n 個の複素数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ とし，R は $|\alpha_j| < R$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$$

を $b_{n-2},\ b_{n-1}$ を用いて表せ．

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.324 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

条件 1 ： $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big| f_k(x) \Big| < \infty, \qquad x \in I$

条件 2 ： $\displaystyle\max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014) (m20143506)

0.325 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\ \cos v\, \boldsymbol{i} + \sin u\ \cos v\, \boldsymbol{j} + \sin v\, \boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r, \ \ 0 \leqq u \leqq 2\pi, \ \ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015) (m20153503)

0.326 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a\ \cos t + i\, b\ \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015) (m20153504)

0.327 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分 $\quad I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} \quad$ の値を求めよ．

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z-\alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ．

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.328 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ．

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{1}{y+n\pi} + \frac{1}{y-n\pi}\right\}$$

が成立することを示せ．

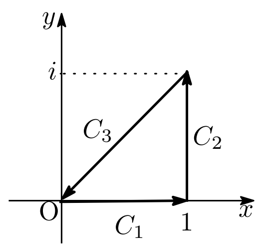
(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.329 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ を $x + iy$ の形で表せ．

(2) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$ は正則であることを示し，
導関数 $f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ も正則であることを示せ．

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1, C_2, C_3 に沿って，
問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，
$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．
また，積分経路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ に沿って
$f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



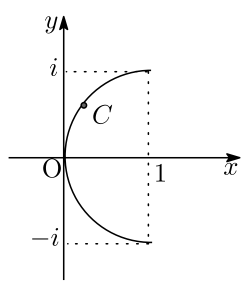
(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.330 複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{e^{2\pi z} - 1}{z - i}$

(2) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1| < \sqrt{2}$ は，
w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z = 1$ を中心とする単位円の左半分に沿った
$z = 1 - i$ から $z = 1 + i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，
$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3}dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

0.331 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ.

(2) 曲線 C を放物線 $y=x^2-1$ の $z=-1$ から $z=1$ に向かう曲線とする. このとき, 複素関数 $f(z)=\overline{z}+z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）.

(3) 複素数 $g(z)=\dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において, 中心が $z=0$ のべき級数展開を求めよ. ただし, $|z|<3$ とし, この範囲で収束するものをすべて求めること. なお, 以下の幾何級数を用いてもよい.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z|<1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

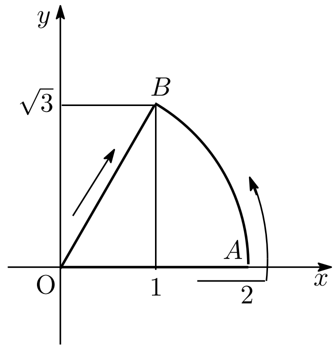
0.332 複素数 $z=x+iy$ に対して, $f(z)=\overline{z}$ で表される関数を考える. ただし, $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位であり, $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す. 以下の問に答えよ.

(1) $f(z)$ は複素平面の全域で正則であるか, 調べよ.

(2) 右下の複素平面図を参考にして, 以下の二種類の経路で, $f(z)$ を原点 O から点 B まで積分せよ. ただし, 図中において, AB は原点を中心とする半径 2 の円弧である.

(a) 原点 O から線分 OA, 円弧 AB に沿って点 B に至る経路

(b) 原点 O から線分 OB に沿って点 B に至る経路



(大阪大 2019)　　(m20193501)

0.333 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して, 複素変数 z の関数 f を

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \qquad (z=x+iy)$$

で定める. $f(0)=0$ かつ

$$v(x,y)=ye^x\cos y+(x+1)e^x\sin y$$

であるとき, f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ.

(2) $0<a<1$ とする. 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ の値を求めよ.

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.334 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる, 周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ. すなわち, $f(x)$ が連続な点で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

をそれぞれ求めよ.

(1-1) $f(x)=\cos^2 x+\cos x$

(1-2) $f(x)=x \quad (-\pi<x\leqq\pi)\,, \quad f(x+2\pi)=f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.335 (1) 次の微分方程式を解け．ただし，$x=0$ において $y(0)=0$ とする．

$$\frac{dy(x)}{dx}-2y(x)-2e^x\sqrt{y(x)}=0$$

(2) ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t=0$ において $x(0)=-1$ とする．

$$\frac{x(t)}{dt}+2x(t)-3\int_0^t x(\tau)d\tau=t$$

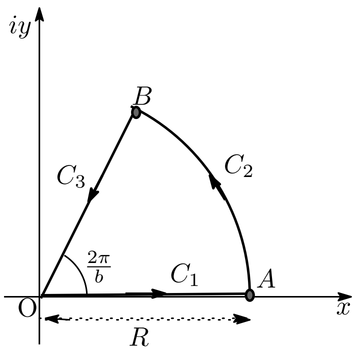
(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.336 積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^b+1}dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R>1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z=x+iy$ について以下の問に答えよ.
ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) $I_3=\displaystyle\int_{C_3}\frac{1}{z^b+1}dz$ を，$I_1=\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z^b+1}dz$ を用いて表せ.

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z)=\dfrac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ.

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{1}{z^b+1}dz=0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ.

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.337 xyz 座標系における 3 つのベクトルを $\boldsymbol{A}=\big(A_x,\ A_y,\ A_z\big)$，$\boldsymbol{B}=\big(B_x,\ B_y,\ B_z\big)$，$\boldsymbol{C}=\big(C_x,\ C_y,\ C_z\big)$ とする.

(1) $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x,y,z 成分をそれぞれ $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x$, $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y$, $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z$ とする．これらと A_y，および A_z の中から必要なものを用いて，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x 成分 $[A\times(B\times C)]_x$ を表せ.

(2) $[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x$ をベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ および B_x, C_x を用いて表せ.

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ が成り立つことを示せ.

(大阪大 2021)　　(m20213501)

0.338 原点を中心とした半径 r $(r\neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて,

$$\boldsymbol{r}\big(=\boldsymbol{r}(u,\ v)\big)=r\ \boldsymbol{i}_r=r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x+r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y+r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$
$$(0\leqq u\leqq 2\pi,\ -\pi/2\leqq v\leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである.

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分,

$$\iint_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする.

(大阪大 2021) (m20213502)

0.339 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える.

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(3z^2 - 10z + 3)(2z^2 + 5z + 2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ.

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち，$|z| < 1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ.

(3) $|z| = 1$ のとき，実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z = e^{i\theta}$ とおける．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．このとき，$\cos\theta$ を z を用いて表せ.

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより，その値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta + 1}{(5 - 3\cos\theta)(5 + 4\cos\theta)}\, d\theta$$

(大阪大 2021) (m20213504)

0.340 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) 方程式 $e^{iz} = 1 - i$ を満たす複素数 z をすべて求め，$a + bi$（a, b は実数）の形で表せ.

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ が $z \neq 1$ において正則であることを示せ.

$$f(z) = \frac{1}{z - 1}$$

(3) 以下の複素関数 $g(z)$ の $z = 0$ のまわりでのローラン展開を求めよ．ただし，$1 < |z| < 2$ とする.

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

(大阪大 2022) (m20223503)

0.341 (1) 次の値をそれぞれ $re^{i\theta}$ の形で表せ.

(a) $\dfrac{5 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + i3}$　　(b) $\sqrt[3]{1 - i}$

(2) 次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

(大阪府立大 2003) (m20033603)

0.342 (1) $z = (1 + i)^n - (1 - i)^n$ とするとき, $|z|$ を求めよ. ただし, i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, n は自然数とする.

(2) i を虚数単位 $(i^2 = -1)$, $z_m = e^{-imx}$ とするとき　$\left|\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} z_m\right|^2 = \dfrac{\sin^2 \dfrac{nx}{2}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$　となることを示せ.

ただし, m, n は整数, x は実数である.

(大阪府立大 2005) (m20053603)

0.343 (1) -1 の 5 乗根を求めよ.

(2) 次の積分を留数を用いて求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)(x^2+4)}$

(大阪府立大 2006) (m20063603)

0.344 (1) z を複素数とするとき，$e^z=3i$ を満たす z を求めよ．ただし，i は虚数単位である.

(2) $a>0$ の時，以下の積分値を留数解析を用いて求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx$

(大阪府立大 2007) (m20073601)

0.345 (1) $8i$ の 3 乗根をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である.

(2) 複素積分を用いて，次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

(大阪府立大 2008) (m20083603)

0.346 次の条件を満たす点 $z=x+iy$ の存在範囲を図示せよ.

$\boldsymbol{Re}\left(z^2\right)<1$

(大阪府立大 2010) (m20103608)

0.347 留数解析を用いて, 次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{1+x^6}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

(大阪府立大 2010) (m20103609)

0.348 (1) $\omega=\exp z$ により，z 平面の直線 $x=A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a|\neq 1$ とする.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\,\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

(大阪府立大 2011) (m20113609)

0.349 つぎの各問いに答えよ.

(1) 3 変数の関数 $f(x,y,z)=2x^2z-y^2z^2+3x^2y+4xy$ を考える．このとき，Δf を求めよ．ただし，Δ はラプラス作要素

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とする.

(2) $g(x,y,z)=x^2-axy^2+bz^2+2xz^2$ とする．$\Delta g=0$ であるような，a,b の値を求めよ.

(大阪府立大 2013) (m20133606)

0.350 以下の問いに答えよ.

(1) $z=x+iy$ とするとき，実部が $u(x,y)=x^2-y^2$ で与えられる正則関数 $f(z)$ の虚部を求めよ．また，$f(z)$ を z の関数として表せ.

(2) 次の定積分値を求めよ.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos\theta+5}d\theta$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133609)

0.351 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ．また，それを複素平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である．　$z^3 = -2 + 2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ．　$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$

(大阪府立大 2016)　　(m20163601)

0.352 (1) z を複素数とする．複素平面上において，原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき，

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

を計算せよ．

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4 - \sin\theta} d\theta$$

(大阪府立大 2017)　　(m20173603)

0.353 (1) z 平面上に領域 $0 < y < 2$ が $w = 1/z$ により写像される w 平面上の領域を示せ．

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 16} dx$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183603)

0.354 留数を用いて，次の定積分の値を求めよ．　$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin\theta} d\theta$

(大阪府立大 2019)　　(m20193603)

0.355 周期 2π の関数 $f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193604)

0.356 (1) 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．　$\frac{s}{(s^2+3)^2}$

(2) 次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分路 C は $|z + i| = 3$ で表される円周上を反時計回りに回るものとする．　$\int_C \frac{z^2 - 4z}{(z+1)^2(z^2+9)} dz$

(大阪府立大 2020)　　(m20203603)

0.357 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ とするとき，$\Delta(x^2 + y^2 + z^2)^s$ を求めよ．但し，s は実数とする．

(神戸大 2002)　　(m20023806)

0.358 飛行している物体の時刻 t での位置座標 (x, y, z) が次式で与えられる．

$x = a\sin t$

$y = a\cos t$

$z = bt$

ただし，a, b は定数である. 次の問いに答えなさい.

(1) この物体の速度の大きさを求めなさい.

(2) この物体が $1 \leq t \leq 3$ の間に飛行した軌跡の長さを求めなさい.

（鳥取大 2004）　　(m20043905)

0.359 位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ および $\vec{\boldsymbol{k}}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを，O は原点を表す．

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073913)

0.360 次を求めよ．ただし，$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$ である．

(1) $\nabla(x^2 + y + z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$）

(3) $\nabla \times\ (x^2 i + xy^2 j)$

(鳥取大 2009)　　(m20093906)

0.361 直交座標系に関して，3 つのベクトルを $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (k, 4, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 3)$ とする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ の長さ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交するとき，k の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093907)

0.362 関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ．

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s > 1$ に対して
$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ．

(鳥取大 2010)　　(m20103906)

0.363 3 次元ベクトル $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ に関する次の公式を証明せよ．

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \overrightarrow{C} = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{A}$$

ここで $\times$は外積，$\cdot$ は内積である．

(広島大 2005)　　(m20054107)

0.364 微分可能なスカラー関数 $\varphi(x, y, z)$ と微分可能なベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ について，次式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\nabla \times\ \{\nabla\varphi(x, y, z)\} = 0$

(2) $\nabla \cdot \left\{\nabla \times \overrightarrow{A}(x, y, z)\right\} = 0$

(広島大 2008)　　(m20084106)

0.365 $x = \dfrac{1+i}{3}$（i は虚数単位）のとき，x^8 の値を求めよ．

(広島大 2012) (m20124108)

0.366 $\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ， $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき，以下の経路に沿って

$\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を求めよ． $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする．

(1) $(0,0,0) \to (X,0,0) \to (X,Y,0) \to (X,Y,Z)$ ．

(2) $(0,0,0)$ と (X,Y,Z) を直線上で結ぶ線分 ．

(広島大 2013) (m20134104)

0.367 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(広島大 2014) (m20144101)

0.368 $\nabla \times (r\,\boldsymbol{r})$ の値を計算せよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．与式において，右側の $\boldsymbol{r}$ は任意の点の位置ベクトルで，左側の r は $r = |\boldsymbol{r}|$ なるスカラーである．

(広島大 2016) (m20164107)

0.369 ベクトル $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ， $r = |\vec{r}| \neq 0$ であるとき，次の式を求めよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．それぞれの途中の計算式も明記すること．

(1) $\mathrm{grad}\, r$ (2) $\mathrm{div}\, \frac{\vec{r}}{r^n}$

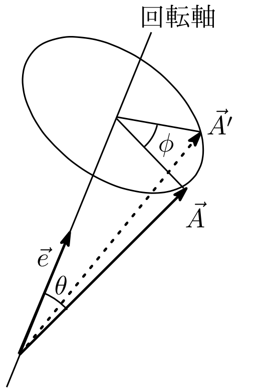
(広島大 2021) (m20214106)

0.370 $f(x) = x$ $(-\pi \leqq x < \pi)$，$f(x+2\pi) = f(x)$ の Fourier 級数を求めなさい．

(山口大 2003) (m20034312)

0.371 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 ϕ（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e} \times \vec{A}$ の関係を説明しなさい．

（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい．）



(山口大 2006) (m20064307)

0.372 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx$ （ n : 整数）をそれぞれ求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx$ （n, m : 正整数）をそれぞれ求めなさい．

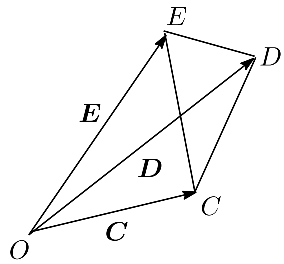
(3) 周期 2π をもち，$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & (-\pi < x < 0 \text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0 < x < \pi \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.373 ベクトルに関する以下の問いに答えなさい．

(1) x, y, z の成分で表した 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (4,5,6)$ と $\boldsymbol{B} = (1,2,3)$ について，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_{\perp}$ に分解する．$\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{A}_{\perp}$ それぞれの x, y, z 成分を求めなさい．

(2) 右図のように原点を O にとり，三角形 CDE の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ とする．ただし，$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ は同一平面上にはない．



(a) 三角形 CDE を通る無限に広い平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ を用いて表しなさい．ただし，必要な変数は自分で定義しなさい．

(b) 三角形 CDE の面積 S が
$$S = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{C}\right|$$
と表せることを示しなさい．

(山口大 2008)　　(m20084302)

0.374 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ が
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$
を満たすとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，$g(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\big((x,y) \neq (0,0)\big)$ のとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$ のとき，(f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x, y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ．

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき
$$p(x,y) = h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$
$$q(x,y) = k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$
とおくと，(p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

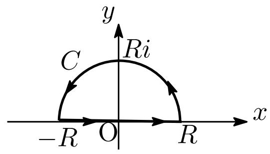
(高知大 2015)　　(m20154502)

0.375 次の各問に答えよ．

(1) 次の問に答えよ．

(a) $z^4 + \alpha^2 = 0$ を満たす複素数 z を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ の値を求めよ．ただし，C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R>1$ とする．



(2) $u(x,y)=x^2+\alpha xy+\beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x,y)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位であり，$z=x+yi$，また，α,β は定数とする．

(九州大 1998) (m19984710)

0.376 次の各問いに答えよ．

(1) $f(z)$ は単位円 $|z|\leqq 1$ で正則で，円周 $|z|=1$ 上で $|f(z)|\leqq M$ を満たす． コーシーの積分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-a}dz, \qquad (|a|<1)$$

を用いて，$|f(0)|\leqq M$ を示せ．

(2) $g(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ は円周 $|z|=1$ 上で $|g(z)|=1$ を満たすことを示せ．

(3) この $g(z)$ との合成関数を用いることにより，上の (1) の条件を満たす関数 $f(z)$ は単位円内のすべての点で $|f(z)|\leqq M$ を満たすことを示せ．

(九州大 1999) (m19994707)

0.377 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z-a|=r$ (r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^n}$$

を $n=1, n=2, n=3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2-4z}{(z-1)^3}dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z-1|=2$ とする．

(九州大 2000) (m20004703)

0.378 次の積分の値を求めたい．

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta, \quad 0<p<1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta}=ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p)=\int_C F(z)dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001) (m20014708)

0.379 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.380 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz \quad (0<a<1)$ について次の問に答えよ.

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R+i2\pi, -R+i2\pi \quad (R>0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \quad (0<a<1)$ を計算せよ.

(九州大 2003)　　(m20034708)

0.381 $f = x^2+y^2+\dfrac{1}{4}z^2-1$ とする. 座標系の原点を O，x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f=0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を，z_0 を用いて表せ.

(3) $x=\sin\theta\cos\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=2\cos\theta$ とおく．ただし，$0\le\theta\le\pi$，$0\le\varphi\le 2\pi$ である. 曲面 $f=0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0\le\theta\le\theta_0$，$0\le\varphi\le 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0\le\theta_0\le\pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.382 複素平面上の中心 a，半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le\pi\}$ で定める. ただし, $i=\sqrt{-1}$ である.

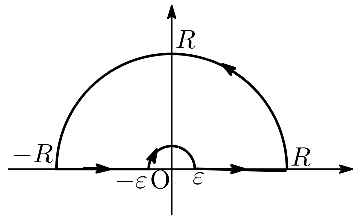
(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a+\varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta \left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$



(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の値を計算せよ.

（九州大 2004）　　(m20044708)

0.383 関数 $f(x,y,z)$ を $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z$ とし, $u = (u_1, u_2, u_3)$ を方向ベクトル（単位ベクトル）とする．次の問に答えよ．

(1) 原点における f の u 方向の方向微分を u_1, u_2, u_3 を用いて表せ．

(2) 原点の於いて関数 $f(x,y,z)$ がもっとも急速に増加する方向と, もっとも急速に減少する方向をそれぞれ求めよ．

（九州大 2004）　　(m20044709)

0.384 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ．ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする．

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ．

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) $z = e^{i\theta}$（θ : 実数, i : 虚数単位）のとき，　$\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ．

(4) 積分路 C のパラメータ表示　C : $z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$　を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a, b, c : \text{ 定数})$$

a, b, c を求めよ．

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.385 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ．

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0| \neq a$) に対して，(a)　$|z_0| > a$ の場合　および　(b)　$|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z - b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$　（b は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064703)

0.386 (1) ２つの任意の自然数 m, n について，次をそれぞれ示せ．

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 \ ; \ m \neq n \\ \pi \ ; \ m = n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 \ ; \ m \neq n \\ \pi \ ; \ m = n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos pxdx$　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin pxdx$　($p = 1, 2, \cdots$)

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = |x|$; $-\pi < x \leq \pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　をそれぞれ計算せよ．

(九州大 2006)　　(m20064704)

0.387 積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である．

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ．

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ．

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け．

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ となることを示せ．

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.388 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$，奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき，以下の問いに答えよ．

$$e^{iz} = f(z) + i \cdot g(z)$$

なお，i は虚数単位であり，e は自然対数の底である．

(1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて，e^{-iz} を表せ．
ヒント：題意より，$f(z) = f(-z)$，$g(z) = -g(-z)$ が成立する．

(2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて，$f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ．

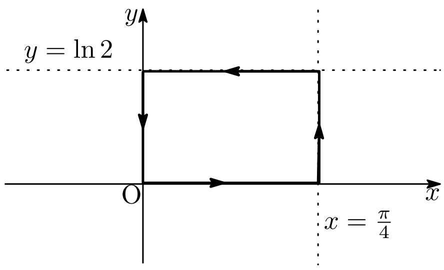
(3) $g(x + iy) = u + iv$ と表すとき，以下の関係式が成立することを示せ．

$$u = \sin x \cdot \cosh y$$
$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし，x, y, u, v は実数であり，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(4) $g(x + iy) = i$ を満たす $x + iy$ を全て求めよ．

(5) $g(x + iy) = u + iv$ とし，点 (x, y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って，原点 O を出発して反時計回りに一周したとき，uv 平面上の点 (u, v) はどのような軌跡を描くか．その軌跡の概略図を示せ．
ヒント：任意の実数 x, y で，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$，$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ が成立する．



(九州大 2008)　　(m20084707)

0.389 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である．

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ．

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\, dy = f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.390 $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$,　$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$,　$b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$,

$g(x) = \dfrac{1}{2} a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする.

(1) フーリエ係数 a_n , b_n を計算せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ.

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.

(4) $x = \pm \pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.391 (1) n が整数であるとき，複素数 $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ.

(3) (i) 式を用い，複素数 $1 - i$ の三乗根をすべて求めよ.

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N = 4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ.

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.392 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \quad , \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.393　(1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める. 以下の問いに答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \cdots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n$ が成立することを示せ.

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi) = \begin{cases} \cos nx & (n\text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$ が成立する.

このことを踏まえ, 関数 $g(x) = f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx$,

$b'_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx$ を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.394　(1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leqq x < \pi), \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき, $\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ. また, $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ. また, これを用いて $F(s) = \log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.395　(1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し, そのフーリエ係数を求める式を示せ.

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t>0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s)=\dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\mathfrak{L}[1]=\frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.396 直交座標系の x,y,z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする．閉曲線 $C:\boldsymbol{r}=2\cos\theta\boldsymbol{i}+2\sin\theta\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ．

(2) スカラー場 $\varphi=\dfrac{1}{4}x^2y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ．

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}=-\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i}+\frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j}+(x^2z-y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\triangledown\varphi)\times\ \boldsymbol{A}+\varphi(\triangledown\times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.397 (1) $f(x)=\begin{cases}1\,, & (0\leq x\leq 1)\\ 0\,, & (\text{上記以外})\end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x)=x$ ，$(-\pi\leq x\leq\pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.398 z を複素数とし，$a>2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)

$$\int_C\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-az+1)}dz$$

を求めよ．ただし，C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする．

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta}d\theta$$

を求めよ.

(九州大 2018)　　(m20184704)

0.399 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y^3z/3)\boldsymbol{k}$ と，xy 平面，yz 平面，zx 平面で切り取られた平面 $2x+2y+z=2$ が作る三角形領域 S について，以下の各問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S に対する面積分を求めよ.

(3) S を囲む閉曲線 C に対して，C を構成する三つの各線分の位置ベクトルをそれぞれ x と y で表せ.

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う線積分を，三つの各線分に沿う線積分を計算して求めよ．ただし，線積分の方向は原点から見て時計回りの方向とする.

(九州大 2019)　　(m20194704)

0.400 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする.

ベクトル場

$$A = \bigtriangledown(e^{xy} - yz^2) + \bigtriangledown \times (z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + \sin(2x-y)\boldsymbol{k}\ )$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $\bigtriangledown A$ を求めよ.　　(2) $\bigtriangledown \times A$ を求めよ.

(3) $\bigtriangledown A = 0$ かつ $\bigtriangledown \times A = 0$ を満たす点を求めよ.

(九州大 2020)　　(m20204707)

0.401 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする.

ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x,y,z) = (0,0,0)$ において $\phi = 0$ とする.

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214703)

0.402 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ.

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021) (m20214704)

0.403 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える. 空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする. また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする. 4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ. ただし, λ_j $(j = 1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ を満たす実数とする.

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi} = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2$$

で定める. 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を, a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

(3) 関数 $f = f(x,y,z)$ を $f(x,y,z) = e^{x+y+z} \sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z) + x^2 \sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める. このとき, 積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ. ただし, ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分, $\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである.

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする. このとき, 積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ. ただし, S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形, $\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である.

(九州大 2022) (m20224702)

0.404 極座標 (r, θ, ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め, これらの結果を用いて, 半径 a の球の面積 S, および体積 V を計算しなさい.

(佐賀大 2003) (m20034933)

0.405 次の等式を証明せよ. 但し, $A(x) = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))$ は 3 次元空間のベクトル場である.

(1) $\nabla \cdot (\nabla \times A(x)) = 0$ (2) $\nabla \times (\nabla \times A(x)) = \nabla(\nabla \cdot A(x)) - \nabla^2 A(x)$

(佐賀大 2005) (m20054908)

0.406 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し, x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x)=x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を $\quad f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\,]$ と書くとき，$a_0,\ a_n,\ b_n$ を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074906)

0.407 3 次元空間のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)=(A_x(x,y,z),\ A_y(x,y,z),\ A_z(x,y,z))$ について次の等式を証明せよ．

$$\boldsymbol{A}(x)\times\ (\nabla\times\ \boldsymbol{A}(x))=\frac{1}{2}\nabla\left(\boldsymbol{A}(x)^2\right)-(\boldsymbol{A}(x)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}(x)$$

(佐賀大 2007)　　(m20074908)

0.408 N 次元複素数ベクトルと N 次元複素数正方行列 A を考える．今，A の行列要素 a_{kl} が

$$a_{kl}=e^{\frac{2\pi}{N}(k-1)(l-1)i}$$

で与えられるとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数を表す．

(1) $N=4$ のとき，行列 A を書き下せ．

(2) 4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

であるとき，$\boldsymbol{x}$ に前問の行列 A をかけて作られるベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ．また，

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

であることを示せ．ここで，(　,　) は複素数ベクトルの内積を表す．

(3) 行列 A の随伴行列（共役転置行列）を B とするとき，その行列要素 b_{kl} を書き下し，

$$A\cdot B=B\cdot A=NE$$

であることを示せ．ここで行列 E は N 次元単位行列である．

(4) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ のとき，

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

が成立することを示せ．ただし，$\boldsymbol{x}$ は任意の N 次元複素数ベクトルとする．

(佐賀大 2009)　　(m20094904)

0.409 方程式 $z^5=1$ を満足するすべての z について以下に問いに答えなさい．

(1) 与えられた方程式を満足する z のうち, $z=1$ を除いて偏角が最小のものを $z=\omega$ とする. このとき与えられた方程式のすべての解は $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ であることを示しなさい. ただし, 複素数 z の偏角 $\arg z$ は $0\leq\arg z\leq 2\pi$ の範囲で考えることにする.

(2) (1) で定義した ω は

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$$

を満足していることを示しなさい.

（長崎大 2004）　　(m20045013)

0.410 以下に設問に答えよ.

(1) 複素数 z を $z = x + iy$ とするとき, x と y を z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表わせ.

(2) 原点を中心とし, 半径 r の円を (x, y) 座標で表わせ.

(3) 原点を中心とし, 半径 r の円を, x と y をそれぞれ実部, 虚部とする複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表わせ.

（長崎大 2004） (m20045014)

0.411 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面内の円の方程式は一般に

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad ①$$

で表されることを示せ. ただし, A, B, C, D は実数である.

(2) 複素平面内の円の方程式は一般に

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \qquad ②$$

で表されることを示せ. ただし, $z = x + iy$, α , γ は実数, β は複素数である.

(長崎大 2005) (m20055006)

0.412 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

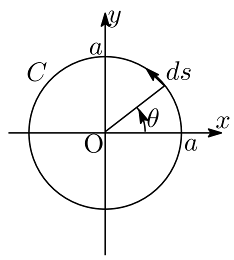
(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases}$ ただし T は正の実数 で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω , 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.413 ベクトル関数 f が $f = 4y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ で与えられるとき,
右に示す円 $C\Big(x^2 + y^2 = a^2\,,\ z = 0\Big)$ 上で次の線積分を行え.
ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ,
x , y , z 方向の単位ベクトルである.

$$I = \oint_C f \cdot ds$$



(長崎大 2005) (m20055008)

0.414 以下の問に答えよ.

(1) (x, y, z) 空間内の 3 点を $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ をこれらの座標で示せ.

(2) $f(r) = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とするとき, $f(r)$ の傾き $\nabla f(r)$ およびその発散 $\nabla \cdot \Big[\nabla f(r)\Big] = \nabla^2 f(r)$ を求めよ. 但し, $r \neq 0$ とする.

(長崎大 2005) (m20055014)

0.415 ベクトル $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ と $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ がある. ここで $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ x , y , z 方向の単位ベクトルである.

(1) 内積 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ を求めよ.

(2) 外積 $\vec{A} \times \vec{B}$ を求めよ.

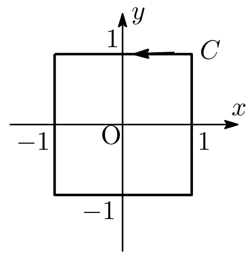
(長崎大 2005)　　(m20055017)

0.416　点 (x,y,z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とし，$r=|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x,y.z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(1)　$\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を計算せよ．

(2)　右図の閉曲線 $C(z=0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ．

$$\oint_C \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008)　　(m20085007)

0.417　ベクトル $\overrightarrow{A}=(2,3)$，$\overrightarrow{B}=(5,-2)$ の内積と外積を求めよ．

$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=$ ＿＿＿＿＿　　　$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=$ ＿＿＿＿＿

(長崎大 2008)　　(m20085014)

0.418　1 周期が次のような周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=t \qquad (-1\leqq t<1)$$

(大分大 2008)　　(m20085102)

0.419　次の関数 $f(x)$ の $[-\pi,\ \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-\pi\le x\le 0) \\ -1 & (0<x<\pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(大分大 2009)　　(m20095103)

0.420　$\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2011)　　(m20115102)

0.421　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (-\pi<t\leqq 0) \\ 1 & (0<t\leqq\pi) \end{cases}$$

(大分大 2011)　　(m20115103)

0.422　$\cos^2 t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2012)　　(m20125102)

0.423　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (-\pi\leqq t\leqq 0) \\ -1 & (0<t<\pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125103)

0.424　$f(t)=\sin\omega t$　($\omega\neq 0$ の実数) とするとき，$t\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2012)　　(m20125105)

0.425　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き，そのフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases} -\pi & (-\pi<t\leqq 0) \\ 2t-\pi & (0<t\leqq\pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125106)

0.426 次のように定義される周期関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

(大分大 2013) (m20135102)

0.427 周期関数 $f(x) = |x| \ (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x+2\pi) = f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる．

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ．

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013) (m20135104)

0.428 ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad x(0) = 1$$

(大分大 2013) (m20135105)

0.429 次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 次の複素数を計算せよ．

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

(2) 次の式を満足する A および θ の値を求めよ．ただし，$A > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

$$1 + \sqrt{3}\,i = Ae^{i\theta}$$

(宮崎大 2008) (m20085305)

0.430 次の各問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 複素数 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とせよ．

(2) 複素数 z についての方程式

$$e^{2z} + (1-\sqrt{3}i)e^z = 0$$

の解 z を求めよ．答えは，$z = x + iy$ の形で表せ．

(宮崎大 2009) (m20095302)

0.431 次の各問に答えよ. ただし, i を虚数単位とする.

(1) 複素数 $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ を極形式 $re^{i\theta}$ で表せ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(2) 複素数

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$$

を計算せよ. ただし, $x+iy$（$x,\ y$ は実数）という形で答えよ.

(宮崎大 2010) (m20105302)

0.432 次の各問に答えよ．ただし，答えは，$x+yi$ の形（x, y は実数，i は虚数単位）で表せ．

(1) $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3$ を計算せよ．

(2) 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めよ．

$$z^2+i=0$$

(宮崎大 2011) (m20115302)

0.433 複素数 $z_1=1+i$, $z_2=-1+\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．以下では，$z=re^{i\theta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を複素数 z の極形式という．

(1) z_1, z_2 を極形式で表せ．

(2) z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$ を極形式で表せ．

(宮崎大 2013) (m20135304)

0.434 方程式 $z+\dfrac{1}{z}=1$ を満たす複素数 z について，次の各問いに答えよ．ただし，答えは $x+yi$ の形（x, y は実数，i は虚数単位）で表せ．

(1) z をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた z に対して，z^6 を求めよ．

(宮崎大 2014) (m20145304)

0.435 複素数 $z=2+2\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z を複素平面上に図示せよ．

(2) 絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg z$ の値を，それぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする．

(3) z を極形式で表せ．

(宮崎大 2016) (m20165302)

0.436 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 絶対値 2，偏角 $\dfrac{5}{3}\pi$ の複素数を，$x+yi$ $(x,\ y$ は実数$)$ の形で表し，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^3=-i$ のすべての解を，$x+yi$ $(x,\ y$ は実数$)$ の形で求めよ．

(宮崎大 2017) (m20175301)

0.437 次の複素数を，極形式を用いて計算し，その答を $x+yi$ $(x, y$ は実数$)$ の形で表せ．ただし，n は整数とし，i は虚数単位とする．

(1) 1 の 3 乗根　　(2) $(1+\sqrt{3}i)^n$

(宮崎大 2018) (m20185302)

0.438 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1-\sqrt{3}i$ を，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^2=1-\sqrt{3}i$ のすべての解を，$x+yi$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．

(宮崎大 2019) (m20195301)

0.439 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $\sqrt{3}-i$ と $(\sqrt{3}-i)^{-1}$ を，複素平面上に図示せよ．

(2) $(\sqrt{3}-i)^{-6}$ を計算し，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205301)

0.440 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの虚数 $\alpha=1+2i$, $\beta=4-2i$ に対して，$\gamma=\dfrac{2\alpha\overline{\beta}}{2\alpha-3\beta}$ とする．γ を $x+yi$（x,y は実数）の形で表し，複素平面上に図示せよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^{-4}=16$ の解をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215304)

0.441 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 z についての方程式 $z^2=-i$ のすべての解を，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(2) 複素数 z は，等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとする．このとき，$z^8+\dfrac{1}{z^3}$ がとりうるすべての値を，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225304)

0.442 直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \right) \tag{1}$$

で定義される．以下の問に答えよ．

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ．

$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065403)

0.443 ベクトル $\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ と直交し, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$ とする. このとき, $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ.

(鹿児島大 2010)　　(m20105404)

0.444 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.445 $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ であるとき，$|z|$ および，$\arg z$ を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125429)

0.446 直交座標系 $O-xyz$ における次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\times\ \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，$\times$ は外積を表す．

(2) 次の関係を満たす 3 つのスカラー a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

$$a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2+c\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2013)　　(m20135405)

0.447 xyz 直交座標系の原点を O とする．この空間内に 2 点 $A(1,2,0)$，点 $P(a,b,0)$ がある．以下の問いに答えなさい．　ただし，点 P は 2 点 O, A を通る直線上にはないものとする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角度を θ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 2 点 A, P を通る直線の方程式を求めなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の外積を求めなさい．

(4) 三角形 OAP の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145413)

0.448 次の 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の内積と外積を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x 軸，y 軸，z 軸の基本単位ベクトルとする．

$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$　　　　$\boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

(鹿児島大 2016)　　(m20165415)

0.449 曲線 C : $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=\sqrt{3}\cdot t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい．
ただし，s は曲線の長さを表す．

$$\int_C (xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215420)

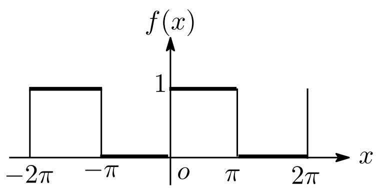
0.450 ベクトル場 $\boldsymbol{A}=x^2y^3\boldsymbol{i}+2xy^2z^4\boldsymbol{j}-y^3z^5\boldsymbol{k}$ について，

$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A})$

を求めなさい. ここで, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸 , y 軸 , z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055508)

0.451 右図のような周期が 2π の関数 $f(x)$ を
フーリエ級数展開しなさい.



(室蘭工業大 2005)　　(m20055510)

0.452 区間 2π で定義された関数 $f(t) = \pi - |t|$; $-\pi \le t \le \pi$ を $f(t+2\pi) = f(t)$ の関係によって周期関数に拡張した関数を考える．

(1) この関数の概形を $-2\pi \le t \le 2\pi$ の範囲で図に示せ．縦軸，横軸に適切な数値を入れること．

(2) この周期関数をフーリエ級数で表せ．

(室蘭工業大 2006) (m20065509)

0.453 次の複素数を実部と虚部に分け，$a + jb$（a, b は実数）の形で表せ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ である．

(1) $\dfrac{5(1-j2)}{(1+j2)(1+j3)(2+j)}$ (2) $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\dfrac{1}{2}\right)^8$

(室蘭工業大 2007) (m20075509)

0.454 ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\alpha xy - z^3)\boldsymbol{i} + (\alpha - 2)x^2\boldsymbol{j} + (1-\alpha)xz^2\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えなさい．なお，α は実数であり，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸，y 軸，z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである．

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が，$x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ においてベクトル $\boldsymbol{B} = 2\beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ と直交するとき，実数 β を α を用いて表しなさい．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$ の値が任意の場所で $\overrightarrow{0}$ となるときの，α の値を求めなさい．

(室蘭工業大 2008) (m20085507)

0.455 直交座標の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

とする. また, スカラー関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 2x + y + 3z$$

とする. このとき以下の問の答えよ. ただし, ∇ は次のベクトル演算子を表す.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = \nabla f$ で定義するとき, $\boldsymbol{n} = (n_x,\ x_y,\ n_z)$ の形で表せ.

(2) 関数 $f(x, y, z)$ をベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ.

(3) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ は平面を表す方程式である．この平面上にある 2 点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ の内積が $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2$ となることを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ と垂直になることを示せ.

(室蘭工業大 2010) (m20105503)

0.456 3 つのベクトル, $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, -1)$, $\boldsymbol{c} = (0, k, 1)$ （ただし k はある実数）について以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となる k の値を求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105507)

0.457 正の整数 N が 1 に較べて充分大きいとき，$N!$ は $(N \ln N - N)$ と近似できることを示せ．ただし，$\ln N = \log_e N$ である.

(室蘭工業大 2011) (m20115504)

0.458 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ についてのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\ \boldsymbol{C})$ は，ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ で形成される平行六面体の体積に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ はすべてが同一平面上にないものとする．

(室蘭工業大 2011) (m20115505)

0.459 3 つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積 V が

$$V = |\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})|$$

と表されることを示せ．

(室蘭工業大 2011) (m20115509)

0.460 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=(x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}|=1$) を求めよ．

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV = \iiint \bigtriangledown\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ．

(室蘭工業大 2016) (m20165508)

0.461 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

$\displaystyle\int xe^{-jx}dx$ 　　(j は虚数単位を表す)

(室蘭工業大 2016) (m20165511)

0.462 $\displaystyle\int_0^T e^{i\frac{2\pi mt}{T}}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\ dt$ を計算しなさい．

ただし，i は虚数単位，m と n は正の整数，T は正の実数とする．

(室蘭工業大 2017) (m20175504)

0.463 直交座標系において，スカラー関数 $f=yz^2$ とベクトル関数 $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=(-y,\ x,\ 1)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})$ を求めよ．

(3) 4 点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,-1,0)$, $S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って

$P\to Q\to R\to S\to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における微小線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2017) (m20175509)

0.464 ベクトル解析に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{r})=f(x,y,z)$ を任意のスカラー場として，$\nabla\times(\nabla f(\boldsymbol{r}))=0$ が成り立つことを示せ．

ここに，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとして，$\nabla\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である．

(2) $f(\boldsymbol{r})=|\boldsymbol{r}|$ のとき，$\nabla f(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．ただし，$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．

(室蘭工業大 2018) (m20185511)

0.465 直交座標系において，ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (2y, -2x, z)$ が与えられているとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) $\nabla(A \cdot A)$ $\quad (= \mathrm{grad}(A \cdot A)\,)$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (xyzA)$ $\quad (= \mathrm{div}(xyzA)\,)$ を求めよ．

(3) $\nabla \times A$ $\quad (= \mathrm{rot}A\,)$ を求めよ．

(4) 4 点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,-1,0)$, $S(1,-1,0)$ を頂点とする四角形の辺に沿って $P \to Q \to R \to S \to P$ の順に一周する線積分 $\displaystyle\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．

(室蘭工業大 2021) (m20215504)

0.466 直角座標系 (x, y, z) において，スカラー関数 $f = x^2 + y^2 + 2z$ が与えられているとき，
以下の問いに答えよ．ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

(1) ∇f $\big(= \mathrm{grad}(f)\big)$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot (\nabla f)$ $\big(= \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))\big)$ を求めよ．

(3) $\nabla \times (\nabla f)$ $\big(= \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))\big)$ を求めよ．

(4) 点 $A(1,0,0)$ から点 $B(0,1,0)$ に向かう経路 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．
ただし，$d\boldsymbol{r}$ は線積分における線素ベクトルを表す．また，経路 C は任意に設定してよい．

(室蘭工業大 2022) (m20225512)

0.467 (1) $\phi(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + xy - z$ について $\nabla\phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{A}_z) = (-y^3,\ x^3,\ 0)$ について，

$$\nabla \times\ \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す．

(島根大 2006) (m20065815)

0.468 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq\ x \leqq\ 0) \\ \ \ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007) (m20075814)

0.469 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ がある．以下の設問に答えよ．ただし．互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{a}$ が垂直となる m の値を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよ.

(4) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(5) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の正弦, すなわち $\sin\theta$ を求めよ.

(6) ベクトル $\boldsymbol{c}$, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると,

$$S^2 = (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})^2$$

となることを示せ. 次に, ベクトル $\boldsymbol{a}$, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2008)　　(m20085810)

0.470 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ に対し, $3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ との外積 $(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである.

(島根大 2010)　　(m20105804)

0.471 直交座標系 (x, y, z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -3, 0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を方向ベクトルとし, 点 $(3, 4, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) (3) で求めた直線と平面 $2x + 3y - 2z - 6 = 0$ の交点を求めよ.

(首都大 2007)　　(m20075901)

0.472 ある直交座標系 (x, y, z) における 3 次元の 2 つの実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を成分で表し, ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が直交するための必要十分条件を示せ.

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を成分で表せ.

(3) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ ともベクトル $\boldsymbol{b}$ とも直交することを証明せよ.

(首都大 2008)　　(m20085902)

0.473 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を求めなさい. ただし, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は内積, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は外積である.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（1 次従属）となるとき, k の値を求めなさい.

(3) 点 $(0, 0, 0)$ を通り, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2014)　　(m20145901)

0.474 ベクトル場 $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$ と曲線 C : $\overrightarrow{r} = (\cos^2 t)\overrightarrow{i} + (\sin^2 t)\overrightarrow{j}$ $\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(2) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ.

(3) (2) の結果を用いて, C に沿う線積分 $I = \displaystyle\int_C \overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ.

(首都大 2016)　　(m20165913)

0.475　複素数 $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$ に対し，共役複素数 $\overline{z}$, $\arg\dfrac{z}{\overline{z}}$ を求めよ．但し，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(工学院大 2003)　　(m20036207)

0.476　$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V} = (xy, yz, zx)$ に対して，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ をそれぞれ求めよ．ただし，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ は $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ は $\nabla\times\ \boldsymbol{V}$ とそれぞれ表現されることがある．

(はこだて未来大 2007)　　(m20076305)

0.477　(1)　周期 2π の周期関数 $f(x) = \pi^2 - x^2\ (-\pi \leqq\ x < \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

(2)　(1) の結果を利用して，$1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$ を示しなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076508)

0.478　次の極限値を求めなさい．ここで i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^3+1}{z+i}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}$

(和歌山大 2007)　　(m20076509)

0.479　複素平面上において，$z = \pm 1$ および $z = \pm i$ を内部に含み，正の向きに一周する単一閉曲線を C とする．このとき，次の積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin\pi z}{(z-1)^2}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4-1}dz$

(和歌山大 2007)　　(m20076510)

0.480　(1)　$f(t) = e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい．

(2)　$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ と $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}\,d\omega$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2009)　　(m20096504)

0.481　次の各問に答えなさい．なお，i は虚数単位である．

(1)　$\dfrac{5-i}{1+5i}$ を計算しなさい．

(2)　複素数 $\sqrt{3} - 3i$ を極形式で表しなさい．

(3)　$\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^4-1}$ を求めなさい．

(4)　複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z+i}{z^4-1}\,dz$ を求めなさい．

ただし，曲線 C は中心が $-1-i$，半径が $\sqrt{2}$ の円周（反時計回り）とする．

(和歌山大 2009)　　(m20096505)

0.482　周期 X の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ |x| \leqq\ d/2\ ) \\ 0 & (\ d/2 < |x| \leqq\ X/2) \end{cases}$$

について次の問いに答えなさい. ただし, $0 < d < X$ である.

(1)　$f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

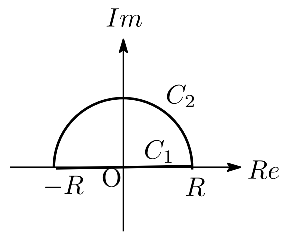
(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010) (m20106504)

0.483 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C = C_1 + C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ について, 次の問いに答えなさい.



(1) C_2 上で $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{R^2-1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106505)

0.484 複素関数 $w = e^{-z}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $w = u + iv,\ z = x + iy$ （ u, v, x, y は実数 ）とおくとき，u, v それぞれを x, y を用いて表しなさい.

(2) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(和歌山大 2011) (m20116501)

0.485 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 - 2z^2 + 4z - 8}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $f(z)$ の特異点をすべて複素平面上に図示しなさい.

(2) 円周 $|z + 1 + i| = 2$ に反時計回りの向きを与えたものを C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい.

(和歌山大 2011) (m20116502)

0.486 次の各問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int e^x \cos nx\,dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(2) $\displaystyle\int e^x \sin nx\,dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(3) 関数 $f(x) = e^x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big]$ したとき，係数 $a_n(n \geq 0)$，$b_n(n \geq 1)$ を求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126507)

0.487 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $\dfrac{3-i}{4+3i}$ の実部の値を求めなさい.

(2) 複素数 $-1 + i\sqrt{3}$ の偏角の値を求めなさい.

(3) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2 - \frac{1}{3}}{z^3 - z}$ について次の問いに答えなさい.

(a) $z^3 - z = 0$ の根を全て求めなさい.

(b) 円周 $\left| z - \dfrac{1}{2} \right| = 1$ に反時計回りの向きを与えた経路を C とする. 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126508)

0.488 関数 $f(t) = |t| \quad (-1 < t < 1)$ について, 次の各問いに答えなさい.

(1) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2013) (m20136506)

0.489 次の各問いに答えなさい. ただし, i は虚数単位とする.

(1) 次の複素関数について, 問いに答えなさい.

$$w = z^3$$

(a) $w = u + iv$, $z = x + iy \quad (u, v, x, y$ は実数$)$ とおくとき, u, v それぞれを x, y を用いて表せ.

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(2) 次の複素関数について複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$, $c : |z| = 1$ を求めなさい. ただし, 積分の向きは反時計回りとする.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 4z}$$

(和歌山大 2013) (m20136507)

0.490 ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$ に対して, 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(和歌山大 2014) (m20146501)

0.491 複素関数について, 次の各問いに答えなさい.

(1) 関数 $w = z + \dfrac{1}{z}$ に対して $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = u + iv$ とおくとき, u, v を r, θ で表しなさい.

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき, $\mathrm{Re} f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい.

(3) 積分路 $C : |z| = 2$ の向きは反時計回りとして, 次の積分値を求めなさい.

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)} dz$$

(和歌山大 2014) (m20146508)

0.492 次の関数のフーリエ変換を求めなさい.

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $f(t) = e^{-|t|}$

(3) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(和歌山大 2014) (m20146509)

0.493 (1) 複素数関数 $w = \dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい.

(a) $w = u + iv,\ z = x + iy$ とおくとき, u, v を x, y を用いて表しなさい. ただし, u, v, x, y は実数とする.

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい. ただし, 積分路 C は $|z| = 2$ とし, 向きは反時計回りとする.

(和歌山大 2015) (m20156506)

0.494 (1) 正数 L に対し $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ と置く. 整数 k に対し, 次式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{ik\omega t}dt = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

(2) (1) の条件のもと, 自然数 n に対し, $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t}$ とおく. このとき, 以下の式が成立することを示しなさい.

(a) $\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = 1$

(b) $\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{l}{2}} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

(c) $D_n(t + L) = D_n(t)$

(d) $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)}$

(和歌山大 2015) (m20156507)

0.495 次の各問いに答えなさい. ただし, i を虚数単位とする.

(1) $z = x + yi$(x, y は実数)とするとき, 複素関数 $f(z) = (x^2 + x + ay^2) + (bxy + y)i$ が複素数全域で正則になるよう, 実数の定数 a, b を定めなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$ を求めなさい.

ただし, 積分経路 C は, 複素平面において $-1,\ 1,\ 2i$ を頂点とする三角形の周に, 反時計回りの向きを付けたものとする.

(和歌山大 2016) (m20166506)

0.496 (1) $f(x) = |\sin x|\ (-\pi \leq x \leq \pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2016) (m20166507)

0.497 次の (1), (2) に答えなさい. ただし, x を実数, z を複素数とする. また, i は虚数単位, e は自然対数の基底である.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ の $z = 0$ の周りでのテイラー展開を求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ を, $z = e^{ix}$ として $|z| = 1$ の閉路積分から求めなさい.

(和歌山大 2017) (m20176508)

0.498 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

また，2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する．

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)～(3) に答えなさい．

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい．

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.499 次の (1)～(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$

(B) $u = e^x \sin y,\ v = e^x \cos y$

(2) (1) で選んだ u, v に対して，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい．

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ とし，向きは反時計回りとする．

$$\oint_C \frac{f(z)}{z} dz$$

(和歌山大 2018)　　(m20186505)

0.500 関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)～(3) に答えなさい．

(1) a_0 を求めなさい．

(2) a_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(3) b_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186506)

0.501 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．次の関数 $f(x)$ は，理学，工学の分野でしばしば現れる関数である．

$$f(x) = \frac{1}{x - ia}$$

ここで，a は正の実数 $(a > 0)$，i は虚数単位 $(i^2 = -1)$，x は実数，定義域は $-\infty < x < \infty$ である．

(1) 関数 $f(x)$ の実数部，および虚数部が，次のように書けることを示せ．

$$u(x) = \frac{x}{x^2 + a^2} \qquad v(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ．

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(4) 関数 $u(x)$，および $v(x)$ を $0 < x < a$ の範囲で定積分せよ．

$$\int_o^a u(x)dx \qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x = a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ．さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ．

(大阪市立大 2007) (m20076601)