[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：16 確率統計

0.1 N 組の計測データ $(X_1, Y_1), \cdots, (X_N, Y_N)$ がある．いま，変数 a, b を用いて

$$Z = \sum_{i=1}^{N}(Y_i - a - bX_i)^2$$

とする．Z を最小とする a, b の値を，計測データを用いて表しなさい．

(秋田大 2001)　(m20010410)

0.2 ある道路で歩行者の歩行速度の調査を行ったところ，以下の表のような結果となった．調査対象者全体の，歩行速度の平均値 $\overline{z}$ および不偏分散 $\hat{\sigma}_z{}^2$ を求めよ．

	調査した人数	歩行速度の平均値	不偏分散
60 歳未満	9 人	$\overline{x} = 1.8$ (m/s)	$\hat{\sigma}_x{}^2 = 0.2$ $(m/s)^2$
60 歳以上	18 人	$\overline{y} = 0.8$ (m/s)	$\hat{\sigma}_y{}^2 = 0.1$ $(m/s)^2$
調査対象者全体	27 人	$\overline{z}$ (m/s)	$\hat{\sigma}_z{}^2$ $(m/s)^2$

(お茶の水女子大 2017)　(m20170612)

0.3 ある工場において製造される製品 A の含水率 (%) の平均は 56.0 であったが，製法を変えたところ，この製品 A の含水率が変わったのではないかと思われた．これを検証するため，新しい製法による製品 A から無作為に 10 個を取り出して計測したところ，次のようなデータが得られた．

54.5　57.3　57.9　57.7　58.5
55.8　55.6　57.3　58.2　56.6

(1) 計測した 10 個の含水率の平均値を求めよ．

(2) 含水率が変わったか有意水準 5% で検定せよ．
なお母分散は製法変更の前後で $\sigma^2 = 1.6$ で変わらないものとし，$z_{0.025} = 1.96$ とせよ．

(お茶の水女子大 2018)　(m20180606)

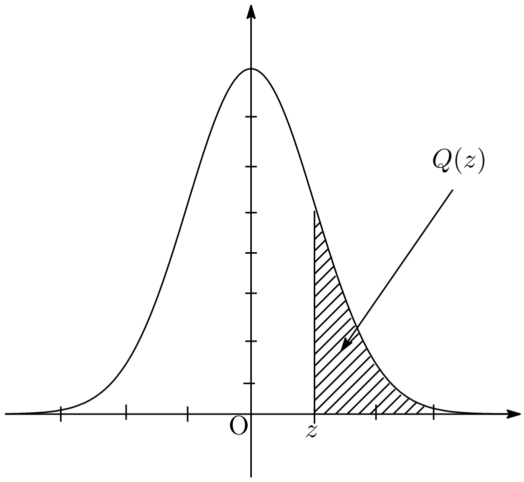
0.4 ある会社のペットボトル飲料水の容量表示が $500mL$ と印字されている．しかしながら，工場での注入の際に製品ごとに変動が生じる．含量は，平均 $\mu = 505.0mL$，標準偏差 $\sigma = 2.0mL$ の正規分布に従うことが分かっている．以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて付表 1 を利用せよ．

(1) 含量が表示である $500mL$ を下回る製品の割合を求めよ．

(2) $500mL$ を下回る製品の割合を 0.3% 以下にするためには注入機械の精度である標準偏差 σ をどれくらいにする必要があるか答えよ．

付表 1　正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $(z \to Q(z))$

z	$Q(z)$
0.50	0.3875
0.75	0.2266
1.00	0.1587
1.25	0.1057
1.50	0.0668
1.75	0.0401
2.00	0.0228
2.25	0.0122
2.50	0.0062
2.75	0.0030
3.00	0.0013



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190603)

0.5 ある健康改善プログラムの参加者の最高血圧 (mmHg) は，実施前の測定において平均値 $\mu = 125.0$, 標準偏差 $\sigma = 10.0$ の正規分布に従うことがわかっている． このプログラムでは，最高血圧の目標値を 130.0 (mmHg) と設定している．以下の (a) と (b) に答えよ． 必要であれば付表 1 を利用せよ．（※付表 1 は標準正規分布表）

(a) 参加者のうち，実施前に目標値を超過している人の割合を求めよ．

(b) プログラム実施後に最高血圧を測定したところ，目標値を超過する人の割合が 5% 以下になった． このとき，最高血圧の平均値はいくら未満であるか求めよ． ただし，プログラム実施後の最高血圧も正規分布に従い，標準偏差は変わらず $\sigma = 10.0$ とする．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200618)

0.6 あるサイコロを振ったところ, 出た目は次の通りであった．カイ 2 乗検定を行い，有意水準 5 %でこのサイコロが公平なサイコロと言えるかどうかを確かめよ．なお，カイ 2 乗分布表より $\chi^2_5(0.05)$ 値は 11.070 である．

目	1	2	3	4	5	6
回数	20	12	9	16	11	22

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210603)

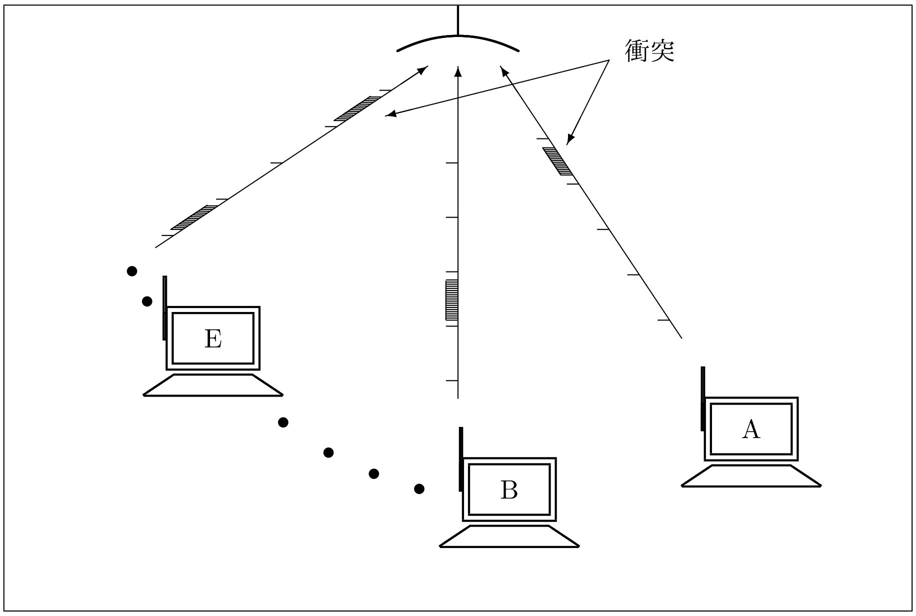
0.7 複数のコンピュータが長さ 1 秒の無線信号を中央のアンテナに送信するネットワークを考える（下図参照）．無線信号の交信は 1 秒ごとに行われ，$T-1$ (秒) から T (秒) の間に生起した無線信号は T (秒) の時点で送信される．また，2 台以上のコンピュータが同時に無線信号送信を行った場合には信号衝突（送信失敗）が起こり，後の時点で再送される．ここで，コンピュータ A 以外のコンピュータから生起された無線信号は，再送信号までも含めて次式の確率で送信されるものとする．このとき，以下の問に答えよ．なお，$P_r[k,n]$ は n 秒の間に k 個の無線信号が生起する確率であり，G は定数である．

$$P_r[k,n] = \frac{(Gn)^k}{k!}\exp(-Gn)$$

(1) コンピュータ A が無線信号を送信した際，信号衝突が起こらない確率を求めよ．

(2) コンピュータ A の信号送信が $j-1$ 回の信号衝突の後で成功する確率，すなわち送信回数が j 回となる確率を求めよ．

(3) 無線信号の送信回数の期待値を求めよ．



(東京大 1997)　(m19970705)

0.8 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある．点 P は硬貨を投げて表が出たら $+m$ ，裏が出たら $-n$ だけ移動する．硬貨は k 回投げるとする．

(1) $m=4$, $n=2$, $k=6$ のとき，下記の値を求めよ．

(a) 点 P の座標が原点である確率．

(b) 点 P の座標の期待値．

(2) $m=n=1$, $k=5$ のとき，下記の値を求めよ．

(a) 点 P の座標の期待値，および点 P がその期待値の座標に在る確率．

(b) 原点から点 P までの距離の期待値．

(c) 「点 P が負の座標に移動すれば，点 P は原点に戻りそこで終了する.」というルールを付加した場合，点 P の座標の期待値．

(東京大 1998)　(m19980705)

0.9 ２つの箱 I，Ⅱ を考える．最初 I には赤球２個，Ⅱ には白球２個が入っているものとする．各箱から同時に１球ずつ取って，他の箱へ移す操作を繰り返すものとして，以下の問に答えよ．

(1) この操作を n 回繰り返した後に，箱 I に赤球が２個ある確率 p_n ，赤球が１個ある確率 q_n ，赤球が無い確率 r_n をそれぞれ求めよ．

(2) この操作を無限回繰り返したときに，箱 I に入っている赤球の個数に対する期待値を求めよ．

(東京大 1999)　(m19990706)

0.10 ある製品は一回の使用後, 確率 p でこわれるとしょう. このとき以下に問に答えよ.

(1) この製品を k 回使用したとき, まだこわれない確率を求めよ.

(2) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後の確率を求めよ.

(a) すべてがこわれている確率はいくらか.

(b) すべてがこわれずに残っている確率はいくらか.

(c) M 個がこわれずに残っている確率はいくらか.

(3) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後こわれずに残っている個数の期待値を求めよ.

次に, この製品は使用しなくても単位時間あたり α の確率でこわれるとしよう.

（ つまり, 非常に短い時間 Δt 後に確率 $\alpha\Delta t$ でこわれる. ）このとき, 以下の問に答えよ.

(4) ある製品をまったく使用しない場合, 時刻 t においてそれがこわれていない確率を $P(t)$ とするとき, $P(t)$ の従う微分方程式を記せ.

(5) $t=0$ で $P(t)=1$ として, $P(t)$ を求めよ.

(6) この製品を, 完成後時間 t の間に k 回使用したとき, まだこわれていない確率を求めよ. ただし, 使用に要する時間は t に比べて非常に短いとする.

(東京大 2001)　　(m20010705)

0.11 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする.

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (0<x<1)$$

を用いてよい.

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき, Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ.

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x, j を用いてあらわせ.

(東京大 2002)　　(m20020705)

0.12 フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人それぞれ一人ずつが次のゲームをする．白いボールが a 個と赤いボールが b 個，合計 $a+b$ 個入っている箱から，フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人，フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人，$\cdots$ の順序で，誰かが最初に白いボールを取り出すまで，ボールを 1 つずつ取り出して戻す．白いボールを取り出した人が勝者である．各人が勝つ確率を求めよ．

(東京大 2003)　　(m20030705)

0.13 方程式 $ax^2+4bx+c=0$ が相異なる 2 つの実根をもつ確率を，(1), (2) それぞれの場合に対して求めよ．

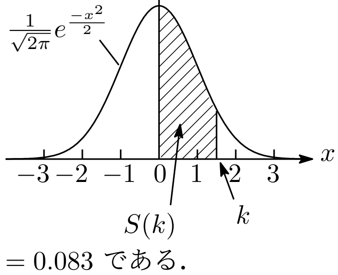
(1) $a,\ b,\ c$ がそれぞれ無作為に 0, 1, 2 のいずれかの値をとるとき．

(2) $a,\ c$ がそれぞれ無作為に 1, 2 のいずれかの値をとり，$a,\ c$ と関係なく b は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従うとき．

ただし，$\sqrt{2}=1.4$ とし，次の表を利用してよい．

k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
$S(k)$	0.117	0.191	0.258	0.316	0.341	0.385

ここに，$S(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ とする．たとえば，平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う変数 x が 0.7 から 1.0 をとる確率は，$P(0.7<x<1.0)=S(1.0)-S(0.7)=0.083$ である．

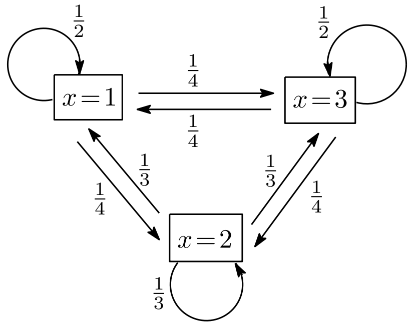


(東京大 2004)　　(m20040705)

0.14 変数 x は 1, 2, 3 のいずれかの値をとり, その値は単位時間ごとに

図に示す確率に従って変化する.

このとき以下の問いに答えよ.



(1) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, その後 $2 \to 3$ と変化して時刻 3 で再び $x=1$ となる確率を求めよ.

(2) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, 時刻 3 で再び $x=1$ である確率を求めよ.

(3) 十分長い時間がたった後では, x が 1, 2, 3 をとる確率は, それぞれ, 初期状態によらない値に収束する. これらの確率を求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050703)

0.15 1 回の試行において事象 A の起こる確率を p とする．この試行を独立に n 回くり返すときに A が起こる回数を X とすると，X は 0 から n までの整数値をとる確率変数であり，この確率分布を二項分布 $B(n,p)$ とよぶ．

例えば，表の出る確率が 0.5 のコインを 3 回投げる場合，表の出る回数は 0 回，1 回，2 回，3 回のいずれかであり，この各回数の確率の分布が二項分布 $B(3\,,0.5)$ である．

(1) A が r 回起こる確率を $P(r)$ とする．$P(r)$ を n,r,p を用いて表せ．

(2) 二項定理を用いて $\displaystyle\sum_{X=0}^{n} P(X)=1$ を証明せよ．

(3) 横軸を X，縦軸を $P(X)$ として，二項分布 $B(3\,,0.5)$ および $B(8\,,0.5)$ のグラフを示せ．ただし，有効数字を二桁とする．

(4) 二項分布 $B(n,p)$ の平均 μ を n,p を用いて表せ．またその導出過程を示せ．

(東京大 2006)　　(m20060705)

0.16 表と裏の出る確率が等しいコインが n 枚ある．ただし，n は 3 以上とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) これらのコインを同時に投げたときに，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果（表か裏か）となる確率 P を求めよ．

(2) これらのコインを同時に投げることを繰り返し，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果になった時点で終了する．ちょうど k 回目で終了する確率を求めよ．

(3) (2) において，k 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) (2) において，終了するまでにかかる回数の期待値と分散を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070705)

0.17 (1) (a) X を値が自然数 $1,2,\cdots,a$ のみをとる確率変数とする．X の平均 $E(X)$ は,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a} kP(X=k)$$

で定義される．ここで，$P(X=k)$ は，$X=k$ となる確率である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，$P(X \geq k)$ は，$X \geq k$ となる確率である．

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a} P(X \geq k) \tag{1}$$

(b) X の 2 乗の平均は,

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} k^2 P(X=k)$$

で定義される．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} (2k-1) P(X \geq k) \tag{2}$$

(2) 袋の中に白い玉が 1 個，赤い玉が $a-1$ 個入っている．袋から，玉を一つずつ無作為に取り出し，袋の中に返さないものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ．ただし，この確率は，「最初の $k-1$ 回は，常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい．

(b) (a) の回答と式 (1) を用いて，白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ．

(c) (a) の回答と式 (2) を用いて，白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ．
ただし，確率変数 X の分散 $V(X)$ は，$E(X^2) - (E(X))^2$ で与えられる．

(東京大 2009)　　(m20090702)

0.18 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1+n_2+n_3=N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty$ $\left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\frac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち
$p_i = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.19 3 つの部品 A, B, C からなる機械 M がある．C は絶対に壊れないが一定の確率で誤動作する．A, B は，C の誤動作のみを原因として一定の確率で C の誤動作と同時に壊れる．C が誤動作したことにより A, B が壊れる確率はそれぞれ 6 %, 5 % である．B が壊れたときに，同時に A も壊れる確率は 20 % である．A, B のいずれか，もしくは両方が壊れた場合に限り M は必ず故障し修理工員が修理する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解の導出過程を必ず書くこと．

(1) (a) C が誤動作したときに M が故障する確率 P_r を求めよ．

(b) C が誤動作する確率が 10 % のとき M が故障する確率を求めよ．

(2) C の 3 回の誤動作に対して，M の故障が 2 回以上となる確率を求めよ．

(3) C の誤動作が n 回発生したとき M を修理した回数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする．n が十分大きい場合について X が $\mu \pm 2\sigma$ の範囲に入る確率を，標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\varphi(z) = P(Z \leqq z)$ を用いて示せ．ただし，二項分布に従う確率変数 Y は，試行回数が十分大きい場合，近似的に正規分布 $N(Y$ の平均，Y の分散 $)$ に従うことを利用せよ．

(4) M が故障するたびに，2 人の修理工員 F_1 と F_2 が交互に修理する．実際に修理を行った後，修理担当を交代する．最初の修理担当を F_1 としたとき，C が n 回誤動作した時点で修理担当が F_1 である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$ とする．

(5) M が故障しているか否かを判断するセンサー S_1 と S_2 を取り付けた．センサー S_1，S_2 が M の故障の有無を正しく判断する確率は独立であり，それぞれ 90 %, 80 % である．今，C が誤動作し，M について S_1 が故障していると判断し，S_2 が故障していないと判断した．このとき，M が故障している確率を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110702)

0.20 A と B の二人で以下のゲームを行う．プレイごとに，A と B のどちらか一方が 1 点を獲得するものし，A が 1 点を獲得する確率を p とする．このプレイを繰り返し，

- A の点が B の点を 2 点上回ったとき，A の勝利.
- B の点が A の点を 2 点上回ったとき，B の勝利.

とする．

A が i 点，B が j 点を獲得しているときに，A がゲームを勝利する確率を $S(i,j)$ とする．

例えば，$S(1,1)$ は A, B がそれぞれ 1 点獲得しているときに，A がゲームに勝利する確率である．また，$S(2,0)=1$ であり，$S(0,2)=0$ である．このとき，次の問いに答えよ．ただし，全ての自然数 n に対して，$S(n,n)=S(0,0)$ であることを証明せずに用いて良い．

(1) $S(0,0)$ と $S(1,0)$ と $S(0,1)$ が満たす関係式を求めよ．また，$S(1,0)$ と $S(1,1)$ が満たす関係式を求めよ．

(2) i,j を $|i-j|<2$ を満たす非負整数とする．このとき，
$$S(i,j)=pS(i+1,j)+(1-p)S(i,j+1) \qquad (*)$$
であることを示せ.

(3) 式 $(*)$ を利用して，$S(0,0)$ の値を p を用いて表せ.

(4) $S(0,1)$ の値を p を用いて表せ.

(5) $S(0,1)=1/2$ となる p の値は，$3/5<p<2/3$ を満たすことを示せ.

(東京大 2012)　　(m20120702)

0.21 原点を出発点として数直線上の点 $(0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r=1-q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1=2$ となる確率は q^2，$x_1=0$ となる確率は $2qr$, $x_1=-2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x_2=0$, $x_3=0$ となる確率をそれぞれ求めよ.

(2) $x_n=0$ となる確率を求めよ.

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える．すなわち $x_n=0$ かつ自然数 $m<n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である．この確率は $z=qr$ の関数として $u_n(z)=2a_nz^n$ として表現できる．

このとき $n \geqq 2$ で $a_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{n-i}$ が成立することが示される．原点を出発し，いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする．$U(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ である．また，$\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる．以上のことを用いて，$U(z)$ を求めよ.

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し，a_n を n を使って表せ.

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.22 ある行列に並んでいる人の待ち時間 t は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする．ただし，λ は正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) 待ち時間が t 以下である確率 $F(t)$ を求めよ．

(2) 待ち時間の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 十分な数の観測の結果，待ち時間の平均が T であったとする．待ち始めてから時間 τ だけ経過したとき，残りの平均待ち時間を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140702)

0.23 1 回の勝負でコインが 1 枚増減するゲームを考える．1 回の勝負で，確率 p でコインが 1 枚増え，確率 $q = 1 - p$ でコインが 1 枚減る．コインの所持数が 0 になった時点で破産となり，N 枚になった時点でゲームに勝利するとする（ただし N は 2 以上の整数である）．破産か勝利した時点でゲームは終了する．以下の問いに答えよ．

(1) コインが k 枚のとき，破産する確率を $R(k)$ とする．ただし $0 \leq k \leq N$ とする．$R(k)$ が満たす漸化式を求めよ．

(2) $p = q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(3) $p \neq q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(4) コインが k 枚ある状態から，ゲームが終了するまでの平均勝負数を $G(k)$ とする． $G(k)$ は $1 \leq k \leq N-1$ において以下の漸化式を満たすことを説明せよ．

$$G(k) = 1 + pG(k+1) + qG(k-1)$$

(5) $p = q$ の場合に $G(k)$ を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150702)

0.24 表が出る確率が p であるコイン投げを考える．このとき，以下の問いに答えよ．
ただし，p は，$0 < p < 1$ を満たすとする．

(1) コイン投げを 5 回行う．

(a) 表，表，裏，裏，表の順に出る確率を求めよ．

(b) 表がちょうど 3 回出る確率を $f(p)$ とする．このとき，$f(p)$ を求めよ．

(c) (b) で求めた $f(p)$ を最大にする p を求めよ．

(2) 二人のプレイヤー A と B が，次のルールに従い，ゲームを行う．
ルール:コイン投げを 4 回行い，表が 3 回以上出た時は A の勝ち，2 回以下の時は B の勝ちとする．

(a) A の勝つ確率を $g(p)$ とする．このとき，$g(p)$ を求めよ．

(b) $g(p) = \dfrac{1}{2}$ となる p の値は，$\dfrac{3}{5} < p < \dfrac{2}{3}$ を満たすことを証明せよ．

(東京大 2016)　　(m20160702)

0.25 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，m，s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi(F(x))=\log\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i=\varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\varphi(F(x_i))\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

平均： $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j$ ， $\overline{y}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}y_j$

分散： $\mathrm{var}(x)=\overline{x^2}-\overline{x}^2$ ， $\mathrm{var}(y)=\overline{y^2}-\overline{y}^2$

共分散： $\mathrm{cov}(x,y)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_jy_j-\overline{x}\cdot\overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.26 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X=1$，それ以外をX=0とし, Bさんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1，それ以外を $Y=0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

　(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$．

　(b) 相関係数 $\rho(X,Y)$．

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X=1$ となったときに n 点もらえるとする．

　(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

　(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{n}k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y=1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

0.27 赤, 青, 白の 3 色の球が入っている箱から，球を次のルールで取り出すゲームを考える．

プレイヤーは，1 回の挑戦で 1 個の球を無作為に取り出し，引いた球の色に応じて以下を行う．

赤： ゲームを終了する．

青： 引いた青球を箱の中に戻し，ゲームを続行する．

白： 引いた白球を捨て，ゲームを続行する．

この挑戦をゲームが終了するまで繰り返す．最初，箱の中には，赤球が L 個，青球が M 個，白球が N 個あるものとする．以下の問いに答えよ．計算過程も示すこと．また，有理関数はは約分すること．

(1) $L=2,\ M=2,\ N=2$ のとき，1 回目の挑戦でゲームを終了する確率，2 回目の挑戦でゲームを終了する確率，3 回目の挑戦でゲームを終了する確率を，それぞれ求めよ．

(2) ゲームの途中で白球の残りの数が n 個のとき，ゲームの終了までに追加で必要な挑戦回数の期待値を $G(n)$ で表す．

(a) $n \geq 1$ のとき，以下の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(L+n)G(n) = L + M + n + nG(n-1)$$

(b) $G(0)$ を L と M を用いて表せ．また，$L=M$ のときの $G(0)$ を求めよ．

(c) $L=1,\ M=1$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(d) $L=2,\ M=2$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(e) $L=3,\ M=3$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(3) このゲームの終了時点で，それまでに青球を引いた回数が a，白球を引いた回数が b のとき，プレーヤーには $(b-a)$ の点数が与えられるものとする．$L=1,\ M=1$ のとき，点数の期待値が正になる最小の自然数 N を求めよ．

(東京大 2020)　　(m20200702)

0.28 誰に投与しても独立かつ同じ確率 p で副作用が起きる薬がある．この薬を投与したとき副作用が起きているかどうかを，キットを使って検査する．検査キットの判定結果は，「副作用が起きている」あるいは「副作用が起きていない」のどちらかであるが，確率 q で誤った判定結果を返す．患者 1 人に対して薬を 1 回投与したときに，検査キットが「副作用が起きている」と判定する確率を r とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 患者 1 人に対して薬を 1 回投与する．

(a) p と q を用いて確率 r を表せ．

(b) 「副作用が起きている」と判定された患者に，本当に副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ．

(c) 「副作用が起きていない」と判定された患者に，本当は副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ．

(2) 1 人ずつ順番に薬の投与とキットによる検査を行う．開始から T 人目で初めて「副作用が起きていない」と判定されるとする．ここで，T は確率変数である．

(a) 確率 $P(T=t)$ を t と r を用いて表せ．ただし，t は自然数とする．

(b) T の期待値と分散を求めよ．

(c) $P(T \leq 4) = 0.99$ となるような r を求めよ．

(3) 患者 $n(>2)$ 人に対して同時に薬を 1 回投与する．

(a) 検査キットによって「副作用が起きている」と判定される患者が m 人となる事象の確率 S を求めよ．答えには r を用いてもよい．

(b) 確率 S が最大となるような p を q, m, n の関数として求めよ．ただし，$p < \dfrac{1}{2},\ q < \dfrac{1}{2},\ m < \dfrac{n}{2}$ とする．

(東京大 2022)　　(m20220702)

0.29 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ が独立で，いずれも正規分布 $N(n_1, {\sigma_1}^2)$ に従う．確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ も独立で，いずれも正規分布 $N(n_2, {\sigma_2}^2)$ に従う．また $\{X_i\}, \{Y_j\}$ も独立とする．$\{X_i\}, \{Y_j\}$ の標本平均および標本分散をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}, {S_1}^2, {S_2}^2$ とする．

(1) $\overline{X} - \overline{Y}$ の分布を求めよ．

(2) $\dfrac{n_1{S_1}^2}{{\sigma_1}^2}+\dfrac{n_2{S_2}^2}{{\sigma_2}^2}$ の分布を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001008)

0.30 確率変数 X,Y,U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1,{\sigma_1}^2),N(\mu_2,{\sigma_2}^2),N(\mu_3,{\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a,b,c に対して，$W=aX+bY+cU$ の分布を求めよ．

(2) $V=\left(\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\Big/\left(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3\leq\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z)=P(Z\leq z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.31 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) 2 つのロットの中から 1 つのロットを選び, さらにその箱の中から 1 個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット 1 の製品である確率を求めよ.

(2) ロット 2 の製品を 30 個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r=0,1,2,\cdots,6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と 2 項係数を使って表せ. ただし, 2 項係数は

$${}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,,\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

で定義される.

(電気通信大 2005)　　(m20051009)

0.32 コイン投げを 1 回行い，その結果に応じた X を

$$X=\begin{cases}1 & \text{（裏が出たとき）}\\ 2 & \text{（表が出たとき）}\end{cases}$$

のように定めてから，偏りのないサイコロを X 回投げる．このときのサイコロの 1 の目の出現回数を Y とする．

コインの表の出る確率を p として．以下の問いに答えよ．

(1) X の確率 $P(X=i)$ $(i=1,2)$, X の期待値 $E(X)$, X の分散 $V(X)$ を p を使って表せ．

(2) 条件つき確率 ($X=i$ という条件の下での Y の確率) $P(Y=j\mid X=i)$ を可能な (i,j) の組み合わせに対しすべて求めよ．

(3) 条件つき期待値 ($X=i$ という条件の下での Y の期待値) $E(Y \mid X=i)$ $(i=1,2)$ を求めよ．

(4) Y の確率 $P(Y=j)$ $(j=0,1,2)$, Y の期待値 $E(Y)$ を p を使って表せ．

(電気通信大 2006)　　(m20061011)

0.33 (1) サイコロを投げたとき表に出る数字を X で表現することにしよう．また，このサイコロには歪みがなく，各面が表に出る確率は同等に等しいとしよう．このとき，X が従う確率分布を記しなさい．また，X の期待値を計算しなさい．

(2) ある母集団について，分散が 4 であり，分布が正規分布に従うことが分かっているとしよう．また，この母集団から，任意抽出法によって大きさ 4 の標本 13.8, 10.6, 8.2, 11.4 を得たとしよう．このとき，信頼係数 95% の，母平均 μ の信頼区間を求めなさい．ただし，解答に際しては，標準正規分布に従う確率変数 Z に関して

$$P(Z>1.96)=0.025\ ,\ P(Z>1.64)=0.05\ ,\ P(Z>1.28)=0.10$$

が成立するという性質を用いても良い．

(筑波大 2000)　　(m20001312)

0.34 今Ａ社とＢ社の株式 1 株を今から 1 ヶ月保有したときに得られる収益率をそれぞれ R_A, R_B とする．R_A は平均 μ_A%，標準偏差 σ_A% の正規分布に，R_B は平均 μ_B%，標準偏差 σ_B% の正規分布に従い，R_A と R_B の相関係数を ρ とする．h を $1 \geq h \geq 0$ の実数として，Ａ社の株式を h，Ｂ社の株式を $(1-h)$ の比率で保有したときに得る収益率 $(R_A h + R_B(1-h))$ の平均と標準偏差を求めよ．(単位はパーセントとする.)

(筑波大 2001)　　(m20011312)

0.35 次の表は，学生 10 人の数学と英語のテストの成績である．数学と英語の成績に相関関係があるか判断せよ．

(筑波大 2003)　　(m20031319)

学生番号	数学	英語
1	58	60
2	35	50
3	65	50
4	42	60
5	85	70
6	30	42
7	45	60
8	46	50
9	90	98
10	45	60

0.36 いまごくまれにおこるある特別の病気を発見するのに, ある検査法が有効であるとする. 実際にその病気にかかっている人にこの検査法を適用すると, 95 %の確率で, 病気を発見できるとする. また, それと似た症状を示すがはるかに軽微ですむ病気にかかっている人にこの検査法を適用すると, その 10 %がその病気にかかっているという誤った検査結果 (false positive) がでるものとする. また健康な人にこの検査法を適用すると, その 5 %がその病気にかかっているという誤った検査結果 (false positive) がでるものとする.

いまごくまれにおこる特別な病気にかかっている人, それと似た症状を示すがはるかに軽微ですむ病気にかかっている人, および健康な人の割合は, 母集団においてそれぞれ 1 %, 4 %, 95 %であるとする.

この母集団から無作為に選ばれた一人がこの検査を受けて, その病気にかかっているという検査結果が出た場合, その人が本当にその病気にかかっている確率を求めなさい.

(筑波大 2004)　　(m20041324)

0.37 1 年を 365 日とし（うるう年のことは考えない），人が生まれる確率はどの日も同じとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 任意の 2 人が出会ったとき，この 2 人の誕生日が異なる確率を分数で求めよ．

(2) これに 1 人が加わって 3 人になったとき，3 人の誕生日がいずれも異なる確率を求めよ．答は数式のままとし，分数や小数の値を求める必要はない．

(3) N 人が出会ったとき，それらの誕生日がすべて異なる確率 $P(N)$ を表す式を求めよ．

(4) 整数 x が 1 より十分大きければ，次の近似を用いることができる（Stirling の公式）．

$\log_e x! \fallingdotseq x\log_e x - x$ 　　(e は自然対数の底)

この式を利用して $\log_e P(N)$ に対する近似式を求めよ．ただし，N は 365 より十分小さいものとする．

(筑波大 2004)　　(m20041325)

0.38 2 つの確率変数 X と Y の結合確率分布 $P\{X = m\,,\ Y = n\}$ $(m = 0, 1, 2, 3\,;\ n = 0, 1, 2, 3, 4)$ が下の表のように与えられている．

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	c	0	0	0
$Y=1$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$Y=4$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0

ただし, c は定数である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 c の値を決めよ.

(2) X だけの確率分布 $P\{X = m\}$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ を求めよ.

(3) X の平均 $E[X] = \displaystyle\sum_{m=0}^{3} mP\{X = m\}$ を求めよ.

(4) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ.

(5) XY の平均 $E[XY]$ を求めよ.

(6) X と Y が独立であるかどうかを, 理由を示して判定せよ.

(筑波大 2005)　　(m20051304)

0.39 あるコインを投げるとき，確率 p で表，確率 $1-p$ で裏が出るものとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，$0 < p < 1$ とする．

(1) このコインを 3 回投げるときに表が出る回数 X の確率分布 $P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$ を求めよ．

(2) X の平均 $E[X]$ を求めよ．

(3) X の分散 $E\Big[\big(X - E[X]\big)^2\Big]$ を求めよ．

(4) 同様にして，このコインを n 回投げるときに表が出る回数 Y の確率分布を示せ．

(5) Y の平均を導出せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061308)

0.40 (1) 1 から 11 までの番号のついた 11 枚の札の中から，無作為に 1 枚の札を選んだとき，その札の番号が 2 または 3 の倍数である確率を求めなさい．

(2) 1 枚の銅貨を 10 回投げたとき，裏が少なくとも 2 回出る確率を求めなさい．

(3) 箱 A には黒ボールが 5 個，白ボールが 2 個入っており，箱 B には黒ボールが 3 個，白ボールが 2 個入っている．1 つの箱を無作為に選び，その箱から無作為に 1 つのボールを選ぶ．選んだボールが白である確率を求めなさい．

(4) 1 組のトランプ (52 枚) から無作為に 13 枚のカードを引く．引いた 13 枚のカードに 4 枚のエースが含まれている確率を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061325)

0.41 確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$ から，確率変数 $Z = X + Y$ が従う分布の確率密度関数を導出せよ．ここで，$-\infty < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071304)

0.42 ある人が特定の遺伝子 G を持っているかどうかを調べたい．このとき検査 T で陽性になるとこの人は遺伝子を持っていると判断される．しかし個体差があるために，真に遺伝子を持っている人でも検査結果が陽性になるとは限らないし，真に遺伝子を持っていない人でも検査結果が陰性になるとは限らない．一般に検査の精度は感度と特異度で評価される．感度とは真に遺伝子を持っている人が検査によって陽性になる確率，特異度とは真に遺伝子を持っていない人が検査によって陰性になる確率である．

さて，遺伝子 G は 10000 人に 1 人の割合で存在することがわかっている．ある人 A が検査 T を受けたところ陽性であったとき，このもとで A が真にこの遺伝子 G を持っている条件付き確率を求めよ．ただし検査 T の感度と特異度は 99% であるとする．

(筑波大 2007)　　(m20071324)

0.43 大リーグのヤンキースが勝つ確率は 50% であるとする．しかし松井が打点をあげると勝つ確率は 70% にあがるとする．また各試合で松井が打点をあげる確率は 40% であるとする．

(1) 松井が打点をあげない時にヤンキースが勝つ確率を求めなさい．

(2) ヤンキースが負けた時に松井が打点をあげている確率を求めなさい．

（ 注意：答えは分数で示せば十分である．）

(筑波大 2008)　　(m20081305)

0.44 23 本の染色体に，ある突然変異が起こっているかどうかを調べたところ 5 か所に突然変異を認めた．ただし，1 つの染色体に複数の突然変異が起こることがあるとする．次の (1) から (3) に答えなさい．

(1) 突然変異の起こり方の総数 N は 22 個の青玉と 5 個の赤玉を 1 列に並べる順列の総数と等しいことを示し，N を求めなさい．

(2) 突然変異が 8 番染色体に 3 か所あり，残りの 2 か所は 8 番染色体以外である場合は何通りあるか答えなさい．

(3) この突然変異はどの染色体にも等しく起こりうると仮定した場合，(2) のような場合が起こる確率を計算しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081324)

0.45 2 つの連続な確率変数 X, Y の同時確率密度関数が以下に与えられる．

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y \quad , & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(1) X の期待値を求めなさい．

(2) $X = 0.5$ の時の Y の条件付確率密度関数を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091304)

0.46　送られてきた, 100 個のある機械は, その内 10 個が壊れていることが分かっている. この中からランダムに連続して 2 個取り出すとき, 2 個とも壊れている確率を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101317)

0.47　ある大学の入学試験では 4 問出題され, 3 問以上の正解が合格ラインである. この大学の入試と同程度の模試で平均して 4 問中 3 問正解している学生が合格する確率は何パーセントかを求めよ（分数による精緻解と小数点以下を四捨五入した数値解の 2 通りで答えよ）.

(筑波大 2010)　　(m20101318)

0.48　正しく作られたサイコロを用いて, “3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける” というゲームを行う. このとき以下の問題に答えなさい.

(1)　ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す. このとき, 以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P_n$$

(2)　3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると, このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい.

(3)　3 の倍数が出たときにもらえる金額を, 1 回目なら 100 円, 2 回目なら $100(1+r)$ 円, 3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように, サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する. 但し, $r>0$ とする. このとき, このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには, 正の数 r は, ある範囲内 $0<r<r_0$ にある必要がある. このような r_0 のうち, 最も大きな値を求めなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111312)

0.49　制限時間 1 時間のテストに対して, 一人の学生がそれを解答するまでに要する時間を y とする. このとき, y は, 次の確率密度関数に従う確率変数であるとして, 以下の問題に答えなさい.

$$f(y)=\begin{cases} cy^2+y\ , & 0\leq y\leq 1 \\ 0\ , & \text{その他} \end{cases}$$

(1)　c を求めなさい.

(2)　分布関数 $F(y)$ を求めなさい.

(3)　$f(y)$ と $F(y)$ のグラフを描きなさい.

(4)　$F(y)$ において, $F(-1), F(0), F(1)$ を求めなさい.

(5)　30 分以内に解答を終了する確率を求めなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111313)

0.50　同時確率密度関数

$$f(x,y)=\begin{cases} 6(x-y) & 0\leq y<x\leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

(1)　X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.

(2)　X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(3)　X, Y の分散 $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121309)

0.51　確率変数 X は $1, 2, 3$ のいずれかの整数値をとる．また，X が整数 x をとる確率 $P(X = x)$ が次式で与えられるものとする $(x = 1, 2, 3)$.

$$P(X = x) = x/6$$

このとき，X の標準偏差を求めなさい.

(筑波大 2012)　　(m20121314)

0.52　定員 11 名のエレベータがある．このエレベータは，総重量が制限荷重の 748kg を超えるとブザーが鳴って動かなくなる．平均 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ という記号で表すと，男性の体重 (kg) は $N(65, 99)$，女性の体重は $N(55, 88)$ に従うという．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，乗り合わせる人の体重は互いに独立とする.

(1)　エレベータに男性 n_1 人，女性 n_2 人乗るとすると，計 $(n_1 + n_2)$ 人の体重の合計 X が従う分布を記号で表せ.

(2)　男性 11 人が乗ったときにブザーが鳴る確率 $P(X > 748)$ を求めよ.

(3)　男女計 12 人が乗っても，そのときにブザーが鳴る確率が $1/2$ 未満になるような女性の人数 n_2 の最小値を求めよ.

注) Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき，Z がある範囲にある確率は以下の通りである.

$P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$

$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$, $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$, $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$

(筑波大 2013)　　(m20131317)

0.53　N 人のグループで意見が集約される過程を考える．グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする．各時刻 t から $t + 1$ にかけて $(t = 1, 2, \cdots)$，構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする．この時，意見 A を持つ人の人数 i は，$i = 1, 2, \cdots, N - 1$ の時，確率 $\alpha\ (> 0)$ で $i + 1$ 人に増え，確率 $\beta\ (> 0)$ で $i - 1$ 人に減り，確率 $1 - \alpha - \beta\ (\geq 0)$ で i 人のままだとする．また，全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら ($i = N$ か $i = 0$)，それ以降は意見変更は起こらないとする．以下の問いに答えよ.

(1)　$N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のケースを考える．「時刻 $t = 1$ で $i = 2$ のとき，時刻 $t = 6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ.

(2)　「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき，時刻 $t \to \infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i, t)$ と書くこととする．$N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のとき，$x(2, 1)$ を求めよ.

(3)　任意の N, i, α, β に関して $x(i, 1)$ は $x(i, 2)$ と等しくなる．理由を述べよ.

(4)　上記の問題文の下線部に注意し，$x(i, 1)$ を，$x(i, 2)$, $x(i + 1, 2)$, $x(i - 1, 2)$, α, β のすべてを用いた式で表せ.

(5)　$x(i, 1) = x(i, 2) = x_i\ (i = 0, 1, 2, \cdots, N)$ とおき，x_i についての漸化式により x_1 を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.54　ある製品の不良率を p とする.

(1)　$p = 0, 01$ である時，100 個の製品の中の不良品が 1 個以内である確率を，2 項分布を用いて求めよ．　($0.99^{99} \approx 0.37$ とする．)

(2) p について全く見当がつかない時，確率 0.95 で不良率の推定の誤差を 0.02 以下にしたい場合を考える． この時，標本の大きさを最も大きくする p の推定値 $\hat{p}$ はいくらか．また，その時の標本の大きさ n を求めよ．ここで，$\hat{p}$ は正規分布に従うと仮定する．（添付の正規分布表を利用すること．）

(筑波大 2014)　　(m20141305)

0.55 さいころを振って出た目の数だけマスを進む「すごろく」を考える． 後戻りや，さいころの出た目の数をこえて進むことはないものとする． すごろくは振り出しの隣から，マスに $1, 2, \cdots$ と番号付けがされており，その順ににマスを進んでいく．

(1) さいころを 1 回振ったときに進めるマスの数の期待値を求めよ．

(2) 振り出しから始めて，さいころを何回か振った後に，マス n に止まる確率を $n = 1, 2, 3, 4$ のそれぞれの場合において求めよ．

(3) 振り出しから始めて，さいころを何回か振った後に，マス $n (1 \leq n \leq 6)$ に止まる確率を ${}_pC_q$ を用いて表し，その理由を説明せよ．ただし，${}_pC_q$ は p 個の要素の中から q 個の要素を取り出す組合せ数を表す．

(筑波大 2014)　　(m20141306)

0.56 確率変数 X と Y の同時確率分布 $P[X = x,\ Y = y]$ $(x = 0, 1, 2;\ y = 0, 1, 2, 3)$ が下の表のように与えられている．ただし，c は実数である．

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	c	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 定数 c の値を示しなさい．

(2) $X > y$ となる確率 $P[X > Y]$ を求めなさい．

(3) 確率変数 X と Y が独立であることの定義を記述し，表に与えられた X と Y が独立であるかどうかを判定しなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151316)

0.57 以下の問いに答えなさい（添付の二つの数表を適宜使用すること）．

(1) 製品 A の重量は，平均が 60.0(g)，標準偏差は 8.0(g) の正規分布に従うと考えられている．ある工場の製品 A を 100 個無作為抽出して調べたところ，標本平均は 62.0(g) であった． この工場の製品 A の平均重量は，製品 A の平均重量と同じであるといえるか．有意水準 5% で検定しなさい．

(2) 重量が正規分布に従うと考えられる製品 B の集団から，9 個を無作為抽出してその重量を測定したところ，抽出した 9 個の標本平均は 67.9(g)，偏差平方和は 72.0(g^2) であった．製品 B の平均重量が 66.0(g) であるという仮説を有意水準 5% で検定しなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151317)

0.58 確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i=1$，失敗したときに $X_i=0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 「確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y-\mu|>\lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y-\mu|>\lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y-\mu|>\lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.59 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる．

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ．

(2) $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.60 X を非負値離散型確率変数とする．$a>0$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 I を次のよう定義する，

$$I = \begin{cases} 1 & (X \geq a) \\ 0 & (0 \leq X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると，I の期待値 $E(I)$ と「 $X \geq a$ となる」確率 $Pr(X \geq a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ，

$$E(I) = Pr(X \geq a) \tag{i}$$

(2) 等式 (i) を用いて，$E(X)$ と $Pr(X \geq a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ．

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \tag{ii}$$

(3) 不等式 (ii) を用いて，$Pr(\,|X-E(X)|\, \geq a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ．

$$Pr(\,|X-E(X)|\, \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \tag{iii}$$

(筑波大 2017)　　(m20171310)

0.61 ある工場の製品 A が大量生産されているとき，製品 A の不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる. X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x;\theta)$ を求めよ.

(2) $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を確率分布 $f(x;\theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く，$\hat{\theta}$ を求めよ.

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ.

(筑波大 2017)　　(m20171311)

0.62 サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X，小さい方を Y とする．ただし，同じ目が出たときは, $X = Y$ とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 確率 $P(X \geq 5)$ 及び $P(Y \leq 1)$ を求めよ.

(2) 条件付き確率 $P(Y \leq 1 \mid X \geq 5)$ を求めよ.

(3) X の期待値 $E[X]$ を計算せよ.

(4) $E[XY] - E[X]E[Y]$ を計算せよ.

(筑波大 2018)　　(m20181312)

0.63 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする．今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である．$\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ.

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする.

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ.

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n = 4,\ m = 800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A),\ P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A),\ P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ.

(筑波大 2018)　　(m20181313)

0.64 確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i, \quad \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

を考える．ただし，

$$-\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma^2 < \infty$$

,

$$v_i = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \quad w_i = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には，

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い．

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ．

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ．

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ．

(5) (1)〜(4) から，$\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか．その理由とともに答えよ．

(筑波大 2019)　　(m20191312)

0.65 テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p, q で視聴すると仮定する．また，各世帯は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．なお，$0 \leq a \leq 1$ を満たす a に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-a)\%$ 点 z_a は

$$P_r(Z \geq z_a) = a$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$P_r(Z \geq z_a)$ は Z が z_a 以上になる確率である．

a	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_a	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\hat{p} = 0.1$ を得た．このとき，p の 95% 信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\hat{q} = 0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191313)

0.66 当りが 2 本，外れが 2 本からなるくじがあり，A, B の 2 人が非復元抽出で 1 本ずつくじを引く．A の引いたくじが当たりのときを $X = 1$，外れのときを $X = 0$ とし，B が引いたくじが当たりのときを $Y = 1$，外れのときを $Y = 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の同時確率分布表の (ア)〜(ク) に入る適当な値を答えよ．

X \ Y	1	0	合計
1	(ア)	(イ)	(ウ)
0	(エ)	(オ)	(カ)
合計	(キ)	(ク)	1

(2) 期待値 $E[X]$，$E[Y]$，分散 $V[X]$，$V[Y]$，共分散 $Cov[X,Y]$ を求めよ．

(3) 相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201307)

0.67 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ．

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする．

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である．

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2020)　　(m20201308)

0.68 確率変数 X について，その平均 $\mu = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合，定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ．

(2) $E(X) = 2$，$E(X^2) = 9$ のとき，(1) の結果を用いて，$-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_{16} が正規分布 $N(2,4)$ からの無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{X}$ に対して $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を求めよ．さらに，(1) を用いて $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し，両者を比較せよ．

付表１ 標準正規分布表：$Q = \int_0^z \phi(t)dt$, 但し，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表２

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

(筑波大 2021) (m20211313)

0.69 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるために，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$，$N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学 で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表３ F 分布表：分子の自由度 m_1，分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1, m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1, m_2)$（下段）

m_1 ＼ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表４ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α ＼ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120

(筑波大 2021) (m20211314)

0.70 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

（筑波大 2022）　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2}=1.414$	$\sqrt{3}=1.732$	$\sqrt{5}=2.236$	$\sqrt{7}=2.646$	$\sqrt{11}=3.317$

付表２

$e^1=2.718$	$e^2=7.389$	$e^3=20.09$	$e^4=54.60$	$e^5=148.4$

付表３　標準正規分布表：$Q(z)=\displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$,　ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表４　χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.71　ある店の単位時間あたりの来客数 X は，平均 λ のポアソン分布に従う．すなわち，t 時間あたりの来客数 X_t は，

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

に従う．このとき，以下の各問に答えよ．

(1)　来客の発生間隔 T の確率密度関数 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $(t>0)$ を導出せよ．

(2)　1 時間平均 1.5 人の来客があるとき，2 時間以上来客が無い確率を求めよ．

(3)　開店時間 t_0 から s 時間来客が無いとき，時刻 t_0+s から初めて客が来るまでの時間 H の確率密度関数を導出せよ．

（筑波大 2022）　　(m20221310)

付表２

$e^1=2.718$	$e^2=7.389$	$e^3=20.09$	$e^4=54.60$	$e^5=148.4$

0.72　a,b,c,d,e の 5 種類の文字がある．文字が 1 個以上並んだものを単語と呼ぶことにし，n 文字を選んで単語を作ることを考える．同じ文字を何回選んでもよいものとする．以下の 3 問に答えよ．

(1)　n が 3 のとき，作ることのできる単語は何種類か．

(2)　b を 1 文字だけ含んでできる単語の数を n の式で表せ．

(3)　3 文字の単語ができているとき，1 文字追加して 4 文字の単語とすることを考える．このとき，新たに選んだ文字がこれまでの単語に含まれていない確率を求めよ．

（群馬大 2003）　　(m20031505)

0.73　多数のカードが入った箱がある. それぞれのカードは, 表, 裏とも赤, 青, 黄のいずれかの色に塗られている. 1 枚のカードが表裏とも同じ色である場合もあるし, 異なる色である場合もある. カードは多数入っており, 6 種類のカードは, いつでも同じ確率で選べるものとする.

今, 箱から 3 枚のカードを取り出してテーブルの上に置き, それぞれのカードの上を向いた色が赤, 青, 黄の 3 色となる（順序は考えない）ようにしたい. それぞれのカードはどちらの面を上にするかは

いつでも入れ換えてよく, 最後に並べたときの上の面の色だけを考えることにする. 以下の 4 問に答えよ.

(1) 赤-青 , 赤-赤の 2 枚のカードを取り出した段階で, 次の 1 枚で 3 色そろえられる確率はいくつか.

(2) 赤-青のカード 1 枚だけが取り出されているとき, 次の 2 枚で 3 色そろえられる確率はいくつか.

(3) 赤-赤のカード 1 枚だけが取り出されているとき, 次の 2 枚で 3 色そろえられる確率はいくつか.

(4) 3 枚取り出して, 3 色そろう確率はいくつか.

(群馬大 2004) (m20041505)

0.74 繰り返し行われるある実験で, 関心をもっている現象 A が実際に観測される確率は毎回 3 分の 1 であるとする. この実験を独立に 5 回繰り返して行うとき, 以下の 3 問に答えよ.

(1) 5 回の実験のうち, 現象 A が 4 回以上観測される確率はいくらか.

(2) 5 回目の実験で, 初めて現象 A が観測される確率はいくらか.

(3) 5 回目の実験で, 現象 A がちょうど 3 度目に観測される確率はいくらか.

(群馬大 2005) (m20051501)

0.75 今，手元にトランプがある．以下の問いに答えよ.

(1) トランプの数字の札 10 枚と絵札 2 枚を取り出す．これを裏返しにして，無作為に 1 列に並べるとき，両端が絵札となる確率はいくつか.

(2) トランプの 4 つの組（スペース, クラブ, ハート, ダイヤ）の札が 5 枚ずつ取り出されている．これをよく切ったとき，スペードの札が 5 枚連続している確率はいくつか.

(群馬大 2007) (m20071505)

0.76 以下の 2 つの設問に答えよ.

(1) 7 本のくじがあり，1 本だけが当たりである．ここで A 君と B 君の 2 人が交互に 1 本ずつくじを引いていくとする．すなわち，最初に A 君が 1 本のくじを引き，それがはずれであれば次に B 君が残りのくじの中から 1 本を引き，またはずれであれば再び A 君が残りのくじの中から 1 本を引くというように，当たりが出るまで交互に繰り返しくじを引く．この場合，A 君が当たりを引く確率はいくらか.

(2) 28 人のクラスで，12 人が女子である．このクラスで，くじ引きによって 3 人の委員を選ぶとき，3 人とも女子になる確率を求めよ.

(群馬大 2008) (m20081504)

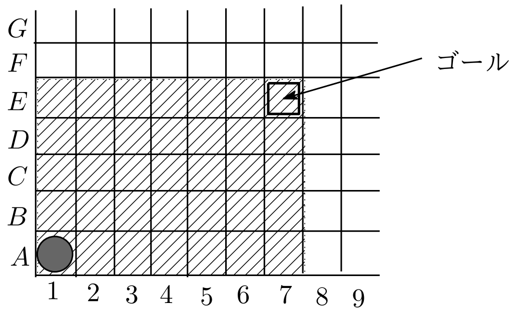
0.77 赤，青，黄色の 3 色のサイコロを投げ，赤のサイコロの出た目を a，青のサイコロの出た目を b，黄色のサイコロの出た目を c とする.

(1) 3 つの数 a, b, c をこの順に並べてできる 3 桁の整数 $(100a + 10b + c)$ が 4 の倍数である確率を求めよ．なお，整数が 4 で割り切れるための必要十分条件は，末尾 2 けたの数が 4 で割り切れることである.

(2) 3 つの数 a, b, c を用いて，$(x-a)^2+(y-b)^2 = c^2$ で表される円を描くとき，この円が点 $A(-1, -2)$ を通る確率を求めよ.

(群馬大 2009) (m20091503)

0.78 下図のような碁盤の左下のます目に碁石を置き実験を始める. サイコロを振って, 偶数が出れば右へ 1 ます, 奇数が出れば上へ 1 ます進めることを繰り返す.



(1) サイコロを 10 回投げることにする. 実験終了後に, ちょうど右上の「ゴール」と書いたます目に碁石がある確率はいくつか.

(2) サイコロを 8 回投げることにする. ; 実験終了後に, 図の網掛けをしていない領域（左下が $A1$, 右上が $E7$ の 35 個のます目以外）に碁石がある確率はいくつか.

(群馬大 2010)　　(m20101503)

0.79 以下の 2 つの問に答えよ.

(1) 9 人のスタッフを 2 人のグループ，3 人のグループ，4 人のグループの 3 つのグループに分ける分け方は何通りあるか.

(2) 12 台のカメラがあり，このうち 2 台が故障しているとする．12 台のカメラから 3 台のカメラを無作為に取るとき，少なくとも 1 台の故障したカメラが含まれる確率を求めよ.

(群馬大 2011)　　(m20111504)

0.80 確率について以下の問題に答えよ.

(1) 87 人の学生に，数日前に放送された 2 つのテレビ番組を見たかどうかを聞いた．一方の番組を見たのは 37 人，もう一方の番組を見たのは 43 人だった．どちらも見なかったのは 31 人だった．両方の番組を見た学生は何人だったか.

(2) 10000 人に 1 人の割合でかかる病気があるとする．病気にかっかているかどうかを検査すると，本当に病気にかかっている人に対して「病気にかっかている」という正しい結果が出る確率は 0.999，病気にかっかていない人に対して「病気にかっかていない」という正しい結果が出る確率は 0.995 である．ある人がこの検査を受けたとき，「病気にかっかている」という結果が出た．この人が本当に病気にかっかている確率はいかほどか.

(群馬大 2015)　　(m20151502)

0.81 蓋（ふた）のない t 個の箱 b_1，b_2，$\cdots$，b_t が置いてある．いずれの箱も高さは同じである．箱 b_n の幅と奥行きはともに $a_n\ cm$ であり，$a_1=10$，$a_t=30$，$a_n=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots,t)$ とする．このとき，石を投げて箱に入れるゲームを考える．石がいずれかの箱に入る確率は $\dfrac{5}{6}$ それぞれの箱に石が入る確率は上面の面積に比例しているとする．以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) すべての箱の上面の面積の合計を求めよ.

(3) 投げた石が箱 b_1 に入る確率を求めよ.

(4) 箱 b_n に石が入ったときの得点を p_n としたとき，$p_1=10$，$p_n=p_{n-1}-1$ $(n=2,3,\cdots,t)$ とする．いずれの箱にも入らなかったときの得点を 0 点とする．このとき，石を投げて得られる得点の期待値を求めよ.

(群馬大 2016)　　(m20161502)

0.82 次の各問いに答えよ．

(1) サイコロを 3 回振る．1 回目，2 回目，3 回目に出た数をそれぞれ a, b, c とすると $a < b < c$ となるのは何通りあるか．

(2) サイコロを 3 回振る．1 回目，2 回目，3 回目に出た数をそれぞれ 100 の位，10 の位，1 の位としたとき，得られた数が 3 の倍数になる確率を求めよ．

(3) 3 桁の整数が 3 の倍数であるなら，各桁の数の和は 3 の倍数であることを示せ．

(図書館情報大 1994)　　(m19941605)

0.83 右の図のようにつながった管の上の入り口から玉を落とすと，

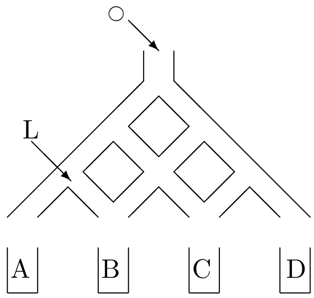
玉は枝分かれのところで，左側 : 右側 $= 3 : 2$ の比率で

下に進み，最後に下の A〜D のいずれかの容器に入る．

1000 個の玉を上から落としたとき，次の問に答えよ．

(1) 枝分かれの点 L を通過する玉の個数の期待値を求めよ．

(2) B の容器に入る玉の個数の期待値を求めよ．



(図書館情報大 1999)　　(m19991610)

0.84 1 から 6 の目のサイコロがある．各目がでる確率を同じとする. 次の問いに答えよ.

(1) 4 個のサイコロを同時に振ったとき，目が互いに異なる確率を求めよ.

(2) 3 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和が 6 である確率を求めよ.

(3) 2 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和の期待値と分散を求めよ.

(山梨大 2015)　　(m20151802)

0.85 コインの表裏を出す確率事象に対して，表がでる確率が 0.1 で裏がでる確率が 0.9 であるとする．この事象を n 回行う試行を考える.

n 回の試行を行ったとき，表が k 回出現する確率分布 $P(k)$ が次式で与えられることを示せ.

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{ただし } p = 0.1$$

n が 100 であるとき，k に関して $P(k)$ が，$k = 10$ で最大になることを示せ.

(山梨大 2016)　　(m20161803)

0.86 2 つの箱 A, B があって，箱 A には赤玉 1 個と白玉 5 個，箱 B には赤玉 5 個と白玉 1 個が入っている. このとき，以下の問に答えなさい.

(1) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したとき，その玉が赤玉である確率を求めなさい.

(2) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出し, 元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出す．このとき，2 回連続して赤玉である確率を求めなさい.

(3) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したら赤玉であった．その玉を元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出したとき，赤玉である確率を求めなさい.

(山梨大 2018)　　(m20181805)

0.87 連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている．

$$p(x) = \begin{cases} 0 & for\ \ x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & for\ \ -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & for\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & for\ \ 2 \leq x \end{cases}$$

(1) この確率分布に対して，平均値 m と分散 σ^2 を求めよ．

(2) 不等式 $P(|X-m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ．
なお $P(|X-m| \geq 1)$ は確率変数 X が平均値より 1 以上離れている事象の確率である．

(山梨大 2018)　　(m20181808)

0.88 (1) 正四面体のサイコロとは，正四面体の 4 頂点に 1〜4 の数値が割り当てられており，上の頂点の数値を出目とするサイコロである．出目を確率変数 X とすると，その確率分布表は以下のとおりである．

X	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

さて，2 個の正四面体サイコロを振り，2 つの出目の和を Y とする．まず，確率変数 Y について確率分布表を求めなさい．そして，Y の期待値を求めなさい．

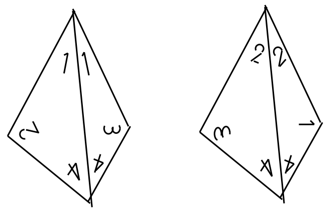


図 正四面体のサイコロ
（左のサイコロの出目は 1 で，
右の出目は 2 である）

(2) n 人がいるとき，少なくとも 2 人の誕生日が同じ月日である確率を求めなさい．
ただし，$1 < n < 365$ とし，うるう年は考えないこととする．

(山梨大 2019)　　(m20191805)

0.89 互いに独立な確率変数 X と確率変数 Y が区間 (0, 1) で一様連続分布に従う．確率変数 Z がこれらの和 $Z = X + Y$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) Z の値 z が 1 より小さいとき，確率密度関数は $p(z) = z$ であることを示せ．

(2) Z の値 z が 1 より大きいとき，確率密度関数は $p(z) = 2 - z$ であることを示せ．

(3) Z の平均値，分散を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191808)

0.90 連続的な確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられたとする．

$$f(x) = \begin{cases} ax(6-x) & (0 \leq x \leq 6) \\ 0 & (x < 0,\ x > 6) \end{cases}$$

(1) 定数 a の値を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散値 $V(X)$ をそれぞれ求めよ．

(山梨大 2020)　　(m20201803)

0.91 ある会社は，A，B，C 社から同じ製品を 2 : 3 : 5 の比率で購入している．A，B，C 社の製品にはそれぞれ 2.5%，1.5%，1.0% の割合で不良品が含まれていることがわかっている．

このとき，次の (a)〜(b) に答えよ．

(a) 購入した製品の中から任意に取り出した製品 1 個が不良品である確率を求めよ.

(b) 購入した製品の中から任意に 1 個を取り出したところ，不良品であった．取り出した不良品が，① A 社の製品である確率，② B 社の製品である確率，　③ C 社の製品である確率をそれぞれ求めよ.

(山梨大 2021)　　(m20211802)

0.92 目が「-1」,「0」,「1」,「2」にふられた 4 面体のサイコロを考える.

ただし，「-1」,「0」,「1」の出目は同じ確率で出現するが,「2」の出目は他の 2 倍の確率で出現するものとする.

(1) このサイコロを 1 回振ったときの出目の期待値と分散を求めよ.

(2) このサイコロを n 回振ったときの出目の合計値の期待値と分散を求めよ.

(3) このサイコロを 2 回振ったときの出目を掛け合わせた積の値の確率分布をグラフに示せ．ただし，範囲は -4 から 5 の間とする.

(山梨大 2023)　　(m20231802)

0.93 1 から 6 までの目のあるさいころを A と B の 2 人がそれぞれ 1 回ずつ振り，そのとき出た目の大きい方を勝ちとし，同じ目なら引き分けとする.

(1) A が 3 の目を出して勝つ確率を求めよ.

(2) A が勝ったとき，A の目が 3 である確率を求めよ.

(新潟大 2011)　　(m20112015)

0.94 4 種類の数字 0, 1, 2, 3 を用いて表される自然数を，次のようにカードに書いて用意する.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\cdots\cdots$ $\boxed{1210}$

つまり，小さい数から順番に 1 つずつ 1 枚のカードに書いて，$\boxed{1}$ から $\boxed{1210}$ まで用意する．これらの中から 1 枚のカードを取り出すとき，そのカードに書かれた数が 3 の倍数である確率を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192010)

0.95 ２つのさいころを投げるとき，出る目の積が 10 の倍数となる確率を求めよ.

(長岡技科大 1996)　　(m19962106)

0.96 ２人でさいころを交互に投げて 1 の目を先に出した人を勝ちとする．最初に投げた人が勝つ確率を求めよ

(長岡技科大 1997)　　(m19972107)

0.97 ２人でジャンケンをする．以下の問いに答えよ.

(1) １回で勝負が決まる確率を求めよ.

(2) ３回以内で勝負が決まる確率を求めよ.

(3) n 回以内で勝負が決まる確率を求めよ.

(長岡技科大 1999)　　(m19992105)

0.98 つぼの中に赤玉 n 個，白玉 $10-n$ 個の合計 10 個の玉が入っている．このつぼから玉を 1 個取り出して色を確かめてから元に戻す試行について，以下の問いに答えよ.

(1) 1 回の試行で赤玉が取り出される確率を n で表せ．

(2) 3 回の試行で赤玉が 2 回，白玉が 1 回取り出される確率 P を n で表せ．

(3) 前問で (2) の P を最大にする n とその最大値を求めよ．

(長岡技科大 2000)　　(m20002105)

0.99 2 人で行うゲームで A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，引き分けはないものとする．A は 3 回勝ったら優勝，B は 2 回勝ったら優勝する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) A が優勝する確率 $P(A)$ を求めよ．

(2) B が優勝する確率 $P(B)$ を求めよ．

(3) $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ のとき $P(A)$ と $P(B)$ はどちらが大きいか．

(長岡技科大 2001)　　(m20012107)

0.100 事象 A, B および積事象 $A \cap B$ の確率について，$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ となるとき，A と B は独立であるという. 男子 21 人，女子 15 人のクラスから，でたらめに 1 人の生徒を選ぶとする. 選ばれた生徒が男子であるという事象を A，眼鏡をかけているという事象を B として，以下の問いに答えよ.

(1) 眼鏡をかけた男子が 10 人，眼鏡をかけた女子が 8 人であるとき， A と B は独立か？

(2) 眼鏡をかけた男子が 14 人，眼鏡をかけた女子が 10 人であるとき， A と B は独立か？

(3) 眼鏡をかけた男子が m 人，眼鏡をかけた女子が n 人であるとき， A と B が独立となるような整数の組 (m, n) を全て求めよ.

(長岡技科大 2004)　　(m20042104)

0.101 ある人の受け取るすべてのメールのうち $\dfrac{1}{3}$ は広告メールである. メール本文に money という単語が入っている確率は, 広告メールでは $\dfrac{1}{10}$, 広告でないメールでは $\dfrac{1}{100}$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) あるメールが広告メールでない確率を求めよ.

(2) あるメールが広告メールであり かつ money という単語が入っている確率を求めよ.

(3) あるメールに money という単語が入っている確率を求めよ.

(4) あるメールに money という単語が入っていたとする. このメールが広告メールである確率を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052102)

0.102 3 つの箱 A, B, C がある．箱の中に入っている玉は，次の規則に従うものとする．ただし，n は 0 以上の整数とする．

a. 時刻 n に箱 A の中にある玉は，それぞれ独立に，時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 A にとどまり確率 $\dfrac{1}{2}$ で箱 B に移る．

b. 時刻 n に箱 B の中にある玉は，それぞれ独立に，時刻 $n+1$ に確率 $\dfrac{1}{3}$ で箱 B にとどまり確率 $\dfrac{2}{3}$ で箱 C に移る．

c. 箱 C にある玉は，そのまま箱 C にとどまり続ける．

時刻 0 に箱 A の中に 2 個の玉があり，箱 B, C の中には玉はないとする．以下の問に答えよ．

(1) 時刻 1 に箱 B の中に 2 個の玉がある確率 P_1 を求めなさい．

(2) 時刻 2 に箱 C の中に 2 個の玉がある確率 P_2 を求めなさい．

(3) 時刻 2 に箱 C の中に 1 個の玉がある確率 P_3 を求めなさい．

(4) 時刻 2 に箱 B の中に 1 個の玉がある確率 P_4 を求めなさい.

(長岡技科大 2006)　　(m20062101)

0.103 赤玉 2 個と白玉 5 個をでたらめに 1 列に並べる．以下の問いに答えなさい.

(1) 5 個の白玉が連続する確率を求めなさい.　　(2) 2 の赤玉がとなり合わない確率を求めなさい.

(長岡技科大 2007)　　(m20072101)

0.104 2 次の正方行列 A の 4 つの成分は，それぞれ独立に 0 または 1 の値を確率 $\dfrac{1}{2}$ でとるものとする．以下の問いに答えなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる確率を求めなさい.

(2) $A = {}^tA$ となる確率を求めなさい．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(3) $|A| = 1$ となる確率を求めなさい．ただし，$|A|$ は A の行列式を表す.

(4) 確率変数 $X = |A^2|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082101)

0.105 (1) バスが毎時 0 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでの時間の期待値を求めなさい.

(2) バスが毎時 0 分，25 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人が 25 分のバスに乗る確率を求めなさい.

(3) $0 < x < y < 60$ とする．バスが毎時 0 分，x 分，y 分にバス停に到着する．バスの時刻を知らずにバス停に来た人がバスに乗るまでの時間の期待値 $f(x, y)$ を求めなさい.

(4) $f(x, y)$ の最小値およびそのときの x, y を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092101)

0.106 大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ a, b とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1) A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102101)

0.107 箱の中に数字 1 が書かれたカード 1 枚と，数字 2 が書かれたカード 1 枚が入っている．この箱から 1 枚のカードをでたらめに取り出して数字を確かめてから元に戻す．この試行を繰り返し行い，取り出したカードの数の和が 3 以上になったとき試行を終了し，そのときの和を X とする．以下の問に答えなさい.

(1) $X = 4$ となる確率を求めなさい.

(2) X の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2011)　　(m20112101)

0.108 1 つのさいころを 6 の目が出るまで投げ続け，投げた回数を X とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 確率 $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ を求めなさい.

(2) 自然数 n に対して，確率 $P(X=n)$ を求めなさい．

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2012)　　(m20122101)

0.109 n を 2 以上の自然数とする．袋の中に $1,2,\cdots,n$ と書いたボールが 1 つずつある．ここから 2 個取り出して，出た順にその数字を X,Y とする．また，X と Y の大きい方を Z とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $k=1,2,\cdots,n$ に対して確率 $P(X=k)$，および期待値 $E(X)$ を求めなさい．

(2) $k=1,2,\cdots,n$ に対して確率 $P(Z=k)$，および期待値 $E(Z)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2013)　　(m20132101)

0.110 袋の中に赤玉 m 個と白玉 n 個が入っている．この袋からでたらめに 1 個の玉を取り出す．取り出した玉は元に戻さない．この操作を繰り返し行ったとき，先に赤玉がなくなる確率を $P(m,n)$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) $P(1,2)$ を求めなさい．

(2) $P(2,3)$ を求めなさい．

(3) 一般の m,n に対して，$P(m,n)$ を m,n で表しなさい．

(長岡技科大 2014)　　(m20142101)

0.111 数直線上の動点 Q が次の規則に従って移動している．ただし n は 0 以上の整数とする．

規則：時刻 n で Q の座標が a のとき，時刻 $n+1$ で Q は $a+1$，$a-1$ のいずれかに
それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．

時刻 0 で Q が原点にあるものとしたとき，下の問いに答えなさい．

(1) 時刻 2 で Q が原点にある確率を求めなさい．

(2) 時刻 4 で Q が原点にある確率を求めなさい．

(3) 時刻 $2n$ で Q が原点にある確率を n で表しなさい．

(長岡技科大 2015)　　(m20152104)

0.112 n を 3 以上の整数とする．赤玉が n 個，白玉が n 個，合計 $2n$ 個が袋に入っている．この袋からでたらめに玉を 1 個取り出し，その玉を元に戻さない．この操作を 3 回繰り返し行い，取り出した順に一列に並べ，次の方法で得点 X を計算する．

・「赤赤赤」と並んだ場合は $X=2$ とする．

・「赤赤白」または「白赤赤」と並んだ場合は $X=1$ とする．

・それ以外の場合は $X=0$ とする．

下の問いに答えなさい．

(1) $X=2$ である確率 $P(X=2)$ を求めなさい．

(2) $X=1$ である確率 $P(X=1)$ を求めなさい．

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めなさい．

(長岡技科大 2016)　　(m20162101)

0.113 A さんは 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードを持っている．同様に，B さんも 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードを持っている．A さんと B さんは，それぞれ自分のカードをでたらめに 3 枚選ぶ．A さんが選んだ数字の集合を X とし，B さんが選んだ数字の集合を Y とする．下の問いに答えなさい．

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ となる確率 p_1 を求めなさい．

(2) $X = Y$ となる確率 p_2 を求めなさい．

(3) $X \cap Y$ がただ 1 つの要素からなる確率 p_3 を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172103)

0.114 表に 1，裏に 2 と書かれている硬貨がある．A さんがこの硬貨を 1 回投げて，出た数を X とする．次に B さんがこの硬貨を 2 回投げて，出た数の大きい方（等しければその等しい数）を Y とする．下の問いに答えなさい．

(1) 確率 $P(X = k)$，$k = 1$，2 と確率 $P(Y = k)$，$k = 1$，2 とをそれぞれ求めなさい．

(2) $X > Y$ となる確率 $P(X > Y)$ と $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ とをそれぞれ求めなさい．

(3) 次のようなゲームを考える．「$X > Y$ のとき，A さんは 300 点を得て，B さんは 300 点を失う．$X < Y$ のとき，B さんは n 点を得て，A さんは n 点を失う．$X = Y$ のとき，両者とも得失点はない．」このゲームで，A さんの得点の期待値 E_A と B さんの得点の期待値 E_B とをそれぞれ求めなさい．

(4) 前問 (3) のゲームが公平となる，すなわち，$E_A = E_B$ となるような n を求めなさい．

(長岡技科大 2018)　　(m20182103)

0.115 n 人がじゃんけんをする．各人ともそれぞれ独立に，グー，チョキ， パーを等しい確率で出すものとする．あいこ（勝敗がつかない場合）になる確率を p_n とする．　下の問いに答えなさい．

(1) p_2 を求めなさい．　　(2) p_3 を求めなさい．　　(3) p_n を求めなさい．

(長岡技科大 2019)　　(m20192104)

0.116 n を自然数とする．箱 A には赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．箱 B には赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている．まず箱 A と箱 B をでたらめに選ぶ．次に，選んだ箱から復元抽出で n 回繰り返し玉を取り出す．　下の問いに答えなさい．

(1) $n = 1$ のとき，赤玉が取り出される確率を求めなさい．

(2) n 回全てで赤玉が取り出される確率 p_n を求めなさい．

(3) n 回全てで赤玉が取り出される条件の下で $n + 1$ 回目も赤玉が取り出される条件付き確率 q_n を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202104)

0.117 箱の中に 1 個の赤玉と 2 個の白玉が入っている．この箱からでたらめに 1 個の玉を取り出して，その色を確かめてから元に戻す．n を自然数として，この試行を $3n$ 回繰り返したとき，赤玉が k 回取り出される確率を P_k，$k = 0, 1, \cdots, 3n$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) P_k を n と k を用いて表しなさい．

(2) $r_k = \dfrac{P_{k+1}}{P_k}$，$k = 0, 1, \cdots, 3n - 1$ とおく．r_k を n と k を用いて表しなさい．

(3) $P_{k+1} > P_k$ と $r_k > 1$ が同値であることを利用して，P_k が最大となる k を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212104)

0.118 n を自然数，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．また，点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする．X に対し，次の規則に従って操作を行う．

規則

- X が A にあるときは，確率 p で X を A にとどめ，確率 $1-p$ で X を B に移動させる．
- X が B にあるときは，必ず X を A に移動させる．

最初 X が A にあるとする．n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す．例えば $a_1 = p$ である．下の問いに答えなさい．

(1) a_2 を求めなさい．

(2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表しなさい．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022) (m20222104)

0.119 10 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある．このくじを A, B の順に 2 人が 1 本づつ引くとき，次の確率を求めなさい．

(1) A が当たる確率 (2) A, B が共に当たる確率

(2) A が当たらず，B が当たる確率 (4) B が当たる確率

(福井大 2003) (m20032418)

0.120 赤球 5 個と白球 3 個が入った袋 A と, 赤球 2 個と白球 6 個が入った袋 B がある. 目隠しをして, いずれかの袋から 1 球取り出すとき, 白球を取り出す確率を求めなさい.

(福井大 2004) (m20042420)

0.121 表に示すように，xy 直交座標平面上に

(x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ で表される 5 個の点がある．

$$\sum_{i=1}^{5} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にする条件で，a と b を求め，

5 個の点に対する近似直線を求めなさい．

i	x_i	y_i
1	2	3
2	3	4
3	6	5
4	9	5
5	10	8

(福井大 2004) (m20042421)

0.122 一枚の硬貨を投げたとき, 5 回投げてちょうど 2 回, 表が出る確率を求めよ.

(福井大 2005) (m20052421)

0.123 一つのサイコロを振って，出る目の，平均，分散および標準偏差を求めよ．

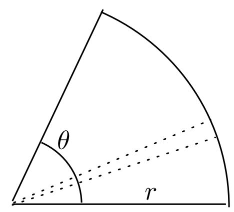
(福井大 2006) (m20062423)

0.124 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．

ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は

1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする．

r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$



(1) ある量の i 回目の観測値を x_i，n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき，

$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする．最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい．

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ.

(3) 角度の最確値を度 (°) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ. また, 同じ角度をラジアン単位で示せ. だたし, 円周率は π とする.

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から, もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい.

(5) この扇形の面積を, 図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい.

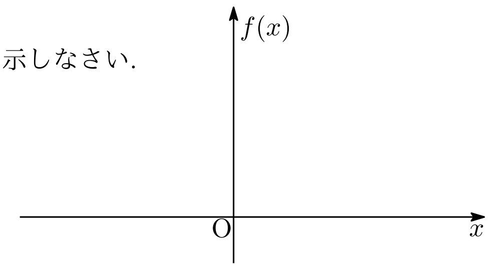
(福井大 2013)　　(m20132418)

0.125 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\,\sigma^2)$ は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ.

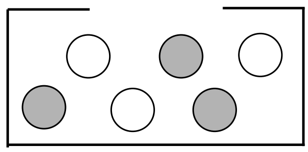
(1) $N(10,4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい.



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10,4)$ に従うとき, 次の確率を求めなさい.
必要に応じて, 別紙の標準正規分布表を用いなさい.
(i) $P[X > 13]$　　(ii) $P[8 < X < 12]$

(福井大 2015)　　(m20152426)

0.126 下図のように, 箱の中に赤玉と白玉が 3 個ずつ入っている. 二人で交互に箱の中から玉を取り出すとき, 次の問いに答えなさい. ただし, 箱の中は見えないものとする. なお, 先に玉を取り出すものを先攻, 後で玉を取り出すものを後攻と呼ぶことにする. また, 勝敗は点数の高いほうを勝ちとする.



(1) 赤玉を 1 点, 白玉を -2 点として, それぞれ交互に 3 回, 玉を取り出して合計得点を競う. ただし, 取り出した玉は, 箱には戻さないものとする. 先攻と後攻では, どちらが有利かを議論しなさい.

(2) 赤玉を 1 点, 白玉を -2 点として, それぞれ交互に 3 回, 玉を取り出して合計得点を競う. 今回は, 取り出した玉を箱に戻すか, 戻さないかを取り出した後に決められるものとする. 先攻と後攻では, どちらが有利かを議論しなさい.

(3) 赤玉を 1 点, 白玉を α 点として, それぞれ交互に玉を取り出し, 合計得点が先に 5 点を超えたものを勝ちとする. ただし, 取り出した玉は, 箱に戻すものとする. 先攻と後攻のどちらが有利かを α の値を考慮して, 議論しなさい.

(福井大 2016)　　(m20162425)

0.127 A の袋に数字 $1,2,3,4$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 4 枚入っている．B の袋に数字 $1,2,3,4,5$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 5 枚入っている．C の袋に数字 $1,2,3,4,5,6$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 6 枚入っている．A,B,C の袋から 1 枚ずつかカードを取り出すとき，その数字をそれぞれ x_A, x_B, x_C とする．次の問いに答えなさい．

(1) A と B の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B$ である確率を求めよ．

(2) A と B と C の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B \leq x_C$ である確率を求めよ．

(3) A と B と C の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B > x_C$ である確率を求めよ．

(4) A と B の袋から 1 枚ずつカードを取り出し，$x_A \leq x_B$ となった場合を考える．このとき，C の袋からもう 1 枚カードを引き，$x_B > x_C$ となる確率を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182407)

0.128 xy 平面上の座標 (m,n) (m と n は整数) を，サイコロの目に従って右方向と上方向へ移動する点 P が存在する (図 1 参照)．この点 P は，サイコロを振って出た目が整数 D 以下の場合には右方向へ 1 移動して座標が $(m+1,n)$ となる．一方，出た目が D より大きい場合には，上方向へ 1 移動して座標が $(m,n+1)$ となる．

また，点 P から x 軸におろした垂線と x 軸との交点を点 Q，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を点 R とし，座標 $(0,0)$ を原点 O とする．

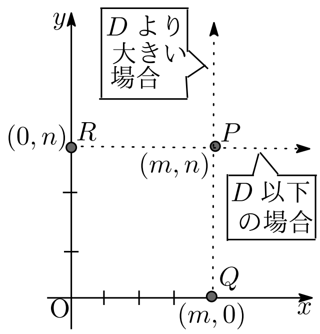


図 1 : xy 平面上の点 P
図 1 : xy 平面の点 P

サイコロの各目が出る確率を $\dfrac{1}{6}$ とするとき，以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $D=4$ の場合を考える．すなわち，サイコロを振って 1 から 4 の目が出たら点 P が右方向に 1 移動し，5 か 6 の目が出たら上方向に 1 移動する．いま，原点 O に位置する点 P がサイコロを 2 回振ったときに座標 $(2,0)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 4 以下の目が出た回数，4 より大きい目が出た回数をそれぞれ示せ．

(b) サイコロを 2 回振ったときに，点 P が座標 $(2,0)$ に位置する確率を求めよ．

(2) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを 3 回振ったときに座標 $(2,1)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 例えば，1 回目に D 以下の目（右へ移動），2 回目に D 以下の目（右へ移動），3 回目に D より大きい目 (上へ移動）が出ると，点 P は座標 $(2,1)$ へ移動する．このように，原点 O から $(2,1)$ へ点 P が移動する経路の総数を答えよ．

(b) サイコロを 3 回振ったときに; 点 P が座標 $(2,1)$ に位置する確率を D を使って表せ．

(3) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを L 回振ったときに座標 (s,t) (s と t は整数) へ移動したとする．このとき，

(a) 座標 (s,t) の y 座標 t を L と s を使って表せ．

(b) サイコロを L 回振ったときに，点 P が座標 (s,t) に位置する確率を D,L,s を使って表せ．

(c) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積を s と L を使って表せ．さらに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる点 P の座標が 1 つだけ存在することを示し，面積が最大になるときの点 P の座標と面積を求めよ．

(d) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる座標に点 P が位置する確率を D と L を使って表せ．

(福井大 2018)　(m20182423)

0.129 6 面のサイコロについて考える．普通のサイコロと違って，各面における目の数は，

1, 1, 2, 3, 5, 8 である．このサイコロを 1 回振るときに出る目の数の期待値を求めよ．

(福井大 2020)　(m20202409)

0.130 ある容器に赤玉 30 個，白玉 20 個，青玉 5 個が入っている．無作為に容器から玉を 5 個，一つずつ順に取り出す．赤，赤，青，青，白の順番で取り出す確率を求めよ．ただし，取り出した玉は容器に戻さない．

(福井大 2020)　(m20202410)

0.131 あるくじ引きにおいて，1 回くじを引いて当たりの出る確率が $p = 1/3$ である．A, B, C の 3 人が，順番にくじを引く．一回一回のくじ引きの結果が独立であるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) $A \to B \to C$ の順でこのくじを 1 回ずつ引き，最初に当たりを出した人を勝ちとする. 3 人とも当たりを出さなかった場合は，勝者はいないものとする．C が勝つ確率を求めよ．

(2) $A \to B \to C \to A \to B \to C \to \cdots$ の順で誰かが当たりを出すまでこのくじ引きを続けることとし，最初に当たりを出した人を勝ちとする．C が勝つ確率を求めよ．

(福井大 2021)　(m20212409)

0.132 2 つの確率変数 X と Y　$(-1 < X < 1,\ -1 < Y < 1)$ の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ が下記のように表されるとき，以下の問いに答えよ．

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2 + x + y}{8}\ , \quad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1$$

(1) 確率変数 X と Y のそれぞれの期待値 EX,　EY を求めよ．

(2) 確率変数 $Z = X - Y$ の期待値 EZ を求めよ．

(福井大 2021)　(m20212410)

0.133 各面の目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 である普通のサイコロが 2 つある．このサイコロ 2 つを同時に振ったとき，目の数の合計の平均値，標本分散をそれぞれ求めよ．ただし，標本分散の有効数字は 2 桁として解答すること．

(福井大 2022)　(m20222420)

0.134 確率変数 $\mathbf{a}$ の期待値は 240 で標準偏差は 4，確率変数 $\mathbf{b}$ の期待値は 40 で標準偏差は 12，確率変数 $\mathbf{c}$ の期待値は 30 で標準偏差は 3 である．ここで，確率変数 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は互いに独立である．このとき，以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(2) $\mathbf{f} = \mathbf{ab}/\mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(福井大 2022)　(m20222421)

0.135 下表のデータに対する最小 2 乗近似 1 次式を求めよ．

K	1	2	3	4	5
x_k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f_k	0.25	1.2	2.0	3.1	4.4

近似 1 次式は，$p(x) = a + bx$ とする．　誤差 $G \left(= \sum_{k=1}^{k=5} |f_k - p(x_k)|^2 \right)$ を最小にするように, 係数 a , 係数 b を決定せよ．

(岐阜大 2004)　(m20042607)

0.136 一つのサイコロを投げたとき, 出る目の数の平均値と分散を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052606)

0.137 サイコロを 500 回投げるとき,「6」の目が何回出る確率が最も大きいか.

(岐阜大 2006)　　(m20062621)

0.138 3 台の CPU（中央処理装置）からなる多重プロセッサコンピュータがある．それぞれの CPU が故障しない確率（信頼度）は 0.8 であり，故障した場合に保全は行わないものとする．システムの他の部分には故障は発生しないものとするとき，以下の設問に答えよ．

(1) 3 台の CPU のうち少なくとも 1 台の CPU が正常に動作していればよい場合，このシステムの信頼度（運用できる確率）を求めよ．

(2) システムを最大能力で運用するために，3 台の CPU がすべて正常に動作していなければならない場合，このシステムの信頼度を求めよ．

(3) システムを実用的に運用するために，少なくとも 2 台の CPU が正常に動作していなければならない（2 台以上の CPU が故障しているときは，このシステムは使用不能である）場合，このシステムの信頼度を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092609)

0.139 箱の中に 7 個の白球と 7 個の黒球が入っている．

(1) この箱から無作為に 4 個の球を取り出す．ただし，一度取り出した球は戻さない．

(a) 4 個の球が全て黒球である確率を求めよ．

(b) 4 個の球の色が全て同じである確率を求めよ．

(2) 1 個の球を取り出して，色を調べた後，元の箱に戻す操作を 4 回繰り返すとする．4 回の試行により取り出された球が全て黒球である確率を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972708)

0.140 (1) 親と子が各々一つずつサイコロを振り，親の出した目と同じ目を子が出せば子が勝ち，親の出した目と子の出した目が異なると親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数 (目) が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 3 回勝負し，子が勝ち越す確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 1 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(2) 親は二つのサイコロを振り，子は一つのサイコロを振るものとする．親の出した目の少なくともどちらか一つと同じ目を子が出したときに子の勝ち，それ以外のときに親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数（目）が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 子が勝つ確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 2 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982713)

0.141 硬貨を投げると表または裏がそれぞれ $1/2$ の確率で出るとする．あなたが硬貨を投げ，表が出続ける限り投げ続けることができ，裏が 1 度でも出たらそこで終了するものとする．表が出た回数を k とする．例えば，表表裏と出れば $k=2$ であり，いきなり裏が出れば $k=0$ である.（ただし，$2^{10}=1024$, $2^{20}=1.048576\times10^{6}$, $2^{30}=1.073741824\times10^{9}$, $2^{40}\fallingdotseq1.0995\times10^{12}$ である.）

(1) $k\geq3$ となる確率を求めよ．

(2)　$k \geq n$ となる確率を n を使った式で表せ.

(3)　$k = n$ となる確率を n を使った式で表せ.

表が出た回数 k に応じてあなたは賞金 2^k 円が貰えるとする.

(1)　1000 円以上貰える確率を求めよ.

(2)　あなたが貰える金額の期待値は何円か.

(3)　賞金は 2^{40} 円しか用意していないため，賞金が 2^{40} 円を超えた場合は貰える金額は 2^{40} 円になるものとする．賞金が 2^{40} 円を超えない場合は賞金の金額がそのまま貰える．あなたが貰える金額の期待値は何円か.

(豊橋技科大 1999)　　(m19992709)

0.142　白球が 5 個，黒球が 3 個，赤球が 2 個入った袋がある．以下の問いに答えよ.

(1)　同時に 3 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ.

(a) 全ての球が同じ色である確率.

(b) 全ての球が異なる色である確率.

(2)　順番に一つずつ球を取り出すとき，次の確率を求めよ．ただし，取り出した球は袋に戻さないものとする.

(a) 1 個目に赤球，2 個目に白球が出る確率.

(b) 2 個目に黒球が出る確率.

(3)　同時に 2 個取り出すとき，赤球と白球が一つずつであれば 250 円，赤球と黒球であれば 300 円，赤球二つであれば 1100 円の賞金がもらえるとする．ただし，これ以外の組み合わせでは賞金はもらえない．このときの賞金の期待値を求めよ.

(豊橋技科大 2000)　　(m20002709)

0.143　トランプの中からスペードの 1 から n までとハートの 1 から n までの合計 $2n$ 枚取り出して以下の遊びをする（n は 13 以下の自然数）．$2n$ 枚の中から無作為に 2 枚取り出して，その 2 枚が同じ数字である場合には「ペア」と呼び，2 枚が同じマーク（すなわち 2 枚ともスペードであるか，2 枚ともハートであるかのどちらか）である場合には「フラッシュ」と呼び，2 枚が「1 と 2」,「2 と 3」, $\cdots$,「$n-1$ と n」のように続きの数字である場合には「ストレート」と呼ぶことにする．ただし，$n \neq 2$ の場合は,「n と 1」はストレートとは考えない．なお取り出した順番は関係ない．ストレートとフラッシュが同時に起こることもある．以下の問に答えよ.

(1)　ペアになる確率を n を用いて表せ.

(2)　ストレートになる確率を n を用いて表せ.

(3)　フラッシュになる確率を n を用いて表せ.

(4)　ペアになる確率とストレートになる確率とが等しくなるような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ.

(5)　ペアになる確率よりストレートになる確率が高く，かつ，ストレートになる確率よりフラッシュになる確率が高いような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ.

(豊橋技科大 2001)　　(m20012710)

0.144　サイコロを 3 回投げるとき，次の確率を求めよ.

(1)　出た目の最大値が 3 以下となる確率.

(2)　出た目の最大値が 3 になる確率.

(豊橋技科大 2003)　　(m20032709)

0.145 あるサッカー選手のシュートの成功する確率が $1/3$ のとき，この選手が 4 回シュートをしたとき次の確率を求めよ．

(1) シュートが 3 回成功する確率．

(2) シュートが少なくとも 1 回成功する確率．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032710)

0.146 以下の問いに答えよ.

(1) 1 つのサイコロを 4 回振るとき, 次の確率を求めよ.

(a) 1 の目が 2 回出る確率.

(b) 1 の目が少なくとも 2 回出る確率.

(c) 1 の目が出る回数と 6 の目が出る回数の合計が 2 回となる確率.

(2) A 君と B 君がサイコロを交互に振るゲームをする. いま,A 君から振り始めるとし, 最初に 1 または 6 の目が出た方を勝ちとする. A 君の勝つ確率を求めよ.

(3) 1 つのサイコロを 2 回振るゲームをする. 以下の 2 つの場合のどちらかが起こるときを成功とする.

- 1 回目に 1 または 6 の目が出て, 2 回目も 1 または 6 の目が出た場合.
- 1 回目に 1 と 6 以外の目が出て, 2 回目に 1 が出た場合.

このゲームに成功したとき, 1 回目に出た目が 1 または 6 であった確率を求めよ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042710)

0.147 (1) 2 組の事象群 $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ がある. それぞれの事象群の要素は互いに排他的である. また, x_i が起こる確率を $P(x_i)$, y_j が起こる確率を $P(y_j)$ としたとき, $P(x_1)+P(x_2)=1$ および $P(y_1)+P(y_2)+P(y_3)=1$ が成立する. x_i と y_j が同時に起こる確率（同時確率）を $P(x_i,y_j)$ で表す. さらに, x_i を条件としたとき y_j が起こる確率（条件付き確率）を $P(y_j\,|\,x_i)$ で, 逆に y_j を条件としたとき x_i が起こる確率を $P(x_i\,|\,y_j)$ で表す. 同時確率 $P(x_i,y_j)$ が下表で示すように与えられている. このとき次の問いに答えよ.

(a) $P(x_2)$ を求め, ついで $P(y_1\,|\,x_2)$, $P(y_2\,|\,x_2)$ および $P(y_3\,|\,x_2)$ を求めよ.

(b) $P(y_1)$ を求め, ついで $P(x_1\,|\,y_1)$ および $P(x_2\,|\,y_1)$ を求めよ.

(c) $P(y_j\,|\,x_i)$ を $P(x_i)$, $P(y_j)$ および $P(x_i\,|\,y_j)$ で表す式を導け. ただし, $P(x_i)\neq 0$ とする.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.2	0.3
x_2	0.2	0.1	0.1

(2) 1 回の試行で 1 から 10 までの整数からなる一つの乱数を発生する装置がある.

(a) 3 回の試行で得た 3 個の整数がいずれも異なる確率を求めよ.

(b) 試行回数を増やすと, 得た整数の中に重複するものが存在する確率が次第に増加する. この確率が初めて 50 %を超えるのは何回目か.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052706)

0.148 袋の中に白玉 4 個と赤玉 6 個が入っている．以下の値をそれぞれ求めよ．ただし，解答は既約分数にせよ．

(1) 1 個取り出しては袋に戻す試行を 5 回行う場合，赤玉が丁度 4 回出る確率．

(2) 取り出した玉を戻さない場合，5 個取り出した中に赤玉が丁度 4 個ある確率．

(3) 取り出した玉を戻さない場合，4 個目を取り出した直後において，はじめて袋の中の白玉と赤玉の個数が同じになる確率.

(4) 同時に 2 個の玉を取り出す場合，同じ色の玉が出る確率.

(5) 取り出した玉を戻さずに，1 個ずつ取り出し，赤玉が出たら取り出しを止めるゲームをする．最終的に取り出すことができた白玉の個数を得点とする時，このゲームの得点の期待値.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062707)

0.149 箱の中に N 個の玉が入っている．これについて以下の問題文を読み，各問いに答えよ．

(1) N 個の玉を 4 人に分け与える方法を考える．

(a) 各自に最低 1 個の玉を渡すとする．$N=8$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(b) 玉をもらえない人がいてもよいとする．$N=4$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(2) 何回かに分けて箱から玉を取り出し，箱を空にしたい．1 回に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかとする．たとえば $N=3$ のとき，箱を空にする方法は「1 回で 3 個」,「1 回目に 2 個，2 回目に 1 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 2 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 1 個，3 回目に 1 個」という 4 通りである．

(a) $N=5$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(b) $N=10$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(3) 次のルールでゲームをする．2 人で交互に箱の中から玉を取っていって，最後の玉をとった人（箱を空にした人）が「負け」とする．一度に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかで，最低 1 個は取り出さなければならない．ただし箱の中にある玉の個数以上は取り出せないので，箱の中の玉が 2 個ならば，1 個あるいは 2 個を取り出すこととする．

(a) $N=6$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，
以下の選択肢 A〜E から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(b) $N=123$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，
以下の選択肢 A〜E から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062709)

0.150 1 から 10 までの数字の書かれたカードが 1 枚ずつ入っている袋から，無作為に 1 枚ずつカードを取り出す．以下の問いに既約分数で答えよ．

(1) カードを取り出すだびに袋に戻す場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ．

(2) カードを取り出すだびに袋に戻す場合，3 回取り出したときの数字の和が 28 以上である確率を求めよ．

(3) カードを袋に戻さない場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072702)

0.151 二つの封筒 A, B と，1 から 9 までの番号のいずれか一つが記されたカードの集合がある．封筒 A には，1 から 9 までそれぞれ 1 枚ずつ全部で 9 枚のカードを入れる．封筒 B には，1 から 9 までそれぞれ m 枚 $(m \geq 1)$ ずつ全部で $9m$ 枚のカードを入れる．以下の問いに答えよ．

(1) 封筒 A から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(2) 封筒 B から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(3) 封筒 A から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせと，封筒 B から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせが一致する確率を，$m = 3$ および $m \to \infty$ の場合について求めよ．

(4) 封筒 A と封筒 B それぞれから無作為に n 枚 $(1 \leq n \leq 9)$ ずつカードを引く．A から引いたカードと B から引いたカードの両方に，同じ番号のカードが少なくとも 1 枚含まれるための必要十分条件を，m と n を用いて示せ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072705)

0.152 1 から 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから 2 枚のカードを取り出して並べ，2 けたの数字を作る．ただし，1 枚目に引いたカードを十の位，2 枚目に引いたカードを一の位とする，以下の問いに答えよ．

(1) 2 けたの数字は全部で何通りできるか求めよ．

(2) 2 けたの数字が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 2 けたの数字が 3 の倍数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 2 けたの数字の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2008)　　(m20082701)

0.153 3 個のサイコロを同時に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) 3 個のサイコロの目の数が $1, 2, 3$ のいずれかであり，かつ互いに異なっている確率を求め，既約分数で答えよ．

(2) 3 個のうち，少なくとも 2 個のサイコロの目の数が同じである確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 3 個のサイコロの目の数の和が 6 以上である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 3 個のサイコロの目の数の和の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092704)

0.154 赤い玉, 白い玉, 青い玉を不透明な袋の中に入れる. 以下の問いを読んで, 既約分数で答えよ.

(1) 袋の中に赤い玉 3 個, 白い玉 5 個, 青い玉 8 個が入っている.

(a) 袋の中から玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す. 袋の中をよくかき混ぜてから, 改めて玉を 1 個取り出したとき, 取り出された玉が最初に取り出した玉と同じ色である確率を答えよ.

(b) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が赤 1 個と白 1 個である確率を答えよ.

(c) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が異なる色である確率を答えよ.

(2) 袋の中に赤い玉 $3n$ 個, 白い玉 $5n$ 個, 青い玉 $8n$ 個が入っている (n は自然数). この袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が同じ色である確率を $p(n)$ と表すことにする. $\lim_{n \to \infty} p(n)$ を答えよ.

(豊橋技科大 2010)　(m20102701)

0.155 以下の問いに答えよ. 答えは既約分数で示せ.

(1) 4 人でジャンケンをする. それぞれが, グー, チョキ, パーを出す確率は等しいものとする. 1 回ののジャンケンで勝者 1 人が決まる確率を求めよ.

(2) つぼの中に白い玉 5 個と黒い玉 5 個が入っている. このつぼから無作為に一度に 4 個の玉を取り出したとき, 取り出した白い玉と取り出した黒い玉の個数がちがう確率を求めよ.

(3) つぼの中に玉が 4 個入っており, そのうち白い玉が何個であるかは分からないとする. このつぼから玉を 1 個取り出したところ, 白い玉であったという. もともとつぼの中に白い玉が 3 個入っていた確率を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　(m20112701)

0.156 中の見えない袋が 10 袋あり，それぞれに 10 個の玉が入っている．袋にはタイプA，タイプB，タイプCの 3 種類があり，タイプAは 2 袋，タイプBは 7 袋，タイプCは 1 袋であることが分かっている．ここでタイプAには白玉が 9 個，赤玉が 1 個入っている．タイプBには白玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている．タイプCでは白玉が 5 個，赤玉が 5 個入っている．このとき以下の問いに答えよ．ただし答えは分数で示すこと．

(1) 袋を無作為に一つ選び，玉を無作為に一つ取り出す．その袋がタイプAであり，かつ取り出された玉が白玉である確率を求めよ．

(2) 袋を無作為に一つ選ぶ．その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う．このとき，その袋がタイプAであり，かつ取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ．

(3) 袋を無作為に一つ選ぶ．その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う．このとき，取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ．

(4) 袋を無作為に一つ選び，その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行った．取り出された玉は 3 回とも白玉であった．このとき，この袋がタイプCであった確率を求めよ．

(豊橋技科大 2012)　(m20122701)

0.157 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある．以下の問いに答えよ．

(1) この 9 枚のカードから同時に 2 枚のカードを無作為に取り出す．

(a) 出た数字の差が 5 以下である確率を求め， 既約分数で答えよ．

(b) 出た数字の和が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(2) X と Y の二人がこの 9 枚のカードを使ったゲームを行う．司会者 Z がカードを 1 枚無作為に取り出し，$1, 2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかの数字が出たときは X の勝ち，$7, 8, 9$ のいずれかの数字が出たときは Y の勝ちとし，勝った方にその数字の分だけの得点が与えられる．カードを元に戻してこの対戦を繰り返し，先に 3 回勝った方を勝者とする．

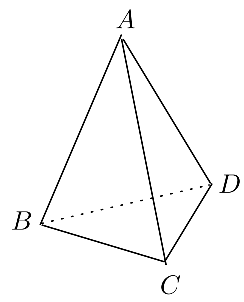
(a) X が 3 勝 1 敗で勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ．

(b) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，Y が勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ．

(c) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，X か Y のどちらかが勝者となった時点の X の得点合計の期待値を求め，既約分数で答えよ．

(豊橋技科大 2013)　(m20132706)

0.158 右図のように，四面体 $ABCD$ には，三角形の面が 4 つあり，辺が 6 つある．ここで，各辺を独立に，赤か青の色に等確率で（つまり，確率 1/2 で）塗ることを考える．3 辺が同じ色で塗られた三角形を，単色三角形と定義して，以下の問いに答えよ．



(1) すべての辺が青色で塗られる確率を求めよ．

(2) 三角形 ABC が単色三角形となる確率を求めよ．

(3) 三角形 ABC と ACD のどちらか，あるいは両方が単色三角形となる確率を求めよ．

(4) 四面体 $ABCD$ の中に単色三角形が 2 個のみ現れる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　　(m20142702)

0.159 N 人に呼びかけて行事を実施する．この行事は，ある日時に N 人のうちの n 人以上が参加できる場合に実施できるとする．呼びかけられた人が参加できる確率は，行事を実施する日時によらず p である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，ある日時に行事が実施できる確率を求めよ．

(2) 行事を実施する日時として 2 つの候補を設定する．$p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，いずれの日時においても行事が実施できない確率を求めよ．

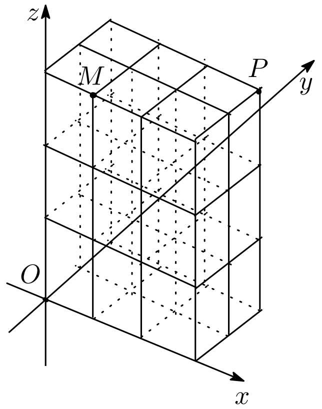
(3) 行事を実施する日時の候補数を k とする．$n=1$ のとき，少なくとも 1 回は行事が実施できる確率を N, p, k を用いて表せ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152703)

0.160 ある工場は午前 4 時間，午後 6 時間，夜間 2 時間の合計 12 時間稼動し，稼動中はいつも製品 X を時間当たり一定の個数生産している．生産後にすべての製品 X を検査し，ある基準値以上の性能があれば高価な S 級として，それ以外を通常の E 級として出荷している．午前に生産した製品 X は $\dfrac{1}{2}$ が S 級となる．同様に午後は $\dfrac{1}{3}$ が S 級となり，夜間は $\dfrac{3}{4}$ が S 級となる．この工場から出荷された E 級の製品 X のある一つが，午前に生産されたものである確率を求めよ．答えは規約分数で記せ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162707)

0.161 下図のように，空間上に点 $O(0,0,0)$ と点 $P(3,2,3)$，および点 $M(1,0,3)$ がある． ロボット A は点 O から点 P に，ロボット B は点 P から点 O に， それぞれ最短経路（8 ステップ）で移動する． ただし，1 ステップの移動は，x 軸，y 軸，z 軸のいずれか 1 方向に長さ 1 だけの移動とする． 以下の問いに答えよ．



(1) 点 O から点 P に移動する最短経路は何通りあるか答えよ.

(2) 点 O から点 P に，点 M を通って移動する最短経路は何通りあるか答えよ.

(3) ロボット A と B はそれぞれ独立に，すべての可能な最短経路の中から無作為に一つを選択する. 選択した経路に沿って，それぞれの出発点からロボット A と B が同時に出発し，同時に 1 ステップずつ移動していくとき，点 M で両者が出会う確率を求め，既約分数で答えよ.

(豊橋技科大 2017)　　(m20172701)

0.162 箱の中に 7 本の「はずれ」と 3 本の「当たり」が入っているくじがあう. 以下の設問に答えよ. なお，1 回につき，くじは 1 本引くものとする.　また，特に断らない限り，続けてくじを引く場合，一度引いたくじは箱の中に戻すものとする.

(1) このくじを 1 回引いて，当たりが出る確率を求めよ.

(2) このくじを 3 回引いて，1 回も当たりが出ない確率を求めよ.

(3) このくじを 3 回引いて，1 回以上当たりが出る確率を求めよ.

(4) このくじを 3 回引いて，1 回だけ当たりが出る確率を求めよ.

(5) このくじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ.

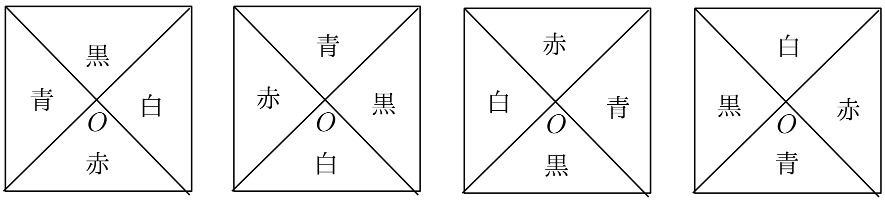
(6) 一度引いたくじを箱の中に戻さないようにする. このとき，くじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ.

(豊橋技科大 2018)　　(m20182701)

0.163 (1) ある平面上に正方形があり，その対角線の交点を O とする. 対角線によりこの正方形を 4 等分してできる 4 つの直角二等辺三角形を塗装する. 辺を共有する隣り合う三角形が異なる色となるように塗装することを考える. ただし，この平面上で点 O を中心に，この正方形を回転させると一致する塗装の仕方は同じものと考える. たとえば，下図で示されている 4 つの塗装は同一の塗装の仕方である.

ア. 黒，白，赤，青，黄の 5 色から 2 色を選択し，塗装する方法は何通りかを求めよ.

イ. 黒，白，赤，青，黄の 5 色から 3 色を選択し，その 3 色全てを使用して塗装する方法は何通りかを求めよ.



(2) 2 つのサイコロを同時に投げ，出た目の和が奇数とんる事象を事象 A，1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を事象 B とするとき，確率 $P(A \cap B)$ を求めよ.

(3) 白玉 3 個，赤玉 4 個が入った袋の中から玉を 1 つずつ取り出し，取り出した順に左から右へ一列に並べる.　ただし，一度取り出した玉は袋に戻さないものとする. 7 個全ての玉を順に取り出し並べるとき，白玉が隣り合わない様な並び方となる確率を求めよ.

(豊橋技科大 2019)　　(m20192702)

0.164 5 個の白い玉と 3 個の赤い玉が入っている袋がある. この袋から無作為に玉を取り出すとき，以下の問いに答えよ. ただし，答が分数となる場合は既約分数で求めよ.

(1) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個の玉の色が異なる確率を求めよ.

(2) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも白い玉である確率を求めよ．

(3) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，3 個とも同じ色の玉である確率を求めよ．

(4) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき， 赤い玉が隣り合わない並び方になる確率を求めよ．

(5) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき， 赤い玉が 3 個連続して並ぶ確率を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202702)

0.165 $n = 1, 2, 3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

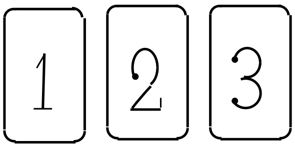
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ \ A_2(x) = \sin x,\ \ A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x)dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 B_1, B_2, B_3 をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている． この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする． この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

0.166 1, 2, 3, 4 のうち 1 つの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 4 枚のカードが箱の中に入っている．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は既約分数で答えよ．

(1) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，4 回とも同じ数字のカードを取り出す確率を求めよ．

(2) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，同じ数字のカードを 2 回以上取り出す確率を求めよ．

(3) 箱からカードを 1 枚ずつ順に 4 枚すべてを取り出すとき，最初に偶数，最後に奇数が書かれたカードを取り出す確率を求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222704)

0.167 赤玉 3 個，青玉 3 個，白玉 4 個が入った袋がある．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は，既約分数で答えよ．

(1) 袋から 1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す．ただし，取り出した玉はもとに戻さない，このとき，取り出した 3 個の玉が赤，青，白の順で取り出される確率を求めよ．

(2) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，取り出された 3 個の玉がすべて同じ色である確率を求めよ．

(3) 赤玉を 1 点，青球を 2 点，白玉を 3 点として，袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，取り出された 2 個の玉の点数の合計が偶数である確率を求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　(m20232704)

0.168 時刻 t_i $(i=1,2,\cdots,N)$ における N 個の測定データ x_i を最小 2 乗法によって直線 $x=a+bt$ で近似するものとする．このとき，a，b を決める式を導け．

(名古屋大 1999)　　(m19992804)

0.169 次のようにサイコロを振る場合を考える．各問いに答えよ．

(1) 1 つのサイコロを振り，最初に出た目が偶数のときはもう 1 度，奇数のときはもう 2 度振る．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(2) 1 つのサイコロを振り，1 が出たら再びサイコロを振り，1 が出る限りサイコロを振り続け，2 から 6 が出たら終了する．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(3) 2 つのサイコロを同時に振って，出る目の数の和が素数である確率を求めよ．

(名古屋大 2002)　　(m20022803)

0.170 赤玉が r 個，白玉が w 個入っているつぼの中からランダムに一つの玉を取り出し，取り出した玉と同色の玉を c 個加えて一緒に戻すという試行を繰り返すことを考える（一回の試行終了後には玉が c 個増えることになる．ただし，r, w, c は全て正整数で，赤玉が出るという事象を R，白玉が出るという事象を W とする．二つの事象 A, B がこの順番に連続して起こる確率を $P\{AB\}$，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付確率を $P\{AB|A\}$ と表す．以下の確率を求めよ．

(1) 1 回目に赤玉を取り出す確率 $P\{R\}$.

(2) 1 回目に赤玉が出たという条件のもとで，2 回目に赤玉が出る条件付確率 $P\{RR|R\}$.

(3) 上記条件のもとで，3 回目に白玉が出る条件付確率 $P\{RRW|RR\}$.

(4) 3 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{RRW\}$.

(5) n 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{R^{n-1}W\}$.

(名古屋大 2003)　　(m20032803)

0.171 確率変数 X が値 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ をとり，$X=x_i$ となる確率を $P(X=x_i)=p_i$ と表記するとき，以下の問いに答えよ．ただし，$P(X \geqq a)$ は X が a 以上の値である確率を表すとする．

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ の値を示せ．

(2) X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を x と p を用いて表せ．

(3) X の期待値を $E[X]=\mu$，分散を $V[X]=\sigma^2$ とする．任意の正数 k に対して次の式が成り立つことを示せ． $\sigma^2 \geqq k^2 P(|X-\mu| \geqq k)$

(4) 確率変数 X の平均と分散がそれぞれ 50 と 9 であるとき，$P(40<X<60)$ に関してわかる事を述べよ．

(名古屋大 2004)　　(m20042804)

0.172 つぼ U には白球 1 個と黒球 1 個の計 2 個, つぼ V には白球 2 個と黒球 1 個の計 3 個が入っている. 各つぼから 1 球ずつ取って, U のつぼから取った球は V のつぼへ, V のつぼから取った球は U のつぼへ入れる手続きを n 回行なうとき, U に白球が 2 個ある確率を p_n，白球, 黒球が 1 個ずつある確率を q_n，黒球が 2 個ある確率を r_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) p_1，q_1，r_1 を求めよ.

(2) p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ.

(3) この手続きを無限回行なうと確率 p_n，q_n，r_n がそれぞれ一定値 p,q,r になること（すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = p$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = q$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = r$）が分かっているとする. このとき p,q,r の値を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052805)

0.173　○×式の問題が $2N$ 問ある．そのうち，N 問は○が正解であり，残り N 問は×が正解であるとする．解答者が無作為に N 問に○を，残り N 問に×を解答する．このとき，正解数が k 問 $(0 \leqq k \leqq 2N)$ となる確率を P_k とする．

(1) $N=3$ の場合の P_k $(k=0,1,2,3,4,5,6)$ を求めよ．

(2) ○が正解の問題に○を記し正解となった問題数を x 問，×が正解の問題に×を記し正解となった問題数を y 問とする．このときの x と y の関係を記せ．

(3) P_k を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062804)

0.174　3 人がジャンケンを行い，一人だけが勝ったときに終了するものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 回で終了する確率を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のジャンケンで，終了する確率 $P(n)$ を求めよ．

(3) n 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) n 回以内に終了する確率が 50% 以上となる回数 n を求めよ．
ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 5 = 0.699$ とする．

(5) (2) の確率 $P(n)$ に回数を乗じ，これの N 回目までの和，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(n)$ を求めよ．

(6) (5) の N を無限大としたときの値を求めよ．

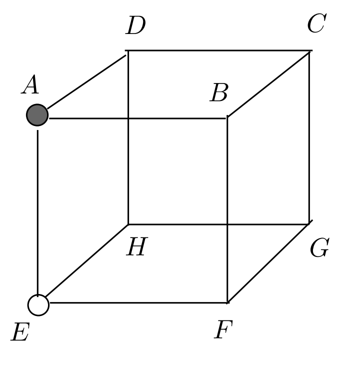
(名古屋大 2007)　　(m20072803)

0.175　図 1 のように，各頂点に A〜H の名前がつけられた，一辺の長さ a の立方体を考える．最初に，黒いピンと白いピンが，それぞれ頂点 A，頂点 E に設置してある．サイコロを 4 回振り，1 回目と 2 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，黒いピンを $A \to B \to C \to D \to A \cdots$ と移動させ，3 回目と 4 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，白いピンを $E \to F \to G \to H \to E \cdots$ と移動させることとする．次の問いに答えよ．

(1) 黒いピンが頂点 C に止まる確率を求めよ．

(2) 黒いピンと白いピンの距離が $\sqrt{2}a$ となる確率を求めよ．

(3) 黒いピンと白いピンの距離の期待値を求めよ．なお，無理数は無理数のままで解答して良い．



(名古屋大 2008)　　(m20082804)

0.176　3 つのつぼがあり，つぼ A には白玉 5 個，赤玉 3 個，つぼ B には白玉 4 個，赤玉 4 個，つぼ C には白玉 1 個，赤玉 7 個が入っている．1 から 6 の目が等しい確率で出るサイコロを振って，1 の目が出たらつぼ A を，$2,3$ の目が出たらつぼ B を，$4,5,6$ の目が出たらつぼ C を選択して，そのつぼから玉を無作為に 1 個取り出して元に戻す試行を繰り返す．

(1) 1 回の試行を行った時に白玉を取り出す確率を求めよ.

(2) 1 回の試行を行って白玉を取り出した場合にサイコロの 4 の目が出た確率を求めよ.

(3) 4 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の分布を求めよ.

(4) 10 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の期待値 $\bigl(E(X)\bigr)$ と分散 $\bigl(V(X)\bigr)$ を求めよ.

(名古屋大 2016)　　(m20162802)

0.177 赤玉が N 個, 白玉が N 個入ったくじ引き機を使い, 各回ごとにどちらの色の玉が出るかを予想する. N は 1 以上の整数であり, また, くじ引き機を出た玉はくじ引き機に戻さないとする. 予想者はすべての予想をくじ引き開始前に終了しており, $2N$ 回の試行に対して, 最終的に必ず赤白それぞれが N 個ずつになるように予想してあるとする. このとき, 予想が i 回当たる確率を P_i とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $N=2$ のとき, $i=0,1,2,3,4$ の場合の P_i を求めよ.

(2) $N=3$ のとき, P_i がゼロとなる i の値をすべて求めよ.

(3) $N=4$ のとき, P_i がゼロとならない場合の P_i をすべて求めよ.

(4) P_i がゼロとならない場合の P_i を求める式を N と i を用いて導け.

(名古屋大 2017)　　(m20172805)

0.178 10 個の玉に, 互いに区別できるように 1 から 10 の番号を記して箱に入れた. 箱の中から無作為に玉を一つ取り出す試行を行う. 一度取り出した玉は箱に戻さずに試行を N 回行い, 取り出した順に, 玉に記された番号を a_1, a_2, $\cdots$, a_N として, 以下の問いに答えよ.

(1) $N=3$ のときに a_1, a_2, a_3 がすべて偶数である確率を求めよ.

(2) $N=5$ のときに $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ となる場合は何通りあるか求めよ.

(3) $N=5$ で $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ となった場合に, $a_1>2$ である条件付き確率を求めよ.

(4) $N=3$ のときに $a_1+a_2+a_3$ が 3 の倍数となる確率を求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182802)

0.179 袋の中に, 白玉が 5 個, 赤玉が n 個入っているとする. ただし, n は 2 以上の整数とする. この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき, 取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とし, また, 取り出した白玉の数を X とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) p_n を求めよ.

(2) p_n が最大になる n の値と, このときの p_n の値を求めよ.

(3) X の期待値が 0.625 になるとき, n の値を求めよ.

(名古屋大 2022)　　(m20222804)

0.180 確率分布が以下の (1),(2) の場合について, 確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)-F(x-\alpha)\}\,dx=\alpha$$

が成り立つことを示せ.

(1) $P(X=0)=p>0,\ P(X=1)=q>0,\ p+q=1$ の場合.

(2) 確率変数 X が連続型で, 密度関数 $f(x)$ をもつ場合.

（愛知県立大 2000）　　(m20003004)

0.181 $y = \begin{cases} c(1-\sqrt{x}) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0\,,\ 1 < x) \end{cases}$

が確率密度になるように c を求め，その分布の平均と分散を計算しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033115)

0.182 (1) 表が出る確率が p の硬貨を n 回投げたとき，x 回表が出る確率 $f(x;p)$ を求めよ．

(2) $f(x;p)$ が最大となる p の値 p_0 を求めよ．

(3) p_0 の x に関する期待値を $E[p_0]$ と書くとき，$E[p_0] = p$ となることを示せ．

ただし，$\quad E[p_0] = \displaystyle\sum_{x=0}^{n} p_0 f(x;p) \quad$ である．

(三重大 2003)　　(m20033116)

0.183 (1) 平均 0, 分散 1 の正規分布 $f(x)$ に関する以下の問に答えよ.

(a) $f(x)$ の極大点における x と $f(x)$ の値を求めよ. また, $f(x)$ の変曲点 ($f''(x) = 0$) における x と $f(x)$ の値を求めよ.

(b) $f(x)$ のグラフを図示せよ.

(2) 確率変数 X と Y に関する以下の問に答えよ.

(a) 任意の実数 λ に対して次の関係が成り立つことを示せ.

$$E[\{\lambda(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)\}^2] = \lambda^2\sigma_x^2 + 2\lambda\sigma_{xy} + \sigma_y^2$$

ここで, $E[X]$ は X の期待値を表し,

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[X] \\ \mu_y &= E[Y] \\ \sigma_x^2 &= E[(X-\mu_x)^2] \\ \sigma_y^2 &= E[(X-\mu_y)^2] \\ \sigma_{xy} &= E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \end{aligned}$$

とする.

(b) $E[\{\lambda(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)\}^2] \geq 0$ となることを示せ.

(c) (a) , (b) の関係を利用して相関係数 ρ_{xy} が -1 から 1 の間の値を取ることをとる示せ. ただし, $\sigma_x^2\sigma_y^2 \neq 0$ とする.

(三重大 2004)　　(m20043115)

0.184 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^4} & (x \geq 0\,,\ y \geq 0) \\ 0 & (\text{その他の } x\,,\ y) \end{cases}$

の確率密度をもつ同時確率分布について以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ が確率密度になるように c の値を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の周辺確率密度 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 条件付き確率密度 $f(y \mid x)$ を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053119)

0.185 交通事故が一日に平均 2 回起こり, 火事が平均 1 回起こる町がある. 交通事故と火事はそれぞれ独立にポアソン分布 $f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$ に従って起こるものとして以下の問に答えよ. ただし, μ はポアソン分布の平均である.

(1) この町で交通事故も火事も起こらない日は 1 年 (365 日) に何日あるか,
その期待値を求めよ.

(2) この町で交通事故と火事があわせて 2 回起こる日は 1 年に何日あるか，その期待値を求めよ．

e^{-x} の値は右の表の値を使用せよ．

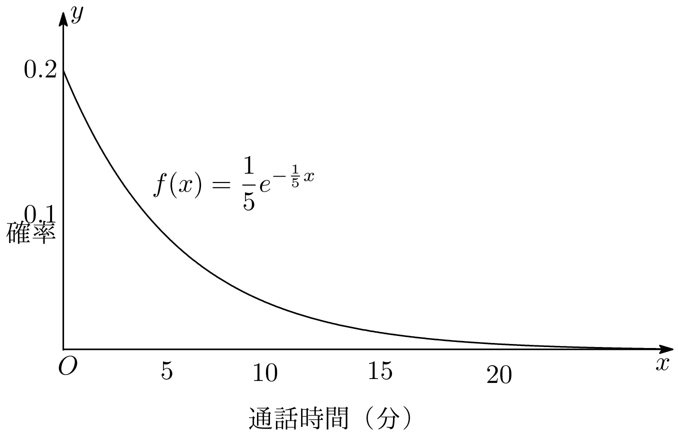
x	e^{-x}
1	0.37
2	0.14
3	0.050
4	0.018
5	0.0067

(三重大 2005)　　(m20053120)

0.186　ある人の電話の通話時間 x(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad (\ x > 0\,,\ e\ \text{は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい．



(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい．

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい．

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい．

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-ax} = 0$，$(a > 0)$ である．

(三重大 2006)　　(m20063109)

0.187　確率密度が　$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$　で与えられる分布について，次の問に答えよ．

(1) この分布の平均を求めよ．　　(2) この分布の分散を求めよ．

(3) この分布のモーメント母関数を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063117)

0.188　サイコロを 6 回振ったとき，次の事象が起こる確率を求めよ．

(1) 6 回とも異なる目が出る．　　(2) 同じ目が一組出る（同じ目が 2 回だけ出る）．

(3) 同じ目が二組出る（同じ目が 4 回出る場合を除く）．

(三重大 2007)　　(m20073115)

0.189　次の関数　$f(x) = \begin{cases} c\cos x & \left(|x| \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$　について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ.　　(2) その分布の分布関数を求めよ.

(3) その分布の平均を求めよ． (4) その分布の分散を求めよ．

(三重大 2007) (m20073116)

0.190 大きさや材質などが等しい白玉 7 個と赤玉 5 個の入った不透明な袋から手探りで 1 個ずつ玉を取り出す試行を 2 回繰り返す時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，取り出した玉は元に戻さないものとする．

(1) １回目，２回目とも赤玉を取り出す確率を求めよ．

(2) ２回目に赤玉を取り出す確率を求めよ．

(3) １回目の試行結果を隠しておき，２回目に取り出した玉が赤玉であることが分かった時，1 回目に取り出した玉も赤玉である確率（事後確率）を求めよ．

(三重大 2009) (m20093104)

0.191 箱の中に 1 から 8 までの整数を記入した 8 枚のカードが入っている．この箱から任意にカードを 1 枚取り出し，その数字を調べてからもとの箱に戻す．これを 3 回繰り返し，取り出したカードの数字の最大値を X とする．

(1) $X \leqq 4$ となる確率を求めよ．

(2) $k = 1, 2, 3, \cdots .8$ として，$X = k$ となる確率を求めよ．

(3) 数列の和に関する下記の等式について，数学的帰納法を用いて証明せよ．n は自然数を示す．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

(4) (3) の等式を参照して X の期待値を求めよ．

(三重大 2011) (m20113104)

0.192 1 から 9 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ，合計 9 枚ある．A 君と B 君がそれぞれ 1 枚ずつ，A 君 $\rightarrow B$ 君の順にカードを取り出すとき，次の (1) と (2) に示される確率をそれぞれ求めよ．ただし，取り出したカードはもとにもどさないものとする．

(1) A 君が偶数のカードを取り出し，B 君が奇数のカードを取り出す確率

(2) B 君が取り出したカードが偶数であることが判明している時，A 君が取り出したカードも偶数である確率

(三重大 2012) (m20123119)

0.193 確率密度関数に関する以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = k\,(1 - |x|)$ （ただし，$|x| \leqq 1$）が確率密度関数となるように，定数 k の値を定めよ．ここで，確率密度関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 であるという性質がある．

(2) X を確率変数とするとき，(1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8)$ を求めよ．

(三重大 2013) (m20133115)

0.194 ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 1 枚ずつ 2 枚のカードを取り出すとき，(1)〜(4) の確率を求めなさい．ただし，取り出したカードはもとにもどさないものとする．

(1) 1 枚目，2 枚目ともに A（エース）である確率

(2) 1 枚目に引いたカードが A（エース）である確率

(3) 2 枚目に引いたカードが A（エース）である確率

(4) 1 枚目に引いたカードは伏せたままにして，2 枚目に引いたカードが A（エース）であったとき 1 枚目も A（エース）である確率

(三重大 2014)　　(m20143111)

0.195 A と B の二人がサイコロを交互に振り最初に 2〜m $(1 \leq m \leq 5)$ のいずれかの目を出した方を勝ちとするゲームを行う．A が最初にサイコロを振る場合について，以下の問に答えなさい．ただし，A が n 回目にサイコロを振ったときに A の勝ちが決まる確率を $P(m, n)$ とする．

(1) $P(2, 1)$ を求めよ．

(2) $P(2, 2)$ を求めよ．

(3) $P(m, n)$ を m と n を用いて表せ．

(4) $m = 2$ のとき，A が勝つ確率を求めよ．

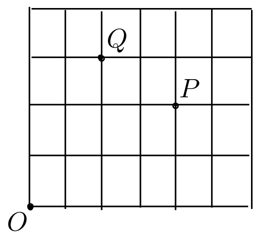
(三重大 2015)　　(m20153108)

0.196 (1) 異なる n 個のものから r 個をとって並べる方法（順列）の数 ${}_nP_r$，および組合せの数 ${}_nC_r$ を式で表せ．また，それぞれの式の意味および両式の関係について説明せよ．

(2) 下図の点 O から出発し，サイコロを投げて次の規則に従って 1 目盛りだけ進むものとする．

（規則）1 または 2 の目が出れば右に進み，それ以外の目が出れば上に進む．

このとき，点 Q に達する確率は，点 P に達する確率の何倍になるか．



(三重大 2016)　　(m20163113)

0.197 3 本の「あたり」と 17 本の「はずれ」を含む 20 本のくじがある．　続けて 2 回くじを引く時，(1)〜(4) の問いに答えよ．　ただし，1 度引いたくじは元に戻さないものとする．

(1) 1 回目にくじを引いた時点で，それが「あたり」である確率を求めよ．

(2) 1 回目に「あたり」を引き，かつ 2 回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(3) 1 回目に「はずれ」を引き，かつ 2 回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(4) 2 回目に引いたくじが「はずれ」であった時，1 回目のくじが「あたり」であった確率を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173114)

0.198 袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ，袋 B に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っている．解答者はそれぞれの袋の中にある赤玉，白玉の個数をあらかじめ知っているものとし，以下の設問に答えよ．

(1) 袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数（0 個，1 個，2 個）の期待値をそれぞれ求めよ．

(2) 袋 A から 1 つの玉を取り出し，その後，袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ．

(3) 袋 A から 1 つの玉を取り出した後で，2 つの玉を袋 A から取り出すか，あるいは袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出す可能性が高いほうを選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183111)

0.199 ある選挙区において，国政選挙の有権者全員の中で A 党の支持率が 20% であるという．この選挙区の有権者の中から無作為に n 人を抽出するとき，k 番目の抽出された人が A 党支持なら 1，不支持なら 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする．

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ について期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を 0.02 以下にするためには，抽出される標本の大きさは，少なくとも何人以上必要であるか?

(三重大 2020)　　(m20203106)

0.200 A 国において，ある病気 X に罹患している人は 8 %である．病気 X を診断するための Y 検査で，罹患している人が正しく陽性と判定される確率は 80 %であり，罹患していない人が誤って陽性と判定される確率は 7 %である．

(1) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陽性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(2) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陰性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(三重大 2022)　　(m20223115)

0.201 円を 4 分割して，1 つを当たりとするとき，円をまわして 3 本矢を投げてすべて当たりになる確率はいくらか.

(京都大 1999)　　(m19993305)

0.202 以下の設問に答えよ．

(1) 中世のフランス貴族メイは，2 個のサイコロを 24 回振って 6 のぞろ目（両方のサイコロの目が共に 6 であること）が出るかという賭けで，出る方に賭けた．彼は，次のように考えた．1 回振ったとき，6 のぞろ目が出る確率は 1/36 なので，24 回振れば 24 × 1/36 = 2/3 である．しかし，彼は大損をした．正しい計算方法を示せ．

(2) 箱 A には，白球 5 個，赤球 1 個が入っている．箱 B には，白球 1 個，赤球 5 個が入っている．今，任意に箱を選び球を 1 個取り出したら赤球であった．その球を元の箱に戻し，同じ箱から球をとり出したとき，再び赤球である確率を求めよ．

(3) ある小売店では商品を A 社から 7 割，B 社から 3 割仕入れている．A 社からの納入品のうち 2 割は純毛，B 社からの納入品のうち 4 割は純毛である．その小売店で適当に純毛の品を選んだとき，A 社の品である確率はいくらか.

(京都大 2000)　　(m20003304)

0.203 N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a}/n!$$

(1) ポアソン分布の平均値 $< n >= \sum_0^\infty np(N = n)$ が a となることを示せ．

(2) 面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L = l)$ は $p = A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L = l) = [M!/l!(M - l)!]p^l(1 - p)^{M-l}$$

$a = (M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.204 有限のシンボル集合 $A = \{a_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, $B = \{b_j \mid j = 1, 2, \cdots, m\}$ を考え, 各シンボルの生起確率を $P(a_i)$, $P(b_j)$ とする. これらのシンボル集合に対して条件付き確率 $P(a_i/b_j)$, $P(b_j/a_i)$, 同時生起確率 $P(a_i, b_j)$ をもとにして, $H(A), H(B), H(A/B), H(A, B), I(A, B)$ を以下のように定義する.

$$H(A) = \sum_{i}^{n} P(a_i) \log \frac{1}{P(a_i)}$$

$$H(B) = \sum_{j}^{m} P(b_j) \log \frac{1}{P(b_j)}$$

$$H(A/B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i/b_j)}$$

$$H(A, B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i, b_j)}$$

$$I(A, B) = H(A) - H(A/B)$$

この時, 次の問に答えよ.

(1) $I(A, B) = \displaystyle\sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$ となることを示せ.

(2) $H(A, B) = H(A) + H(B) - I(A, B)$ となることを示せ.

(3) $I(A, B) \geq 0$ となることを示せ.

(京都大 2004) (m20043304)

0.205 ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n, p の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q = 1 - p$ として，次の二項定理を利用してよい． $(px + q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である.

(1) 確率 b_k を記し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$ となることを示せ.

(2) 二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ.

(3) 事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す.

$$P(|r - \mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ.

(京都大 2006) (m20063303)

0.206 事象 X と事象 Y について, X と Y が両方とも生起するという事象を $X \cap Y$, X が生起しないという事象を $\overline{X}$ で表すことにする. 事象 X と事象 Y が独立であれば, X と $\overline{Y}$ も独立である. 事象 X が生起する確率を $P(X)$ と表し, X が生起したときに Y が生起する条件付確率を $P(Y|X)$ と表す.

泥棒が入るか, 地震が発生するか, いずれかが生じると作動する警報機がある. この警報機は誤作動することもあるという. 警報機が作動するという事象を A, 泥棒が入るという事象を B, 地震が起こるという事象を E で表すとき,

$$P(A) = 0.36\ , \qquad P(B) = 0.2\ , \qquad P(E) = 0.1\ ,$$

$$P(A|B \cap E) = 0.9\ , \qquad P(A|B \cap \overline{E}) = 0.7\ , \qquad P(A|\overline{B} \cap E) = 0.9$$

であることがわかっている. 事象 B と E は独立に生起すると仮定したとき, (1)〜(3) に答えよ.

(1) 警報機が作動したときに泥棒が入った確率 $P(B|A)$ を求めよ.

(2) 警報機が誤作動する確率 $P(A|\overline{B}\cap\overline{E})$ を求めよ.

(3) 地震が発生したときに，必ずテレビでニュース速報が放送されるとする．ニュース速報が流れたという事象を R とするとき，　$P(R|E)=1$,　　$P(R|\overline{E})=0.1$　　であるとする．
警報機が作動し，かつ，ニュース速報が流れたときに，泥棒が入った確率 $P(B|A\cap R)$ を求めよ.
ただし，$A\cap B$ と $R\cap E$，$A\cap B$ と $R\cap\overline{E}$，$A\cap\overline{B}$ と $R\cap E$，$A\cap\overline{B}$ と $R\cap\overline{E}$ はそれぞれ独立とする.

(京都大 2008)　　(m20083303)

0.207 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を
$M_X(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x)$，$q(x)$ の合成積 $p*q(x)$ を
$p*q(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z=X+Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z)=f*g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X=\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0},\ \sigma_X^2=\left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0}-\left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010)　　(m20103303)

0.208 　数直線上を動く点 A，点 B がある．点 A は，1 回サイコロを振る毎に，サイコロの目が 1 から 4 のとき $+1$，5 または 6 のとき -1 だけ移動する．n 回サイコロを振ったときの点 A の位置を $\boldsymbol{x}_A(n)$ とし，最初に点 A は，$\boldsymbol{x}_A(0)=a$（a は任意の整数）にあるものとする.

このとき以下の問 (1)〜(3) に答えよ

(1) サイコロを 3 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(3)$ のとり得る値を全て示し，それぞれの確率を求めよ.

(2) サイコロを n 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(n)$ の期待値を求めよ.

(3) サイコロを n 回振ったときの点 B の位置を $\boldsymbol{x}_B(n)$ で表す.
点 A，点 B の位置が常に $\boldsymbol{x}_A(n)+\boldsymbol{x}_B(n)=M$ の関係にあるものとする.
点 A の最初の位置 $\boldsymbol{x}_A(0)=a$ が，$1\leq a\leq M-1$ に限定されるとして，点 A か点 B の位置が M になるまでサイコロを振り続けるとき，点 A の位置が先に M になる確率を a と M を用いて表せ．ただし，M は正の整数（図 3 − 1 参照）.

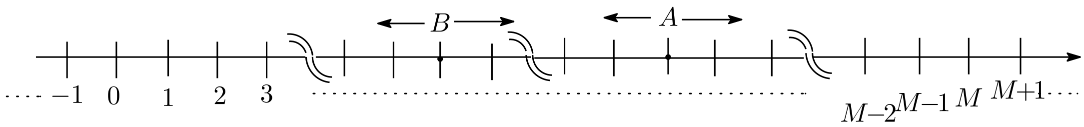


図 3 − 1

(京都大 2013)　　(m20133303)

0.209 異なる 4 つの数が与えられている．これらを各々4 回ずつ用いて 4 × 4 行列 a_{ij} $(i=1,2,3,4,\ j=1,2,3,4)$ をつくる．すべての可能な行列がつくられる確率が等しいとき，次の問に答えよ.

(1) 得られた行列のすべての行が，それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ.

(2) 得られた行列のすべての行，すべての列，及び対角成分（すなわち a_{ii} $(i=1,2,3,4)$）が，それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143305)

0.210 ある部屋の照明器具を n 台 $(n \geq 1)$ 同時に設置した．この照明器具は，1 台の器具について 1 個のランプを使用する．これらの照明器具については，設置後 1 年ごとに定期点検を行い，正常に作動しているランプはそのまま使い続け，ランプに故障が発見されれば正常に作動する新品と交換することにしている．また，定期点検の間で故障しても，ランプは次の定期点検まで交換しないものとする．更に，照明器具本体は故障しないものとし，照明器具を設置したときはすべてのランプが正常に作動する新品であったものとする．定期点検時に正常に作動していたのでそのまま使い続けたランプが次の定期点検時に故障している確率を P_{old} $(P_{old} < 1)$，照明器具設置時や定期点検でのランプ交換時に取り付けた新品のランプが次の定期点検時に故障している確率を P_{new} $(P_{new} < 1)$ とする．このとき，(1)〜(4) に答えよ．

(1) この部屋にある 1 台の照明器具について，設置後 m 年目 $(m \geq 1)$ の定期点検でこの照明器具のランプが故障している確率 P_m を求めよ．

(2) (1) の照明器具に対して，この維持管理を長期間続けると P_m は一定値 $\overline{P}$ に近づくという．$\overline{P}$ を P_{new}，P_{old} を用いて表せ．

(3) 十分長期間にわたって照明器具の維持管理を行った結果，この部屋に設置されている n 台の照明器具のそれぞれの P_m は，$m > M$ に対しては (2) で求めた一定値 $\overline{P}$ に等しいとみなしてよいものとする．ここに，M はある正の整数である．これら n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目 $(\ell \geq 1)$ までの定期点検で取り替えたランプの個数の合計がちょうど i 個 $(i \geq 0)$ である確率を求めよ．なお，解答は $\overline{P}$ を用いてもよい．

(4) (3) の n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目までの定期点検で取り替えるランプの個数の合計の期待値を求めよ．

(京都大 2015)　　(m20153303)

0.211 あるスポーツチームの試合結果は「勝ち」,「負け」,「引き分け」のいずれかとする．また，

- ある試合に勝った場合，次の試合に勝つ確率は 7/10，負ける確率は 3/10
- ある試合に負けた場合，次の試合に勝つ確率は 6/10，負ける確率は 4/10
- ある試合に引き分けた場合，次の試合に勝つ確率は 1/3，負ける確率は 1/3，
  引き分ける確率は 1/3

である．次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 最初の試合に引き分けた場合，3 試合目に勝つ確率を求めよ．

(2) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に勝つ確率を求めよ．

(3) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に初めて勝つ確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163303)

0.212 表が出る確率が p．裏が出る確率が $(1-p)$ の硬貨を投げ，表が出れば得点が 1 点増え，裏が出れば得点が 1 点減るゲームをする．硬貨を t 回投げた後の得点を Z_t 点とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$Z_0 = 0$ とする．

(1) $Z_3 = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $Z_3 = 1$ かつ $Z_7 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $Z_t = k$ となる確率を求めよ．ただし，$-t \leq k \leq t$ とする．

(4) 硬貨を t 回投げたとき，表が偶数回出る確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163304)

0.213 (1) 625 のすべての約数の和を求めよ．一般に，自然数 n の約数には 1 と n も含まれることに注意せよ．

(2) 25200 の約数の個数を求めよ．

(3) 25200 のすべての約数の和を求めよ．

(4) 25200 の約数のうち一つを無作為に選択した場合，それが 84 の倍数である確率を求めよ．

(京都大 2017)　　(m20173303)

0.214 n を 2 以上の整数，m を 0 以上 n 以下の整数とする． テーブルの上に置かれた n 枚の硬貨に対して，以下の試行 T を考える．

試行 T：n 枚の硬貨から 2 枚を無作為に選び，選んだ 2 枚の表裏を反転させる．

(1) n 枚の硬貨のうち m 枚が表を上にしているとき，試行 T によって選ばれた硬貨が 2 枚とも表から裏に反転させる確率を求めよ．

(2) n 枚の硬貨のうち m 枚が表を上にしているとき，試行 T ののちに表を上にしている硬貨の枚数の期待値を求めよ．

(3) n 枚の硬貨がすべて裏を上にしている状態から始め，試行 T を k 回繰り返したのちに表を上にしている硬貨の枚数をあらわす確率変数を X_k とおく．X_k の期待値 a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(京都大 2018)　　(m20183306)

0.215 (1) 赤玉 2 個，白玉 2 個を入れた袋から，無作為に玉を 2 個取り出したとき，取り出した玉が同じ色である確率を求めよ．

(2) n, k を自然数とする．1 から n までの番号が書かれた玉をそれぞれ k 個ずつ，合計 nk 個の玉を入れた袋から，無作為に玉を k 個取り出したとき，取り出した k 個の玉に書かれた番号がすべて同じである確率を求めよ．

(3) (2) と同じ袋から，無作為に玉を n 個取り出したとき，取り出した n 個の玉に書かれた番号がすべて相異なる確率を求めよ．

(京都大 2019)　　(m20193306)

0.216 以下の問 (1)〜(6) に答えよ．

あるパーティで，n 人がひとつずつプレゼントを用意して，お互いに交換することになった．n 人には 1 番から n 番までの番号がついているものとし，すべてのプレゼントは区別できるものとする．本問では，集合 X の要素数を $|X|$ と表すことにする．

[集合 $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ の定義]

j 番（ただし，j は 1 以上 n 以下の任意の整数）の人に着目する．j 番の人にその人自身が用意したプレゼントがあたるような交換のしかたすべての集合を $S(j)$ と定義する．この記法は 1 パラメタに関するものであるが，これを任意の $k(1 \leqq k \leqq n)$ 個のパラメタに関する記法に拡張する．ある k 人 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ がそれぞれ自分のプレゼントに当たることが同時に起きるような交換のしかたすべての集合を $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ と表す．ただし，次の (a)〜(c) の条件を満たすものとする．

(a) k は 1 以上 n 以下の任意の整数である．

(b) $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n$

(c) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ に属する交換のしかたのなかには，$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 以外の人で自分のプレゼントに当たっている人がいる交換のしかたも含まれるものとする．

（定義終わり）

(1) プレゼントの交換のしかたは全部で何通りあるか． n を用いて表せ．

(2) 集合 $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ を $S(j_1), S(j_2), \cdots, S(j_k)$ を用いて表せ．

(3) $|\,S(j_1, j_2, \cdots, j_k)\,|$ の値を n および k を用いて表せ．

(4) $|\,S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)\,|$ の値を n を用いて表せ．

(5) だれも自分のプレゼントには当たらないような交換のしかたは何通りあるか． n を用いて表せ．また，そのように表すことができる理由を簡単に説明せよ．

(6) n 個のプレゼントをでたらめに n 人に配ったとする．このとき自分のプレゼントが自分に配られるような人の数の期待値を求めよ．また，その導出過程も簡単に示せ．

(大阪大 1996)　(m19963503)

0.217 次の各問いに答えよ．

(1) サイコロ２つを一度に振る動作を N 回行う．このとき同じ目の出る確率が 0.5 以上になる最小の N を求めよ．

(2) ２つの目の差（絶対値）の期待値を求めよ．

(3) ２つの目の和の期待値を求めよ．ただし，ぞろ目の時はもう一度振り，この２回の和を値とし，たとえば，$(6, 6)$, $(4, 4)$, $(2, 2)$, $(1, 4)$ と出たら数字は 29 である．

(大阪大 1997)　(m19973506)

0.218 以下の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) 正６角形の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正６角形と辺を共有しない（すなわち，正６角形の対角線で構成される）３角形はいくつあるか求めよ．

(2) 正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数を n を用いて表せ．

(3) 正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数が，それ以外の３角形の数より大きくなるのはどのような場合か n を用いて表せ．

(4) １から n （ n は６以上の整数）までの整数を１つずつ書いた n 枚のカードがある．もとに戻すことなくカードを３回引き，それらの番号を順に a , b , c とする.，このとき a , b , c が互いに２以上離れた整数となる確率を n を用いて表せ．

(大阪大 1997)　(m19973507)

0.219 袋の中に赤球 x 個，白球 y 個，青球 z 個，合わせて $(x+y+z)$ 個の球が入っている．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x=3$, $y=2$, $z=1$ とする．１個ずつ３回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は袋に戻さないとする．

(2) $x=3$, $y=2$, $z=1$ とする．１個ずつ３回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は１回ずつ袋に戻すとする．

(3) ３球を同時にとり出すとき，赤，白，青の球が１個ずつである確率を x , y , z を使って表せ．

(4) 球の総数は 100 個である．１個ずつ３回球をとり出すとき，赤球，赤球以外，赤球の順に球が出る確率を最大とする x , y , z を決定せよ．ただし，白球，青球はほぼ同程度の確率で現れ，白球の数は青球の数より少ないことはないとする．導出の過程を示すこと．

(大阪大 1998)　(m19983504)

0.220 $X,\ Y$ は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，$s,\ t,\ \lambda$ は実定数とする．2 つの確率変数

$$S = X\cos\lambda s + Y\sin\lambda s, \quad T = X\cos\lambda(s+t) + Y\sin\lambda(s+t)$$

を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) $S,\ T$ の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) $S,\ T$ の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001) (m20013509)

0.221 X, Y を平均 0，分散 1 の正規分布に従う独立な確率変数とする．

(1) $Z = |X| + |Y|$ とおく．Z の平均，分散を求めよ．

(2) $W = \max(|X|, |Y|)$ とおく．W の平均を求めよ．ただし，$\max(a, b)$ で a と b の大きい方の数を表す．

(大阪大 2002) (m20023507)

0.222 赤い玉 3 個が一列に並んでいるとする．この列に対して次のような操作を繰り返し行う．

> 列の先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．選んだ玉が赤い玉なら，それをそのまま置いておき，列の先頭に白い玉を 1 つ付加する．選んだ玉が白い玉なら，それを取り去り，玉が抜けたために隙間ができれば，玉の順序が変わらないように玉を移動して隙間をなくす．

例として 1 回目の操作と 2 回目の操作について述べる．1 回目の操作で当然赤い玉を選ぶことになり，操作の結果として白い玉が 1 つ，列の先頭に付加され，3 つの赤い玉と合わせて 4 つの玉が並ぶことになる．2 回目の操作では，それらの 4 つの玉のうちの先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．このとき，確率 $\frac{2}{3}$ で赤い玉が選ばれ，確率 $\frac{1}{3}$ で白い玉が選ばれる．赤い玉が選ばれた場合には，白い玉が 1 つ先頭に付加され，結果として白い玉が 2 つ並び，その後に赤い玉が 3 つ続いた列ができる．また，白い玉が選ばれた場合には，白い玉は取り去られ，結果として列には赤い玉が 3 つ残ることになる．

n 回目の操作の終了時に列にある白い玉の個数を $w(n)$ と書くことにする．明らかに $w(n)$ は $0, 1, 2, 3$ のいずれかの値を（それぞれある確率を持って）とる．特に $n = 0$ の場合には確率は 1 で $w(0) = 0$ であると定義しておく．

$i = 0, 1, 2, 3$ について，$w(n)$ が i である確率を $p_i(n)$ で表す．上で述べたことにより，$p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$, $p_0(0) = 1$ である．

次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $p_1(2m) = p_3(2m) = 0$ であることを示せ．ただし，m は非負整数とする．

(3) m を 1 以上の整数とするとき，$p_0(2m)$ と $p_2(2m)$ を $p_0(2m-2)$ と $p_2(2m-2)$ を用いて表せ．

(4) 非負整数 m について，$p_0(2m)$ を求めよ．

(大阪大 2003) (m20033503)

0.223 ある変数 x（ただし $x \geqq 0$）の確率密度関数が $p(x) = \dfrac{\pi}{2}x \cdot e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$ で表されるとき, 以下の問に答えよ．

(1) 1 以下の x が出現する確率を求めよ．

(2) 確率密度が最も大きくなる x の値はいくらか？　また, $y=p(x)$ のグラフを図示せよ.

(3) 実験によりこの変数 x を発生させ, 十分な数の測定を行った. データを整理するにあたり, 測定された x を大きいものから順に並べて上位 1/3 だけを用い, x の小さい値はカットした. このとき, データ整理に用いた上位 1/3 の x がとり得る範囲の下限はいくらか？

(大阪大 2005)　　(m20053504)

0.224 n 枚のコインを 1 列に並べる. 各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1)=2$ であり, $n=2$ のときは (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) の 4 通りの置き方があるので $f(2)=4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1)=2$ であり, $n=2$ のときは $(H,H),(H,T),(T,H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2)=3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005)　　(m20053507)

0.225 3 つの確率変数 X,Y,Z のとりうる値をそれぞれ $\{x_1,x_2\}$, $\{y_1,y_2\}$, $\{z_1,z_2\}$ とする. また, $(X,Y)=(x_i,y_j)$ である確率を $\mathrm{pr}(x_i,y_j)$ と記し, $\mathrm{pr}(x_i,y_j)>0$ $(i,j=1,2)$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\mathrm{pr}(x_1,y_1)\,\mathrm{pr}(x_2,y_2)}{\mathrm{pr}(x_2,y_1)\,\mathrm{pr}(x_1,y_2)}=1$　ならば, X と Y は独立であることを示せ.

(2) $(X,Y)=(x_i,y_j)$ を与えたときの $Z=z_k$ の条件付き確率を $\mathrm{pr}(z_k|x_i,y_j)$ $(i,j,k=1,2)$ と記し, 他の条件付き確率についても同様に記す.

確率 $\mathrm{pr}(x_i,y_j)$ $(i,j=1,2)$ が

$$\mathrm{pr}(x_1,y_1)=1/2\,,\ \mathrm{pr}(x_1,y_2)=1/4\,,\ \mathrm{pr}(x_2,y_1)=1/6$$

で与えられ, 条件付き確率 $\mathrm{pr}(z_k|x_i\,,\,y_j)$ $(i,j,k=1,2)$ が

$$\mathrm{pr}(z_1|x_1\,,\,y_1)=1/2\,,\quad \mathrm{pr}(z_1|x_1\,,\,y_2)=1/2$$

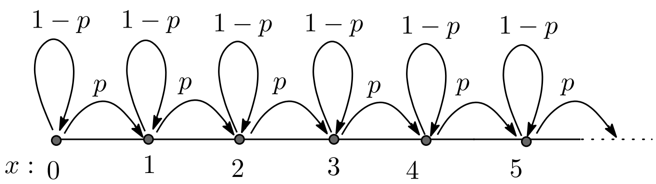
$$\mathrm{pr}(z_1|x_2\,,\,y_1)=1/2\,,\quad \mathrm{pr}(z_1|x_2\,,\,y_2)=2/5$$

で与えられるとき,「X と Y は独立であるが, Z を与えたとき X と Y は条件付き独立ではない」ことを示せ. ここに, Z を与えたとき X と Y が条件付き独立であるとは,「X,Y,Z のとりうる任意の値 (x,y,z) に対して　$\mathrm{pr}(x,y|z)=\mathrm{pr}(x|z)\,\mathrm{pr}(y|z)$　が成り立つ」ことをいう.

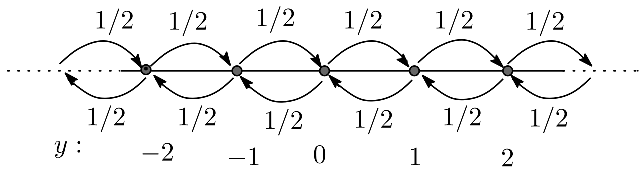
(大阪大 2005)　　(m20053511)

0.226 確率的な駒の移動について，以下の設問に答えよ.（必ず導出の過程を示すこと.）

(1) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 t における駒の位置を x とするとき，確率 p で 1 つ右 $x+1$ に移動し，確率 $1-p$ でその場に留まるものとし，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ の駒の位置を確率変数 X_t で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ および各 $x=0,1,2,\cdots$ に対し $P(X_t=x)$ を表す式を求めよ．



(2) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 t における駒の位置を y とするとき，確率 1/2 で 1 つ右 $y+1$ に移動し，確率 1/2 で 1 つ左 $y-1$ に移動するものとして，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ の駒の位置を確率変数 Y_t で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ および各 $y=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ に対し $P(Y_t=y)$ を表す式を求めよ．



(大阪大 2006)　　(m20063507)

0.227 X と Y は独立な確率変数で共に次の指数分布に従うものとする．すなわち，分布密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\leqq 0\end{cases}$$ であるものとする．ただし，$\lambda>0$.

(1) $X<Y$ となる確率 $P(X<Y)$ を求めなさい．

(2) $\min\{X,Y\}$ の分布密度関数を求めなさい．ただし，$\min\{x,y\}$ は x と y のうち，大きくない方を表す．

(3) $a<b<0$ のとき，確率 $P(a<X-Y<b)$ を求めなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063511)

0.228 あるパーティで，n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1,n)$ とする．参加者に 1 番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする．

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ．

(2) $i_1,i_2,\cdots,i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする．事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ．

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く．2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1\cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1\cup A_2)$ と書く．

このとき $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$ である．一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)$ は

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)=\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l-1}S_l \qquad \text{(i)}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \qquad \text{(ii)}$$

である．ただし，式 (ii) の右辺の $\sum$ は，N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する．特に $l = 1$ のときは $S_1 = \sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である．式 (i) を数学的帰納法で示せ.

(4) $Q(1, n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \dfrac{1}{j!}$ を示せ.　　(5) $\lim_{n\to\infty} Q(1, n)$ を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073508)

0.229 X, Y を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち，　$W = X + Y$，$Z = |W|$　である．$N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$　で定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 確率変数 W の分布を求めよ.

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ.

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073512)

0.230 10 枚の赤いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．また，それらとは別の 10 枚の青いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 赤いカードと青いカードを 1 枚ずつ引き，赤いカードの数字 a が 10 の位を，青いカードの数字 b が 1 の位を表すものとし，2 枚のカードで表される数を N とする．例えば，$a = 5$, $b = 3$ なら $N = 53$ を表すものとする．ただし，$a = 0$ なら N は 1 桁の整数を表すものとする．例えば，$a = 0$, $b = 6$ なら $N = 6$ を表し，$a = 0$, $b = 0$ なら $N = 0$ を表すものとする．このように，a, b の組で $0 \leq N \leq 99$ の数字を表すものとする．このとき，$N = (a + b)^2$ となるような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ.

(2) いま，コインを k 枚所持しているものとする．赤いカードと青いカードから 1 枚ずつカードを引いて，もし赤いカードの数字 a が青いカードの数字 b より大きければコインが 1 枚増え，a が b より小さければコインが 1 枚減るものとする．a と b の値が等しい場合，コインの枚数は増減しないものとする．引いた赤いカードと青いカードは毎回元に戻すものとする．この操作をコインの枚数が 10 枚になるか 0 枚になるまで繰り返すゲームを考える．コインが 10 枚になればゲームを勝利したものとし，0 枚になればゲームに敗北したものと考える．コインを k 枚所持している時にゲームに勝利する確率を P_k $(0 \leq k \leq 10)$ とする.

(2-1) P_{k-1}, P_k, P_{k+1} $(1 \leq k \leq 9)$ の間に成り立つ関係式を求めよ.

(2-2) P_k を k の関数で表せ $(1 \leq k \leq 10)$.

(2-3) このゲームでは，最初コインを k 枚 $(1 \leq k \leq 9)$ 所持して勝利した場合に $(10 - k)^2$ の得点が得られるとする．このとき，コインを何枚所持している状態からゲームを始めると，ゲームを終了した際の得点の期待値が最も大きくなるか，そのときの k の値を求めよ.

(大阪大 2008)　　(m20083503)

0.231 X, Y を確率変数，a, b を実数とし，各 a に対して期待値 $E[\{Y - (aX + b)\}^2]$ を最小にする b の値を $B(a)$，そのときの最小値を $\varphi(a)$ とする．ただし，X の分散 $V(X)$ は正であるとする.

(1) $B(a)$ を a, $E[X]$, $E[Y]$ を用いて表せ.

(2) $\varphi(a)$ を最小にする a の値 $\widehat{a}$，その時の最小値 $\varphi(\widehat{a})$，および $B(\widehat{a})$ を求めよ．

(3) $\widehat{Y} = \widehat{a}X + B(\widehat{a})$ とおくとき，Y の分散は $V(Y) = V(\widehat{Y}) + E[(Y - \widehat{Y})^2]$ となることを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083507)

0.232 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{-1} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0\,,\ \mu \in \mathbb{R}\,,\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとし，$Y = \log X$ とする．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n = E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2} = \mu g_{n+1} + (n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ のとき，$E[(Y - \mu)^n]$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093508)

0.233 部品 A および部品 B 一つずつで構成される製品を製造する工場がある. 部品 A は確率 p $(0 < p < 1)$ で不良品であり, 部品 B は確率 q $(0 < q < 1)$ で不良品である．部品 A および部品 B が不良品であるかどうかは独立である. また, 不良品は工場から出荷できないものとする. 工場で n 個の製品を製造したとする. 以下の設問に答えよ. なお, 必ず導出の過程を示すこと.

(1) n 個すべての製品を出荷できる確率を求めよ.

(2) n 個のうち m 個の製品を出荷できる確率 $P(m)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} P(m)$ を求めよ.

(4) 出荷できる製品の個数の期待値 E を求めよ.

(5) $n = 1000$, $p = 0.01$, $q = 0.02$ として, 確率 $P(m)$ を最大化する m を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103507)

0.234 確率変数 X は 0 または 1 の値をとり $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$ $(0 < p < 1)$ であるとする．また，$X = x$ $(x = 0, 1)$ が与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布がそれぞれ以下の二項分布であるとする（m は正の整数，$0 < q_0 < q_1 < 1$）．

$$P(Y = y \,|\, X = 0) = {}_mC_y {q_0}^n (1 - q_0)^{m-y} \quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

$$P(Y = y \,|\, X = 1) = {}_mC_y {q_1}^n (1 - q_1)^{m-y} \quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

ここで ${}_mC_y = \dfrac{m!}{y!(m-y)!}$ は二項係数である．

(1) $Y = y$ $(y = 0, 1, 2, \cdots, m)$ が与えられたとき，$X = 1$ となる条件付き確率 $P(X = 1 \,|\, Y = y)$ を求めよ．

(2) $P(X = 1 \,|\, Y = y) > p$ となるような y の範囲は p によらないことを示せ．

(3) $m = 10$，$q_0 = \dfrac{1}{2}$，$q_1 = \dfrac{3}{4}$ のとき，$P(X = 1 \,|\, Y = y) > p$ となるような y の値をすべて求めよ．

ただし，$\dfrac{\log 2}{\log 3} = 0.631$ とする．

(大阪大 2011)　　(m20113511)

0.235 正八面体のサイコロがある．各面には 0 から 7 までの整数のうち 1 つが書かれており，各面の数字は互いに異なる．また，このサイコロを振った時に，各面は等確率で出るものとする．このサイコロを n 回振り，出た目を順に小数点以下に並べた数を x_n とする．ただし，x_n の整数部分は 0 とする．例えば，$n=4$ で，出た目が順に $5,0,7,3$ であるなら，$x_4=0.5073$ となる．n が 2 以上の偶数であるとき，$x_n<\dfrac{8}{33}$ となる確率を p_n とする．以下の設問に答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) n が 4 以上の偶数であるとき，p_n を p_{n-2} と n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123507)

0.236 X と Y を平均を 0 とする確率変数とし，その線形結合を $Z=aX+bY$ とおく．ただし，a と b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数である．X^2, Y^2, XY の期待値を $E[X^2]=1$, $E[Y^2]=1$, $E[XY]=\rho$ とおく．ただし $\rho>0$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) Z^2 の期待値 $E[Z^2]$ を最大にする (a,b) の組み合わせ (a_1,b_1) と最小にする (a,b) の組み合わせ (a_2,b_2) を求めよ．

(2) 問 (1) で求めた (a_1,b_1) と (a_2,b_2) に対して期待値 $E\left[(a_1X+b_1Y)^2\right]$ と $E\left[(a_1X+b_1Y)(a_2X+b_2Y)\right]$ を求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123511)

0.237 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x)=C_kx^{k-1}e^{-x}\ ,\quad (x\geq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\displaystyle\int_0^\infty p(x)dx=1$ で定まる正の数とする．

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t\geq 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数列 $X_1,\cdots,X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t)=E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}]\ ,\quad (t\geq 0)$$

を求めよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.238 1 から 6 の目が等確率で出るさいころに関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つのさいころを 5 回振るとき，ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

(2) 区別のできない 5 つのさいころを同時に振るとき，ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

(3) さいころを振って 3 以上の目が出たら 4 点を，2 以下の目が出たら 1 点を得る．さいころを n 回振った時までに得た点数の合計が偶数である確率を P_n とする（ただし，n は 0 以上の整数とし，$P_0=1$ とする）．このとき，以下の (a)〜(c) に答えよ．

(a) P_1, P_3 を求めよ．

(b) P_{n+1} を P_n で表せ．

(c) P_n を求めよ．

(大阪大 2014)　　(m20143503)

0.239 N を自然数とする．ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある．ボタンを離すと表示された数字は消える．それぞれの数字は等確率で表示される．ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1, \cdots, X_n$ とし，これらは互いに独立な確率変数とする．$T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおき，T を用いて N を推定したい．事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $P(T \leq t) = \left\{P(X_1 \leq t)\right\}^n \quad (t = 1, \cdots, N)$ を示せ．

(2) $P(T = t) \quad (t = 1, \cdots, N)$ を求めよ．

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ．

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ．

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014)　　(m20143507)

0.240 コンピュータがウイルスに感染し，ウイルス対策ソフトがウイルスを駆除する確率について，次のようなモデルを用いて考える．

- 初期状態でコンピュータはどのウイルスにも感染していない．
- コンピュータは毎朝，確率 $p(0 < p < 1)$ で新たなウイルスに感染する．
- コンピュータが感染している場合，ウイルス対策ソフトが毎夕に駆除を試みる．駆除が成功すると，その時点で感染しているすべてのウイルスが駆除される．ただし，駆除は確率 $q(0 \leq q \leq 1)$ で失敗する．

なお，コンピュータがウイルスに感染した場合やウイルスの駆除に成功あるいは失敗した場合でも，以降の感染確率 p と駆除失敗確率 q に一切影響を与えないものとする．

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) コンピュータが $n(n \geq 1)$ 日目の終わりにウイルスに感染している確率を $p(n)$ とする．

(a) $P(1)$ を求めよ．

(b) $P(2)$ を求めよ．

(c) $P(n)$ を求めよ．

(2) n 日目の終わりまでに一度も感染しない確率を求めよ．

(3) 1 日目に感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(4) $i(1 \leq i \leq n)$ 日目に初めて感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153507)

0.241 m を 6 以上の偶数，n を $3 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす自然数とする．正 m 角形の m 個の頂点に，時計回りに $1, 2, 3, \cdots, m$ と番号をふる．この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る．ただし，頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $m = 8$ のとき，辺上，または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ．

(2) n 角形が，辺上，または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする．$P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ．また，$\lim_{m \to \infty} P_{n,m}$ を求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163503)

0.242 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0)$，$(0, \sqrt{2})$，$(-\sqrt{2}, 0)$，$(0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1，X_2，$\cdots$，X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ．

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ．
また，$F(x) = \int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ．

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.243 以下の問題に対して全て有効数字 3 桁で答えよ．

(1) 次の問いに答えよ．

(1-1) 区間 [1, 6] 上の一様分布の平均を求めよ．

(1-2) ある企業の工場 A，B，C が不良液晶ディスプレイを製造する確率はそれぞれ 5%，4%，2% である．その企業で生産される全液晶ディスプレイの 40% が工場 A で，40% が工場 B で，20% が工場 C で製造されている．もしその企業の液晶ディスプレイの中から取り出した一台が不良品だったとき，その不良液晶ディスプレイが工場 A で製造されたものである確率を求めよ．

(2) 200 人が受験した試験において無作為に 5 名の受験生を抽出した所，以下の標本を得た．次の問いに答えよ．

	学生 A	学生 B	学生 C	学生 D	学生 E
数学の得点	50	50	50	50	60
電磁気学の得点	90	60	70	75	80

(2-1) 数学の得点の標本平均 $\overline{x}$，標本分散 s_x^2，不偏分散 u_x^2 を求めよ．

(2-2) 数学の得点の母分散が $\sigma_x^2 = 45$ の場合，母平均 μ_x の 95% 信頼区間を求めよ．数値計算に際して，必要ならば標準正規分布表を用いよ．

(2-3) 数学と電磁気学の得点の相関係数 ρ を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183504)

0.244 1 から N まで異なる番号が振られた N 個の地点があるとする．最初に無作為にスタート地点を選ぶ．その後，無作為に選んだ現在とは異なる地点へと移動を繰り返す．このとき，以下の設問に答えよ．なお，k は N 未満の自然数とする．

(1) 異なる k 個の地点を回った状態から，m 回目の移動ではじめて今までに移動したことのない新たな地点へ移動する確率を求めよ．

(2) 異なる k 個の地点を回った状態から，今までに移動したことのない新たな地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．

(3) N 個すべての地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．ただし，スタート地点の選択も 1 回と数える．

(大阪大 2018)　　(m20183507)

0.245 (1) ある病気の検査をすると，この病気の罹患者が陽性（その病気である）と判定される確率は 2/3 である．一方，非罹患者が誤って陽性と判定される確率は 1/3 である．また，母集団に対してこの病気に罹患している割合は 1/10 とする．

(a) この母集団から無作為に選ばれた A さんが，検査により陽性と判定された．このとき，A さんがこの病気に罹患している確率を求めよ．

(b) A さんが同じ検査を何度も受ける．このとき，最低何回連続して陽性と判定されると，A さんの罹患確率が 9/10 以上となるか求めよ．ただし，この検査により陽性と判定されるかどうかは，検査ごとに互いに独立であるとする．

(2) 農作物 A, B の収穫量は，その年の夏の暑さのみに依存して変動する．A の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 20 トン，平年並みの場合は 8 トン，冷夏の場合 0 トンとなる．B の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 0 トン，平年並みの場合は 10 トン，冷夏の場合 38 トンとなる．来年の夏が猛暑，平年並み，冷夏となる確率がそれぞれ 1/2, 1/4, 1/4 と予想されている．

(a) 来年の A と B の単位面積あたりの収穫量の期待値と分散をそれぞれ求めよ．

(b) 暑さに左右されず，安定した収穫量が得られるように A と B の作付面積の比を決定したい．いま，総作付面積のうち，A を作付ける割合を x，B を作付ける割合を $1-x$ とするとき，単位面積あたりの A と B をあわせた収穫量の期待値と分散を求めよ．また，分散が最も小さくなる割合 x を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193504)

0.246 外見や重さなどでは区別できない 2 枚のコイン A, B がある．コインを投げると必ず表か裏がでるものとし，コイン A を投げたときに表が出る確率は a $(0 < a < 1)$ であり，コイン B を投げたときに表が出る確率は $1-a$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 2 枚のコインを同時に投げたとき，2 枚とも表である確率を求めよ．

(2) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(3) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインをもう 1 回投げたとき表が出る確率を求めよ．

(4) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに N 回投げてみたところ表が n 回出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193507)

0.247 以下 n を与えられた自然数とする．

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ．

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある．これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする．

与えられた実数 α, β に対し，　$d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1+\alpha^2}}$　$(i = 1, \cdots, n)$　とおく．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を α, β, γ, n で表せ．

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする．$m(\alpha)$ を与える β を求めよ．

(c) $\alpha,\ \beta$ を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする．m を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193511)

0.248 (1) 次の表に示すデータ $x,\ y$ について，以下の問いに答えよ．

	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
x	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

(1-1) データ $x,\ y$ の分散 $S_{xx},\ S_{yy}$ および共分散 S_{xy} をそれぞれ求めよ．

(1-2) データ x と y の相関係数を r とするとき．r^2 の値を求めよ．

(1-3) x を説明変数，y を目的変数とするとき，データ $x,\ y$ の回帰直線の式を求めよ．

(2) テレビの視聴率について，以下の問いに答えよ．
ただし，$0 < \alpha < 1$ である値 α と標準正規分布に従う確率変数 Z について
$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる z_α を考える．このとき，
$z_{0.050} = 1.645,\ z_{0.025} = 1.960,\ z_{0.010} = 2.326,\ z_{0.005} = 2.576$ とする．

(2-1) 無作為に抽出された 900 世帯について調査したところ，180 世帯がある番組を視聴していた．
この番組の視聴率 p を信頼係数 95% で推定せよ．
ただし，信頼限界は小数第三位まで求めよ．

(2-2) 95% の信頼区間の幅を 0.05 以下にするためには，何世帯以上調査すればよいか答えよ．

(大阪大 2020)　　(m20203504)

0.249 N を 6 以上の自然数とする．1, 2, $\cdots$, N から異なる 6 個の数を無作為に選ぶ．選んだ数を大きい順に $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $N = 10$ のとき，$X_4 = 6$ となる確率を求めよ．

(2) $N \geqq 6$ に対して，$X_4 = 5$ となる確率 $p(N)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた確率 $p(N)$ を最大にする自然数 N を求めよ．また，そのときの $p(N)$ の値を求めよ．

(大阪大 2020)　　(m20203507)

0.250 (1) ある感染症に対して一定の精度で陽性か否かを診断する検査法があるものとする．A を検査結果が陽性となる事象，B を被検査者が実際に感染症にかかっている事象とする．また，確率 $P(B) = 0.1$ とする．B が起こったとき A が起こる条件付き確率を $P(A|B)$ と表す．

(a) $P(A|B) = 0.9,\ P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = 0.9$ であるとき，$P(B|A)$ を求めよ．ただし，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ はそれぞれ A と B の余事象を表す．

(b) $P(A|B) = P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ とおく．$P(B|A) \geq 0.95$ となる t の範囲を求めよ．ただし，t は小数第三位まで答えるものとする．

(2) 正規分布に従う母集団から 10 個の標本を無作為に抽出したところ，その標本平均は 100.8，標本分散は 8.56 であった さらに，これを A 群，B 群の二つの群に分けたところ，A 群の標本は $\{97,\ 103,\ 102,\ 106\}$ であった．以下の問いに答えよ．ただし，解答は有理数または小数第一位までの数値で答えるものとする．

(a) A 群の不偏分散を求めよ．

(b) B 群の不偏分散を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213505)

0.251 赤玉 6 個，白玉 4 個の合計 10 個の玉が入っている袋がある．まず 1 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した玉は袋に戻さず，さらに 2 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，各試行において同時に 3 個の玉を取り出す取り出し方は同様に確からしいものとする．

(1) 1 回目の試行で赤玉 3 個が取り出される確率を求めよ．

(2) 1 回目の試行で赤玉 2 個，白玉 1 個が取り出される確率を求めよ．

(3) 1 回目の試行で取り出された赤玉の数と 2 回目の試行で取り出された赤玉の数が同じになり，かつ 1 回目の試行で取り出された白玉の数と 2 回目の試行で取り出された白玉の数が同じになる確率を求めよ．

(大阪大 2021) (m20213508)

0.252 (1) 100 円玉 2 枚，10 円玉 4 枚，5 円玉 6 枚が入った財布から，同時に 3 枚の硬貨を取り出す．いずれの硬貨を取り出すのも同様に確からしいとする．

(1-1) 取り出した 3 枚の金額の合計が 115 円である確率を求めよ．

(1-2) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上である確率を求めよ．

(1-3) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上になる事象を A，取り出した 3 枚の中に 10 円玉が含まれる事象を B とした場合の条件付き確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 次の表は，ある試験の結果である．各教科の得点分布は，それぞれ正規分布に従うものとする．

教科	受験者数（人）	平均（点）	標準偏差（点）
数学	400	60.0	15.2
国語	500	119.7	30.1
英語	600	120.3	20.6
物理	200	50.8	8.0
歴史	100	65.8	11.5

(2-1) この試験を受験した S 君の得点は，数学 85 点，国語 151 点，英語 135 点，物理 67 点，歴史 81 点であった．数学，国語，英語，物理，歴史を S 君の偏差値が高い順に並べよ．

(2-2) S 君の数学の得点が 85 点である場合，数学における S 君の上からの順位に最も近いものを 10 位，20 位，50 位，100 位，150 位の中から 1 つ選択し，理由と共に示せ．必要ならば以下に示す標準正規分布表を用いよ．
（標準正規分布表 $P(0 \leq Z \leq z)$ は省略）

(大阪大 2022) (m20223504)

0.253 コインを投げたとき，表が出る確率が $p\left(0 < p < 1,\ p \neq \dfrac{1}{2}\right)$ であるコイン A と，表が出る確率が $1-p$ であるコイン B が 1 枚ずつある．ただし，p は常に一定である．また，コイン A とコイン B は見た目や重さでは判別できない．以下の設問に答えよ．

(1) コイン A とコイン B を同時に投げたとき，2 枚とも表が出る確率を求めよ．

(2) ある競技において，2 名の競技者がいずれも公平に権利を得られるような抽選の仕組みを考えたい．コイン A またはコイン B，またはその両方を用いて，実現可能な方法を理由とともに一つ述べよ．

(3) N を正の整数とする．コイン A とコイン B を中身の見えない袋に入れる．その袋からコインを 1 枚無作為に取り出し表裏を確認後，コインを袋に戻す試行を N 回繰り返したところ，N 回とも表が出た．このとき，投げたコインが全て A であった条件付き確率を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223507)

0.254 定数 C は正の実数とし，確率変数 X は $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ を確率密度関数にもつとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) 確率変数 Y を $Y = \cos X$ によって定める．このとき，Y の期待値と分散を留数定理を用いることによって求めよ．

(大阪大 2022) (m20223508)

0.255 確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = \begin{cases} c(x^2-2x) & , \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \\ 0 & , \quad \text{それ以外のとき} \end{cases}$

であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 定数 c の値を求めよ． (2) 期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$ を求めよ．

（大阪府立大 2001） (m20013606)

0.256 サイコロを 4 回投げて, 出た目の数を順に a_1 , a_2 , a_3 , a_4 とする．

(1) a_1 , a_2 の最大値が 1 となる確率 p_1 を求めよ．

(2) a_1 , a_2 の最大値が 2 となる確率 p_2 を求めよ．

(3) a_1 , a_2 の最大値が 3 となる確率 p_3 を求めよ．

(4) 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のスカラー倍となる確率 p_4 を求めよ．

(5) 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ が正則となる（すなわち, 逆行列をもつ）確率 p_5 を求めよ．

(関西大 2005) (m20053703)

0.257 7 人の大学新入生の身長を測り、次のデータが得られた．

$\{170,\ 176,\ 172,\ 168,\ 178,\ 173,\ 174\}$ （ 単位は cm ）

(1) 平均を求めなさい． (2) 分散を求めなさい．

(鳥取大 2007) (m20073921)

0.258 確率変数 N はポアソン分布 $P(N=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$

に従うとする．このとき，N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^\lambda = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007) (m20073922)

0.259 ある工業製品の故障の発生時間 X は，次式の確率密度関数をもつ指数分布に従っているという．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.0005e^{-0.0005x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

(1) 故障の発生時間 X（単位は時間 (hours)）の平均値を求めなさい．

(2) この製品が 2000 時間以内に故障が発生しない確率を求めなさい．ただし，$e \fallingdotseq 2.718$ とする．

(鳥取大 2008) (m20083909)

0.260 ある製品の切断寸法は，正規分布に従っているという．いま，9 個の切断寸法を測定して，次のデータを得た（単位は cm）．

$$\{4.8 \quad 5.3 \quad 4.7 \quad 5.5 \quad 5.6 \quad 4.9 \quad 5.8 \quad 5.1 \quad 4.5\}$$

(1) 平均値を計算しなさい．　(2) 分散を計算しなさい．

(3) 切断寸法のねらい値は 5.0(cm) である．また，切断寸法の分散 σ^2 は従来から $\sigma^2 = 0.4^2$ であるという．切断寸法の平均値がねらい値どおりと言えるかどうか，危険率 5%で検定しなさい．ただし，危険率 5%のときの標準正規分布における検定の棄却域 z は，$|z| > 1.96$ である．

(鳥取大 2008)　(m20083910)

0.261 試行毎の確率 p，試行回数 N の二項分布 $P(n) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$ は，$p \ll 1$，$n \ll N$ の場合に平均値 $s = Np$ のポアソン分布 $P(n) = \dfrac{1}{n!}s^n e^{-s}$ に近付くことを示せ．必要なら $e^{-p} \approx 1-p \quad (p \ll 1)$ を用いてよい．

(広島大 2013)　(m20134105)

0.262 袋の中に白玉４個，赤玉６個が入っている．同時に４個取り出すとき，２個が白玉，２個が赤玉である確率を求めよ．

(山口大 1999)　(m19994305)

0.263 A さんがある花の種を多数まいたところ，赤，白，黄，紫の色の花がそれぞれ比率（２：２：１：１）で咲いた．A さんから１粒の種をもらって育てた．

以下の問いに答えなさい．ただし，種は外見が同じで区別がつかないものとする．

(1) 花の色が赤色かまたは白色になる確率を求めなさい．

(2) 赤，黄色の花を B グループ，白，紫色の花を C グループとする．花の色が B グループになったときに得られる情報量を求めなさい．(途中の計算式も求めなさい．)

(山口大 2002)　(m20024305)

0.264 ある町の１日における天気（晴，雨）と交通事故発生（有，無）について，1 年間のデータを調べたところ，その同時確率が次の表のようになった．

	事故無	事故有
晴	0.4	0.2
雨	0.3	0.1

(1) 天気が雨であることを条件とみなして事故が発生する条件付確率を求めなさい．

(2) ある日のデータを見ると事故が発生していた．このとき，天気が晴であった確率を求めなさい．

(3) ある日の天気の晴雨いずれかを知ったときに得られる情報量を求めなさい．
ただし，$\log_2 10 = 3.32$, $\log_2 3 = 1.58$ とし，途中の計算式も書きなさい．

(山口大 2007)　(m20074302)

0.265 １つのさいころを続けて振るとき，以下の問いに答えよ．

(1) k 回目に初めて 1 の目が出る確率 p_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ．

(2) k 回目に２度目の 1 の目が出る確率 q_k $(k = 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(九州大 2000)　(m20004704)

0.266 1つのサイコロを続けて投げる動作を考える．偶数の目が k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）回出た時点で，この動作を終了するとする（必ずしも連続して k 回出る必要はない）．このとき，n 回目で動作が終了する確率を，$p_n(k)$, $n \geq k$ とする．次の問に答えよ．

(1) $k=5$ とした，$p_n(5)$ を求めよ（n を用いて $p_n(5)$ を表現せよ）．

(2) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，$p_n(k)$ を求めよ（n と k を用いて $p_n(k)$ を表現せよ）．

(3) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，確率 $p_n(k)$ を最大にする n をすべて求めよ（k を用いて n を表現せよ）．

(九州大 2003)　　(m20034709)

0.267 ある銀行には, 1 分間あたり平均で 0.2 人の来客がある. 来客の到着がランダムであると考えると, 単位時間あたりの来客数は, ポアソン分布に従うことが知られている. この銀行の場合, 1 分間あたりの来客数は $\lambda=0.2$ のポアソン分布に従う. ポアソン分布の式は, 次式で与えられる.

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

(1) 1 分間の来客数が 4 である確率はいくらか.

(2) 1 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(3) 5 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(4) 3 分間に来客が 1 人だけ来る確率はいくらか.

(九州大 2005)　　(m20054704)

0.268 連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ．

$$P_X(a)=\begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

(1) X が値 X_0〜X_1（ただし，$X_0 < X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ．

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ．　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ．

(4) X の平均を求めよ．　(5) X の標準偏差を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074704)

0.269 あるセルフサービスのカフェテリアでは，昼に 3 種類のランチメニューがある．客は順番に並んで, メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする．N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする．($i,j=1,2,3$, a_{ij} は N に依存しない.) 一方，N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く．

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i \neq j$ である時 $a_{ij}=q$ (q は i, j によらない正の数, $q>0$)　$a_{ii}=p$ (p は i によらない正の数 , $p>0$) とする．このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ.

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする．

$$F=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i=1,2,3)$ と q で表す公式を求めよ．

(5) (2) の仮定のもとで $\lim_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.270 A 君と B 君はそれぞれコインを a 枚，b 枚持っている．2 人のコインの合計枚数を $N(N=a+b,\ N>0)$ とする．中を見ることてができない箱の中に，$p:(1-p)$ の割合で赤いボールと白いボールが入っており，そこから 1 個のボールを取り出す．ただし，$0<p<1$ とする．赤いボールがでたら A 君が B 君からコインを 1 枚受け取り，白いボールがでたら A 君が B 君にコインを 1 枚渡す．コインの受け渡し後，取り出したボールは元の箱の中に戻すものとする．この操作を繰り返し，A 君，B 君のどちらか一方のコインが無くなった時点で，無くなった方を負けとする．A 君が a 枚のコインを持っている時に A 君が負ける確率を $R(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $R(0)$ と $R(N)$ はそれぞれいくつか.

(2) A 君が a 枚コインを持っている時に赤いボールを取り出せば，$R(a)$ であった A 君の負ける確率が $R(a+1)$ となり，白いボールを取り出せば $R(a-1)$ となる．このことから $R(a)$ を $R(a+1)$，$R(a-1)$，p を用いて表せ．ただし，$0<a<N$ とする．

(3) $R(0)$ として (1) で求めた値を利用し，さらに $R(1)=r_1$ とするとき，(2) で求めた関係式から $R(a)$ を求めよ．

(4) (1) で求めた $R(N)$ と (3) の結果を用いて $r_1(=R(1))$ を求めよ．

(5) a を変えずに $b\to\infty$ とした時の $R(a)$ を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084705)

0.271 サイコロを 5 回続けて投げる. k 回目に出る目の数を X_k とする. 出た目の和を Y とし, 出た目の積を Z とする. つまり, $Y=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ で, $Z=X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_4\cdot X_5$ とする.

(1) $Y=5$ である確率を求めよ.

(2) $Y=6$ である確率を求めよ.

(3) $Y=7$ である確率を求めよ.

(4) Z が 3 の倍数になる確率を求めよ.

(5) サイコロが 5 回とも同じ目の時には 10000 点もらえ, サイコロが 4 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 1000 点もらえ, 3 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 100 点もらえる. それ以外の場合はもらえないとする. この時もらえる点数の期待値 E を求めよ. また E の小数第 1 位を四捨五入した値も求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104704)

0.272 トランプ 52 枚は，$1,2,\cdots,13$ の札がそれぞれ 4 枚ずつから構成される．トランプ 52 枚をよく切ってから 1 枚を抜いて戻すことを 3 回繰り返し，それらの札を a_1,a_2,a_3 とする．トランプ 52 枚をよく切ってから一度に 3 枚抜き，それらの札を b_1,b_2,b_3 とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_1,a_2,a_3 がすべて絵札である確率を示せ．ただし絵札とは，$11,12,13$ の札である．

(2) b_1,b_2,b_3 がすべて絵札である確率を示せ.

(3) b_1,b_2,b_3 の合計値が 37 以上である確率を示せ.

(4) b_1,b_2,b_3 の合計値が 37 以上であるとき，b_1,b_2,b_3 の少なくとも 1 枚が 12 である条件付き確率を示せ.

(5) a_1,a_2,a_3 の少なくとも 1 枚が絵札であるとき，a_1,a_2,a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

(6) a_1, a_2, a_3 の少なくとも 1 枚が 12 であるとき，a_1, a_2, a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

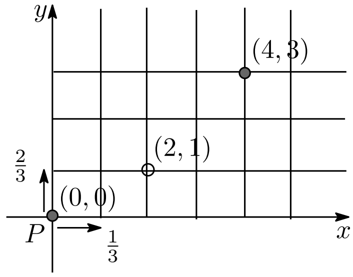
(九州大 2013)　　(m20134704)

0.273 点 P は原点 $(0,0)$ から開始し，平面格子点上を移動する．1 回の移動において，

P は確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸の正の方向に 1 移動し，

確率 $\dfrac{2}{3}$ で y 軸の正の方向に 1 移動する．

以下の問いに答えよ．



(1) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方の数を求めよ．

(2) 点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する確率を求めよ．

(3) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，
点 $(2,1)$ を通らない通り方の数を求めよ．

(4) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，点 P の座標 (x,y) が移動中常に $4y \leq 3x$ を満たす通り方の数を求めよ．

(5) 点 P の座標 (x,y) が 7 回の移動中常に $4y \leq 3x$ を満たすとき，点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する条件付き確率を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154705)

0.274 表が出る確率が θ のコインを繰り返し投げ，表を 1，裏を 0 として結果を $0110\cdots$ のように順に記録していく．ここで，$0<\theta<1$ である．初めてパターン“01”が現れるまでの待ち時間を T で表す．例えば $1001\cdots$ ならば $T=4$，また，$000001\cdots$ ならば $T=6$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $T=3$ となる確率 $p(3)$ を θ の多項式で表せ．

(2) $T=5$ となる確率 $p(5)$ を θ の多項式で表せ．

(3) $T=t \quad (t \geqq 2)$ となる確率 $p(t)$ を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174707)

0.275 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x|>2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$　は次の漸化式　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$　を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

0.276 確率 p $(0<p<1)$ で表の出るコインを用いて 1 人のプレイヤーが行うゲームを考える．プレイヤーは持ち点を k (k は正の整数) としてゲームを開始し，コイントスを行って表が出れば持ち点が 1 増え，裏が出れば持ち点が 1 減る試行（ラウンドと呼ぶ）を繰り返す．持ち点が n になればプレイヤーの勝利でゲームは終了し，持ち点が 0 になればプレイヤーの敗北でゲームは終了する．ただし n は k より大きい整数とする．持ち点 k から開始して勝利する確率を P_k で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $n=4$ の時，p を用いて P_2 を表せ．

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ とし，$n \geq 4$ とする．この時，$k=2,\cdots,n-2$ に対しては $P_k = pP_{k+1}+(1-p)P_{k-1}$ が成り立つことを用いて，P_k を求めよ．

(3) $p=\dfrac{1}{3}$ とする．また，$k \geq 3$ として，$n=k+2$ とする．この時，6 ラウンド以内にプレイヤーが勝利する確率を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194703)

0.277 確率 $p(0<p<1)$ で表，確率 $1-p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0,1,\cdots,n\})$ となる確率 $P(X=k)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X]=np$ が成り立つことを示せ．

(3) λ を正の定数として $p=\dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい．

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.278 n は 2 以上の自然数とし，k は 1 以上 n 未満の自然数とする．n 個の相異なる自然数 $1,\cdots,n$ の順列すべての中から等確率で選んだものを $(X_1,\cdots,X_n)$ とする．いま，k 番目までの自然数 $X_1,\cdots,X_k$ の中の最小のものを Y で表す．次に，$k+1$ 番目以降の自然数 $X_{k+1},\cdots,X_n$ の中で Y より小さいもののうち添え字が最小のものを X_j として，$Z=X_j$ とする．そのような X_j が存在しない場合は $Z=X_n$ とする．このとき，$Z=1$ の確率 $P_n(k)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $i \in \{1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の確率を求めよ．

(2) $i \in \{k+1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の条件の下で，$X_1,\cdots,X_{i-1}$ の中の最小値の自然数が Y である条件つき確率を求めよ．

(3) $P_n(k)$ を求めよ．解答には関数 $H(m)=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\frac{1}{\ell}$ を用いてよい．

(4) $P_{10}(k)$ を最大にする k と，その k に対する $P_{10}(k)$ の概数を求めよ．$H(9)=2.829$ を用いてよい．

(九州大 2022)　　(m20224703)

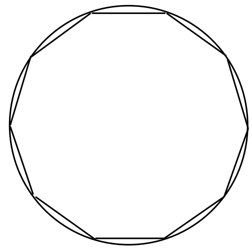
0.279 図 2 に示すように半径 1 の円に内接する正十角形の頂点を次の手順で 1 つずつ選び, 合計 3 個選ぶ.

- 10 個の頂点から勝手に 1 つの頂点を選び, その頂点を P_1 とする.
- P_1 を除いた 9 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_2 とする.
- P_1 , P_2 を除いた 8 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_3 とする.

このとき以下の問に答えなさい.

(1) 頂点 P_1 , P_2 , P_3 を選ぶ際の選び得るすべての場合の数を求めよ.

(2) 上の手順で選んだ P_1 , P_2 , P_3 で三角形を作るとき,
$\triangle P_1P_2P_3$ が直角三角形になる確率を求めよ.



単位円に内接する正 10 角形

(長崎大 2005)　　(m20055005)

0.280 ある県の交通安全週間 7 日間の交通死亡数は以下の表の通りであった. 平均死亡者数とその標準偏差を求めよ.

	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目	5 日目	6 日目	7 日目
死亡者数	0 人	1 人	3 人	6 人	1 人	1 人	3 人

(長崎大 2005)　　(m20055020)

0.281 袋の中に 100 個のくじが入っており，その内 27 個が当りくじである．次のルールに従ってこのくじを引く．

[ルール]

袋の中からくじを 1 つ引き，当りかはずれを確認した後，そのくじを再び袋の中に戻す．

(1) このくじを 2 回引き，どちらもはずれる確率を求めなさい．

(2) このくじを 3 回引き，少なくとも 1 回は当たる確率を小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで求めなさい．

(3) このくじを何回か引いたとき，少なくとも 1 回は当たる確率が 0,9999 よりも大きくなるには，何回以上引く必要があるか．ただし，$\mathrm{Log}_{10}7.3 = 0.8633$ として計算しなさい．Log_{10} は常用対数（底が 10 の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085002)

0.282 熱帯にあるオイスター島には，乾季と雨季の季節だけがあり，この 1000 年において，毎年，乾季の日が 30 %，雨季の日が 70 %の割合で存在するものとする．この島のある日の天気の観測（簡単のため，晴れ，曇り，雨の 3 種類とする）のみから，その日が乾季か雨季であるかの推定を行いたい．もし乾季であれば晴れの日は 80 %，曇りの日は 10 %，雨の日は 10 %の割合である．また，雨季であれば晴れの日は 10 %，曇りの日は 20 %，雨の日は 70 %の割合である．無作為 (random) に選んだある日の天気を観測したところ晴れであったという．この観測をした日が乾季である確率を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085011)

0.283 離散型確率変数 X が m 個の値 x_1，x_2，$\cdots$ x_m を取り，それぞれの値を取る確率を p_1，p_2，$\cdots$，p_m とする $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1\right)$．確率変数 X の期待値を $E(X) = \mu$ とすると，確率変数 X の分散

$V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 p_i$ を $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ と記すことができることを示せ．

(長崎大 2011)　　(m20115018)

0.284 同じ長さの白い棒と赤い棒を 6 本使用して図 1 のような正四面体をつくる．ただし，各辺が白い棒である確率は 1/3，赤い棒である確率は 2/3 とする．以下の (1),(2) に答えよ．

なお，計算結果を求める必要はない．

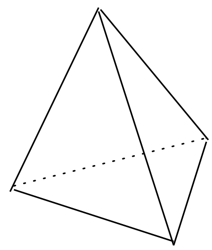


図 1 正四面体

(1) 6 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(2) 3 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(鹿児島大 2015)　　(m20155413)

0.285 10,000,000 人の集団があり，そのうち 100,000 人がウイルスに感染している．この集団に対して検査方法 X を用いて，ウイルスに感染しているどうかを判定する．検査方法 X では感度（感染者が正しく陽性と判定される率）が $\dfrac{7}{10}$ であり，偽陽性の確率（非感染者が間違って陽性と判定される率）が $p\ (0 < p < 1)$ である．この検査を受けて陽性と判定されたとき，その人が感染者である確率を $f(p)$ とする．

(1) 感染者であるかどうかを示す事象を $A = \{\text{infected, uninfected}\}$，検査の判定結果を示す事象を $B = \{\text{pos, neg}\}$ とするとき，以下の確率を求めよ．

1. $P(\text{infected})$
2. $P(\text{uninfected})$
3. $P(\text{pos} \mid \text{infected})$
4. $P(\text{pos} \mid \text{uninfected})$
5. $P(\text{pos})$
6. $P(\text{neg})$

(2) 前問 (1) で得られた確率とベイズの定理を用いて $f(p) = P(\text{infected} \mid \text{pos})$ を計算し，$f(p) \geqq \dfrac{1}{2}$ となるような p の範囲を求めよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225902)

0.286 確率変数 X の確率分布が下表により与えられているとき，X 平均値および分散を求めよ．

X	2	4	6	8
確率分布 P	0.4	0,3	0.2	0.1

(宇都宮大 2007)　　(m20076110)

0.287 相関係数とはどのようなものか説明するとともに，その結果を用いる場合に注意すべき点を 2 つあげよ．

(宇都宮大 2014)　　(m20146103)

0.288 「正規分布」とはどのような分布か説明しなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196107)

0.289 容器に n 個の部品を入れてある．このうち，m 個が不良品で残りが良品である．この容器からランダムに 2 個の部品を取り出したとき，1 個が不良品で 1 個が良品である確率を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046201)

0.290 ある製品において，任意に 1 回抜き出したとき，それが良品である確率が $\dfrac{1}{2}$ とする．このとき，n 回抜き出した結果，良品と不良品が交互に出る確率を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056201)

0.291 ある時間における細胞の増殖速度は，その時，生きている細胞数（または細胞濃度）に比例すると考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 生きている細胞濃度を X[個$/m^3$]，時間を $t[h]$，比例定数を $k[1/h]$ として，次のアおよびイにそれぞれ適切な記号を入れて細胞の増殖をあらわす速度式を完成させなさい．

$$\frac{dX}{dt} = \boxed{\quad ア \quad}\boxed{\quad イ \quad}$$

(2) 時間 $t=0$ における細胞濃度を X_0[個$/m^3$] として，t 時間後のおける細胞濃度をあらわす式を導きなさい．ただし，導出過程も答案用紙に書きなさい．

(3) 比例定数を $k[1/h]$ は比増殖速度と呼ばれる．37℃ における大腸菌の比増殖速度 $k[1/h]$ が 2 であるとき，細胞濃度 X_0[個$/m^3$] が X_0 の 10 倍になる時間を求めなさい．ただし，温度は 37℃ で一定であるとし，$\log_e 10 = 2.302$ とする．

(東京海洋大 2015)　　(m20156404)

0.292 袋の中に，数字 0 の書かれたカードが 2 枚と，数字 1 の書かれたカードが 3 枚入っている．この袋から続けて 2 枚カードを取り出したとき，1 枚目のカードの数字を X，2 枚目のカードの数字を Y とする．このとき，取り出したカードは袋に戻さない．確率 $P(X=1)$ および $P(Y=1)$ を求めなさい．また，X と Y は独立な確率変数といえるか，理由をつけて答えなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076511)

0.293 確率変数 X の確率密度関数が　$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & (\ |x| \leqq 1\ ) \\ 0 & (\ |x| > 1\ ) \end{cases}$
で与えられるとき，$P(X \leqq a) = \dfrac{2}{9}$ となる a の値を求めなさい

(和歌山大 2007)　　(m20076512)

0.294 ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，
$\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．
よって，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)

0.295 トリエンフルエンザに感染している鳥の鳥全体に対する割合を $r(0 \leq r \leq 1)$ とする．ある検査法を用いると，感染している鳥は確率 p で陽性と判定される．一方，感染していない鳥は確率 q で陽性でないと判定される．このとき，次の各問に答えなさい．

(1) 鳥全体から一羽を選び出したとき，その鳥がトリエンフルエンザに感染していて，かつ検査で陽性と判定される確率を求めなさい．

(2) 鳥全体から一羽を選び出したとき，検査で陽性と判定される確率を求めなさい．

(3) 検査で陽性と判定された鳥が実際にトリエンフルエンザに感染している確率を求めなさい．

(4) $p=0.99,\ q=0.99,\ r=0.01$ のとき，検査で陽性と判定された鳥が，実際にトリエンフルエンザに感染している確率を計算しなさい．

(和歌山大 2009)　　(m20096506)

0.296 出る目の確率分布が次の表で与えられるサイコロがある.

出る目	1	2	3	4	5	6	計
確　率	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1

次の問いに答えよ.

(1) このサイコロを 1 回投げたときの出る目の期待値と分散を求めなさい.

(2) このサイコロを 2 回投げたとき, 出る目の積が 6 になる場合の確率を求めなさい.

(3) このサイコロを 3 回投げたとき, 出る目がすべて異なる場合の確率を求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106502)

0.297 次の各問いに答えなさい.

(1) サイコロを 3 回振るとき 1 の目が出る回数を X とする. X の確率分布表を示しなさい.

(2) 確率変数 X が $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ （ $\lambda>0,\ k$ は 0 以上の整数 ）で与えられる確率分布に従うとき, 次の各問いに答えなさい.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$ を示しなさい.

(b) 確率変数 X の平均が λ であることを示しなさい.

(和歌山大 2011)　　(m20116503)

0.298 赤い玉が p（ただし, $0<p<1$）の割合で, 青い玉が q（ただし, $0<q<1-p$）の割合で入っている箱がある. ここから玉を毎回一個取り出し, 玉の色を確認した後すぐに玉を元の箱に戻すことにする. 次の各問いに答えなさい.

(1) 最初に赤い玉が取り出され, 次に青い玉が取り出される確率を求めなさい.

(2) $p=0.2$, $q=0.3$ のときに, 取り出した玉の色が順に『赤青青青赤青』となる確率を求めなさい.

(3) 3 回玉を取り出したとき, 玉の色が全て異なっており, しかも赤い玉と青い玉が含まれている確率を求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126509)

0.299 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれたカードが 10 枚ある. 1 から 6 までの数字が書かれたカードは赤いカードで, 残りは青いカードである. カードを無作為に 1 枚選ぶときの事象 A と事象 B を次とする.

事象 A : 赤いカード

事象 B : 素数のカード

次の各問いに答えなさい.

(1) 選んだカードの数字の期待値 E と分散 V を求めなさい.

(2) $P(A),\ P(B),\ P(A\cap B),\ P(A\cup B)$ の値を求めなさい.

(3) $P(A|B),\ P(B|A)$ を求めなさい.

(4) 事象 A と事象 B は独立かどうか, 調べなさい.

(和歌山大 2013)　　(m20136508)

0.300 コインを 3 回投げたとき, 表の出る回数を X, 表と裏の出る回数の差の絶対値を Y とする. このとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) X と Y が独立であるかどうかを理由とともに答えなさい.

(2) $X+Y$ の確率分布表を求めなさい.

(3) XY の平均と分散を求めなさい.

(和歌山大 2014)　　(m20146510)

0.301 1つのサイコロを繰り返し投げて，同じ目が2回続けて出たら終了するゲームを行う，このとき，次の各問いに答えなさい.

(1) サイコロを投げる回数が k 回 $(k>0)$ になる確率を求めなさい,

(2) サイコロを投げる回数の期待値を求めなさい,

(3) ゲームの終了条件を「同じ目が2回続けて出るか，または n 回 $(n>0)$ 投げたら終了する」と変更した場合の，サイコロを投げる回数の期待値を求めなさい.

(和歌山大 2015)　　(m20156508)

0.302 (1) 事象 A と B は，$P(A)=0.3$ および $P(A\cup B)=0.5$ を満たしているとする．このとき，次の (ア) と (イ) の場合における $P(B)$ の値をそれぞれ求めなさい.

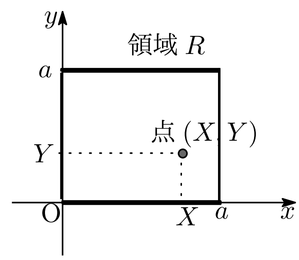
(ア) A と B が排反である場合　　(イ) A と B が独立である場合

(2) 確率変数 X は $1,2,3,4$ いずれかの値をとり，その確率分布は
$P(X=k)=\dfrac{ck}{4}\quad(k=1,2,3,4)$　で与えられるとする．ただし，c は定数である．このとき，つぎの (ア) から (ウ) の値をそれぞれ求めなさい.

(ア) 定数 c の値　　(イ) X の期待値　　(ウ) X の分散

(和歌山大 2016)　　(m20166508)

0.303 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに 1つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X,Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする,



$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\,, & (0\le x\le a,\ \text{かつ},\ 0\le y\le a\ \text{の場合})\\ 0\,, & (\text{それ以外の場合})\end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ の値を求めなさい.

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を用いて，$X\le\dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい.

(3) $Z=X+Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z\ge a$ となるか，すなわち，$Y\ge -X+a$ となるかを考え，それを基に，$Z\ge a$ となる確率を求めなさい.

(和歌山大 2017)　　(m20176510)

0.304 公平な硬貨投げ（表裏の出る確率がそれぞれ 1/2）に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) n 回目まで，すべて表が出る確率を求めなさい.

(2) n 回目までに，少なくとも 1 回は裏が出る確率を求めなさい．

(3) $2m$ 回硬貨を投げて，表と裏が出る回数が等しい確率を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186507)

0.305 ボールが m 個入った箱を考える．この箱に対して，「確率 p でボールを 2 個取り出し，確率 $1-p$ でボールを 3 個追加する.」という試行を n 回行う．ただし，$0<p<1$ であり，m と n は $m>2n$ を満たすとする．n 回試行を行った後に箱の中に入っているボールの数を X とする．また，n 回の試行のうちボールを追加した回数を Y とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) m, n および Y を用いて X を表しなさい．

(2) Y の期待値 $E(Y)$ および分散 $V(Y)$ を求めなさい．

(3) X の期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めなさい．

(和歌山大 20221)　　(m20216506)