[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：1 基礎数学

0.1 不等式 $\log_{1/2} x > -3$ を満足する x の範囲を求めよ．

(岩手大 1994)　(m19940301)

0.2 $\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994)　(m19940302)

0.3 放物線 $y^2 = 4x$ の焦点を F，この放物線上の頂点以外の任意の点を $P(x_1, y_1)$，P から x 軸に下ろした垂線の足を H，点 $(-x_1, 0)$ を Q とする．以下の問に答えよ．

(1) $PF = QF$ であることを示せ．

(2) 直線 PQ は，点 P において放物線に接することを示せ．

(岩手大 1994)　(m19940303)

0.4 次の式の分母を有理化せよ． $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(岩手大 1998)　(m19980301)

0.5 次の 2 重根号をはずせ． $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(岩手大 1998)　(m19980302)

0.6 次の不等式を解け． $2x^2 - x - 3 > 0$

(岩手大 1998)　(m19980303)

0.7 2 と 8 の相加平均と相乗平均を求めよ．

(岩手大 1998)　(m19980304)

0.8 次の複素数の計算をせよ. ただし,i は虚数単位 $(=\sqrt{-1})$ をあらわす.

$$\frac{1}{\dfrac{1}{5-2i}+\dfrac{1}{6}}$$

(岩手大 2004)　(m20040301)

0.9 曲線 $C : y = 2\sqrt{x+4}$, 直線 $l : y = x + a$, 及び 無理方程式 $2\sqrt{x+4} = x + a$ に関し, 次の問に答えなさい. ただし, a は実定数です.

(1) $a = 2$ として, 曲線 C と直線 l のおよそのグラフを同じ図の中に描きなさい.

(2) 上の無理方程式が 2 重解をもつとき, a のとる値を求めなさい.

(3) 上の無理方程式が相異なる 2 重解をもつとき, a のとる範囲を求めなさい.

(4) 上の無理方程式が 1 つの実数解しかもたないとき, a のとる範囲を求めなさい.

(5) $a = 0$ のとき, 上の無理方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2006)　(m20060301)

0.10 次の有理関数を部分分数に分解しなさい． $\dfrac{1}{x^4-1}$

(秋田大 2001)　(m20010401)

0.11 (1) 区間 $0 \leqq y \leqq \pi$ において，$\cos(4y) = 0$ を満たす y をすべて求めなさい．

(2) $x = \cos(y)$ として，$\cos(4y)$ を x の多項式で表したものを $p(x)$ とする．$p(x)$ を求めなさい．

(3) (2) で求めた $p(x)$ に対して，$p(x) = 0$ を満たす x をすべて求めなさい．

(4) (1) および (3) の結果より，$\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ の値を求めなさい．

(秋田大 2022) (m20220403)

0.12 $f(x)$ は x の多項式で，等式 $\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) - f(x-1) &= (2x-1)^3 \end{cases}$ を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 次の級数の和を計算せよ．

$$(\sin x + 1)^3 + (\sin x + 3)^3 + (\sin x + 5)^3 + \cdots + (\sin x + 2n - 1)^3$$

(東北大 1993) (m19930501)

0.13 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が以下の条件 (i),(ii) を満たすとする．

(i) $f(0) = 0$ (ii) $\left|x - y\right| \leq 1$ ならば $\left|f(x) - f(y)\right| \leq 1$ が成り立つ．

以下の問いに答えよ．

(1) $\left|f(1)\right| \leq 1$ を示せ． (2) $\left|f(1.5)\right| \leq 2$ を示せ．

(3) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\left|f(x)\right| \leq |x| + 1$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2016) (m20160509)

0.14 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，b_1 と b_2 は正の整数とする．

(a) $b_1 = 21$, $b_2 = 27$ のとき，b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ．

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき，b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ．

(3) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$-1 < c_1 < 0, \quad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき，c_2 を求めよ．

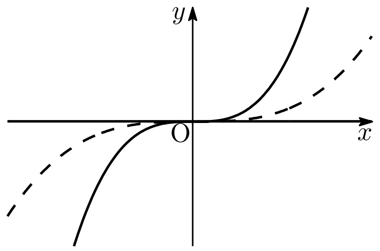
(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ．

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し，さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ．

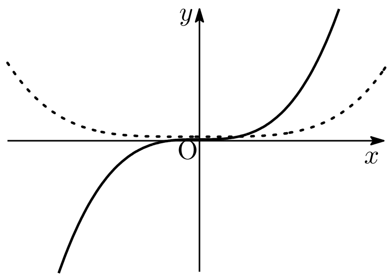
(東北大 2017) (m20170503)

0.15 以下の問いに答えよ．

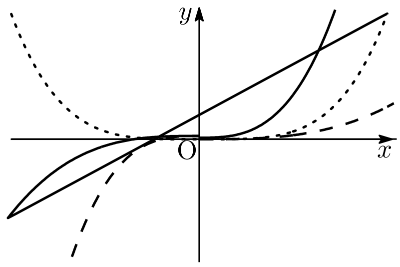
(1) 以下の図は $x=0$ のまわりで $y=20x^3+40x^4$ と $y=1000x^5+2000x^7$ のグラフを同じ縮尺で重ね合わせて描いたものである（x 軸方向と y 軸方向の縮尺は異なることに注意せよ）．実線のグラフと破線のグラフがそれぞれどちらの多項式に対応しているか答えよ．



(2) $P(x)=a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_nx^n \quad (k \leq n)$ という形の多項式について，$m(P)=k$ と定めることにする．以下の図は $x=0$ のまわりで 2 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたものである．実線のグラフに対応する $P(x)$ と点線のグラフに対応する $Q(x)$ について，$m(P)$ と $m(Q)$ の偶奇および大小の関係について述べよ．



(3) $x=0$ のまわりで 3 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたとき，以下の図のような配置とはならないことを示せ．



(お茶の水女子大 2016)　　(m20160601)

0.16 3 次方程式 $z^3=1$ の三つの相異なる解を α,β,γ とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) α,β,γ を求めよ．

(2) $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ の値は，n が 3 の倍数のとき 3，それ以外のとき 0 になることを示せ．

(東京大 2000)　　(m20000701)

0.17 図 1 に示すような関数 $f(x)$ が単調関数である場合，x の区間 $[a,b]$ における最小値 $f(x_m)$ を与える x_m を求めなさい．関数 $f(x)$ は，$a<x<x_m$ で単調減少し，$x_m<x<b$ では単調増加するので，$[a,b]$ 間に，$a<x_1<x_2<b$ なる x_1,x_2 をある方法で選び，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ の値を比較する．次に同様な方法で x_3 を選び，$[x_1,b]$ 間を分割する．同様の手順で $[x_1,x_3]$ 間に x_4 を選んでいく．これを繰り返すことにより，区間を狭めて x_m の範囲を絞り込む．

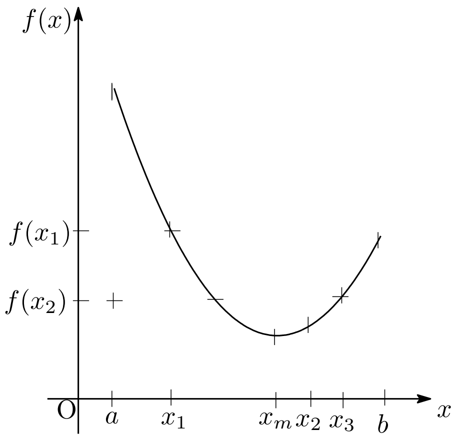


図１．区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$

(1) ある方法とは，図２に示すように，$[a,b]$ 間に x_1, x_2 を，$u:v=v:w$ になるように選ぶ方法である．このような線分の分割を黄金分割と呼ぶ．このときの v/u の値を示せ．

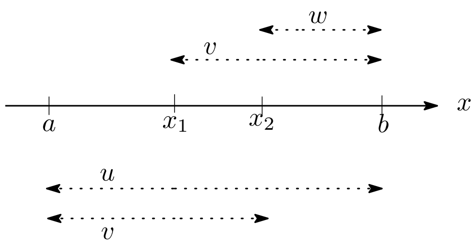


図２．区間 $[a,b]$ の分割

関数 $f(x)$ が単調関数であることから，以下のようにして区間を狭めていく．まず，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ を比較する．図１のように，$f(x_1) > f(x_2)$ なら $x_1 < x_m < b$ のはずであるから，$x_2 < x_3 < b$ を満たす x_3 を選び，$f(x_3)$ と $f(x_2)$ を比べる．このとき $f(x_2) < f(x_3)$ なら $x_1 < x_m < x_3$ であるはずであるので $x_1 < x_4 < x_2$ なる x_4 を，$f(x_2) > f(x_3)$ なら $x_3 < x_m < b$ であるはずであるので $x_3 < x_4 < b$ なる x_4 を選び，区間を狭める．区間が十分小さくなるまで狭めていくことで，最小値を与える x_m が得られる．

(2) これを利用したプログラムを C 言語で記述した．$\boxed{\text{2-1}}$〜$\boxed{\text{2-3}}$ に入るコードを示せ．ただし，$\boxed{1}$ には，問 (1) で求めた v/u の値が入る．

```
double f(double x);/* f(x) の値を返す関数 */
double searchmin(double a,double b)    /* 関数 f(x) の区間 [a,b] での最小値をとる xm を返す関数 */
{       double x1, x2, fx1, fx2, t, s, upper, lower;
        double tolerance = 1.0e-5; /* 区間の最小幅 */
        upper=b; lower=a;
        t=[2-1]*(1-[1]);
        x1=[2-2]+t; x2=[2-3]-t; fx1=f(x1); fx2=f(x2);
        while(1){
                if(fx1>fx2){ /* f(x1)>f(x2) の場合 */
                        lower=x1; x1=x2; fx1=fx2; t=[2-1]*(1-[1]);
                        x2=[2-2]-t;
                        if(x2-x1⇐tolerance)return x1;
                        fx2=f(x2);
```

```
            }eles{         /* f(x1)<f(x2) の場合 */
                upper=x2; x2=x1; fx2=fx1; t=[2-1]*(1-[1]);
                x1=[2-3]+t;
                if(x2-x1⇐tolerance)return x2;
                fx1=f(x1);
            }
        }
}
```

(東京農工大 2006)　　(m20060908)

0.18　実数を要素とする集合の間の演算★を下のように定義する．

$$A \bigstar B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

(1)　次の集合の要素をすべて示せ．　$\{-1,0,1\} \bigstar \{1,4,7\} \bigstar \{0,10\}$

(2)　次の式を証明せよ．ただし，$\cup$ は和集合を作る演算である．　$A \bigstar (B \cup C) = (A \bigstar B) \cup (A \bigstar C)$

(3)　どんな A に対しても，　$X \bigstar A = A \bigstar X = A$　となるような X を求めよ．

(4)　どんな A に対しても，　$Y \bigstar A = A \bigstar Y = Y$　となるような Y を求めよ．

(5)　いま，一円玉，五円玉，十円玉，五十円玉, 百円玉, 五百円玉, 千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ一枚ずつ持っているとする．このとき，釣り銭なしで，一度に払える金額の集合を★を用いて示せ．集合に 0 を含んでいてよい．

(東京農工大 2006)　　(m20060909)

0.19　(1)　同じ数字を 3 個並べてできる 10 進 3 桁の整数（例えば，444,　555　など）は 3 で割りきれることを証明せよ．

（a を任意の数字とするとき，$aaa = a \times\ (10^2+10^1+10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(2)　同じ数字を 3^2 個並べてできる 10 進 3^2 桁の整数は 3^2 で割りきれることを証明せよ．

（$aaaaaaaaa = aaa \times\ (10^{2\times3}+10^3+10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(3)　1 以上の任意の整数 n に対して，同じ数字を 3^n 個並べてできる 10 進 3^n 桁の整数は 3^n で割りきれることを，n に関する数学的帰納法で証明せよ．

（$\underbrace{a\cdots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k} = \underbrace{a\cdots a}_{3^k}\times\ x$ と表したとき，x はどのような数になるかを考えよ.）

(電気通信大 2000)　　(m20001001)

0.20　$A = \{0,1,2\}$ とする．A^n を，A の要素を n 個並べてできる列全てからなる集合とする．さらに A^n の要素のうち，n 個の数の総和を 3 で割った剰余が k $(k=0,1,2)$ になるものの集合を $A^n(k)$ とする．

例：$A^2 = \{00,01,02,10,11,12,20,21,22\}$

$A^3 = \{000,001,002,\cdots,221,222\}$

$A^2(0) = \{00,12,21\}$,　　$A^2(1) = \{01,10,22\}$,　　$A^2(2) = \{02,11,20\}$

(1)　$A^3(0), A^3(1), A^3(2)$ の全ての要素を上の例のように列挙せよ．

(2)　任意の正整数 n に対し，$|A^n(0)| = |A^n(1)| = |A^n(2)| = 3^{n-1}$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3)　$n \geq 4$ のとき，$A^n(0)$ の要素のうち，ちょうど 2 個の 0 で始まる（ 3 個以上ではいけない）列の個数を n を用いて表せ．

(電気通信大 2001)　　(m20011001)

0.21 (1) 集合 $\{1, 2, 3\}$ の空でない部分集合をすべて書け．それらの部分集合を，3 を含むものと含まないものに分けよ。

(2) $n = 3$ のとき $\{1, 2, 3\}$ のすべての空でない部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$1 \leq k \leq 3$ の和
$$\sum_{\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_k}$$
を計算せよ（計算過程も書け）.

(3) $n(n \geq 1)$ に関する帰納法により
$$\sum_{\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_k} = n$$
を示せ．ただし，左辺は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の空でないすべての部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$1 \leq k \leq n$ に対して和を計算するものとする.

(電気通信大 2006) (m20061007)

0.22 銀行から A 円を年間の利子 r で借り, 毎年の末に R 円を均等に返済します. このとき, 借り入れから 1 年経過後に R 円を返済した直後の残債 $\boldsymbol{L}_1$ は $\boldsymbol{L}_1 = A(1 + r) - R$ と表されます.

(1) 2 年目の返済直後の残債 $\boldsymbol{L}_2$ を式で表しなさい.

(2) 10 年目の残債 $\boldsymbol{L}_{10}$ が, ちょうどゼロになるためには, R 円をいくらにするとよいですか. A と r を使って式で表しなさい.

(千葉大 2005) (m20051207)

0.23 2006 年日本シリーズでロッテと阪神が戦っているとする. 日本シリーズでは, 先に 4 ゲーム勝ったチームが勝者となり, <u>引き分けはない</u>ものとする. <u>現時点でロッテが第 1 試合に勝っている. また, 第 2 試合目に勝ったチームが第 4 試合にも勝つとするとき</u>,

２試合目以降のシリーズの行方（経過）は何通りあるか.

**（ロッテの勝数, 阪神の勝数）の組で状態を表現し, 初期状態 $(1, 0)$ 以降の経過を解答用紙の図を用いて完成しなさい.

(千葉大 2007) (m20071204)

0.24 下の真理値表の空欄部 (ア)〜(オ) を埋め, これを用いて (1)〜(5) の命題の真偽（真理値）を答え, 簡単な説明を加えなさい.

【真理値表】T は真, F は偽とする.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \land q$	$p \lor q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
T	T	F	F	T	T	T	(イ)
T	F	F	T	F	T	F	(ウ)
F	T	T	F	F	T	T	(エ)
F	F	T	T	F	(ア)	T	(オ)

(1) 北京は中国の首都であり, かつ, $7 \times 5 = 29$.

(2) 北京は中国の首都であり, または, $7 \times 5 = 29$.

(3) $7 \times 5 = 35$ ならば, 大阪は日本の首都である.

(4) $7 \times 5 = 100$ ならば, 大阪は日本の首都である.

(5) 北京は中国の首都であるとき, そして, そのときに限り $7 \times 5 = 100$ である.

(千葉大 2007) (m20071205)

0.25 面積が a 平方センチメートルの正方形がある．この正方形の四隅から合同な 4 つの正方形を切り取り，残りの部分を折り曲げて接合することにより，上部の開いた箱を作ることにする．箱の容量（体積）を最大化するためにはどうすればよいか．また $a = 36$ のときの最大容量を求めよ.

(筑波大 2001) (m20011301)

0.26 次の等式を証明せよ.（n は自然数） $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(筑波大 2004) (m20041301)

0.27 3 次方程式 x^3-5x^2+px+q の 3 つの解の比が $2:3:5$ であるとする.

(1) このとき, p, q の値を求めよ.

(2) 3 つの解の値を求めよ.

(筑波大 2004) (m20041302)

0.28 a が 3 で割り切れない奇数であるならば, a^2-1 は 24 で割り切れることを示せ.

(筑波大 2004) (m20041303)

0.29 友人数人が旅行の相談をし, 次の条件 (a)〜(d) をすべて満たす場所を選ぶことにした.

(a) 温泉地であること

(b) 紅葉が見られるか, または湖があること

(c) 海辺ではないこと

(d) 所要時間が 3 時間以内であること

「温泉地である」,「紅葉が見られる」,「湖がある」,「海辺がある」ことをそれぞれ命題 A, B_1, B_2, C とし,「所要時間が x 時間以内である」ことを命題 $t \leqq x$ で表す.

下表のように候補地 1〜10 に対し, 命題 A, B_1, B_2, C の真偽（それぞれ T と F で表す）, および所要時間が与えられているとき, 以下の問に答えよ.

(1) 上記の (a)〜(d) をすべて満たすという命題を, A, B_1, B_2, C, $t \leqq x$ および命題結合記号 $\vee(OR)$, $\wedge(AND)$, $\neg(NOT)$ を使って表せ.

(2) (a) と (b) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(3) (a),(b) および (c) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(4) (a)〜(d) をすべて結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ

候補地	命題 A	命題 B_1	命題 B_2	命題 C	所要時間
1	T	F	T	F	2
2	F	T	T	T	2
3	F	T	F	T	3
4	T	T	F	T	3
5	T	T	T	F	3
6	T	F	F	T	3
7	F	T	F	T	4
8	T	F	T	F	4
9	T	F	F	T	5
10	T	T	T	F	5

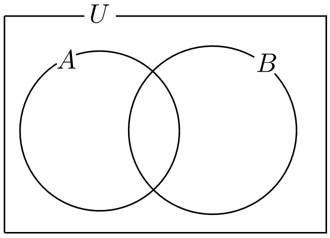
(筑波大 2004) (m20041304)

0.30 集合 A, B に対して演算 $\oplus$ を：

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \cap \overline{B} \text{ または } x \in \overline{A} \cap B\}$$

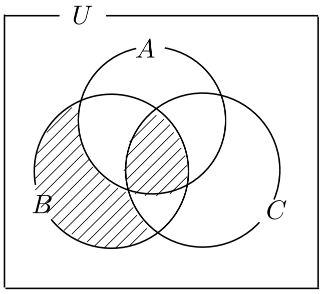
と定義する. $\cap$ は積集合, $\cup$ は和集合, $\overline{A}$ は A の補集合を表す.

(1) $A \oplus B$ に含まれる領域を，下のような図に斜線を入れて示せ．ただし，U は全体集合である．



(2) $\overline{A \oplus B}$ を，A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cup$, $\cap$ 及びカッコだけを使った式で表せ．

(3) 下図の斜線の領域を A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\oplus$ 及びカッコだけを使った式で表せ．



《注》斜線の領域は，原稿では灰色の領域となっていましたが，図の灰色の部分が不明でしたので，仮に，上記の斜線の部分のように改ざん致しましたので，ご承知下さい．

(筑波大 2007)　　(m20071313)

0.31 三角形 ABC において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の値がすべて整数であるときに，これらの値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071323)

0.32 $20! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$ を素因数分解せよ．（例えば $5! = 120$ なら $2^3 \times 3 \times 5$ となる．）

(筑波大 2007)　　(m20071325)

0.33 すべての実数 x に対し $\sqrt{3}\sin x - \cos x = A\sin(x - \alpha)$ が成り立つとき，A, α を求めよ．ただし $A > 0$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$とする．

(筑波大 2007)　　(m20071326)

0.34 $4\cos^2 x - 12\cos x + 9$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071327)

0.35 A, B, C はそれぞれ正直（必ず本当のことを言う）か嘘つき（必ず嘘を言う）のどちらかであり，互いに相手の正体を知っている．以下の A, B, C の発言から，それぞれの正体が正直，嘘つき，あるいは不明（これだけからはどちらとも言えない）のいずれであるかを答えよ．

(1) A：「B, C の 1 人は正直で 1 人は嘘つきだ.」

(2) B：「A, C の少なくとも一方は嘘つきだ.」

(3) C：「A は正直だ.」

(筑波大 2007)　　(m20071330)

0.36 $1024 \fallingdotseq 1000$，つまり $2^{10} \fallingdotseq 10^3$，という近似式を使えば，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$，と近似できる．さらにこれと $81 \fallingdotseq 80$，つまり $3^4 \fallingdotseq 2^3 \times 10$ という近似式を使えば，$4\log_{10} 3 \fallingdotseq 1 + 3\log_{10} 2$，したがって $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.48$（小数点第 3 位で四捨五入）と近似できる．

$\log_{10} 7$ について同様の近似式を示し，それを使って $\log_{10} 7$ の近似値を示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071331)

0.37 1 円，5 円，10 円，50 円，100 円の 5 種類の硬貨がそれぞれ 3 枚ずつ，合計 15 枚ある．これについて以下の問いに答えよ．

(1) この中から 2 枚を選んだ合計金額は，全部で何通りあるか．

(2) この中から 3 枚を選び，それを戻してもう一度 3 枚選んだところ，3 枚の合計金額は同じなのに，硬貨の組み合わせ（同じ金額の硬貨が何枚あるか）は異なっていた．そのような 2 通りの組み合わせと合計金額の例を示せ

(3) この中から 3 枚を選んだ合計金額は，全部で何通りあるか．

(筑波大 2007) (m20071333)

0.38 集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表す．A, B, C が集合で：

$$n(A \cup B \cup C) = 50 \qquad n(A \cap B \cap C) = 10$$

$$n(A \cap B) = 20 \qquad n(B) = 25 \qquad n(C) = 20$$

のとき．$n(A)$ がとりうる値の最小値・最大値を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081328)

0.39 $\sin 3\theta = \sin\theta$ となる正の θ で最小のものを求めよ．（解答は度，ラジアンのいずれで書いてもよい.）

(筑波大 2008) (m20081330)

0.40 従来型テレビの画面の縦横比は３：４であり，新型テレビでは９：１６である．これについて，以下の問いに答えよ．

(1) 従来型テレビの３：４の映像全体を新型テレビの画面全体に引き伸ばして映すには，縦横いずれの方向に何倍拡大する必要があるか．

(2) デジタル一眼レフカメラで撮影した画像の縦横比は２：３である．この画像の縦横比を変えずに，できるだけ大きくテレビ画面に映す場合，画面全体に対する余白の面積比はいくらか．従来型テレビ，新型テレビのそれぞれの場合について求めよ．

(筑波大 2008) (m20081332)

0.41 以下の (1)〜(3) において，「前提」が正しい場合に「結論」が正しい例，正しくない例をそれぞれ1つずつ，a, b, c 等の文字の具体的な数値例で示せ．下の例も参照のこと．

- 正しい例／正しくない例が存在しない場合には解答欄に「なし」と記すこと．
- 考える数値は実数の範囲とし，1 ÷ 0，$\sqrt{-1}$ のように実数として意味を持たない例は用いないこと．

	前提	結論	正しい例	正しくない例
例 1	$a > 0$	$a = ab$	$a = b = 1$	$a = b = 2$
例 2	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x > 0$	$x = 1$	なし

(1) 前提：$a > b,\ c > d$ 結論：$ac > bd$

(2) 前提：$a^2 + b^2 = 1$ 結論：$2ab \leqq 1$

(3) 前提：$a > b > 1$ 結論：$a^b > b^a$

(筑波大 2008) (m20081333)

0.42 次の連立不等式で示される領域 S について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqq 18 \\ x + 2y \leqq 10 \\ x \geqq 0 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

(1) S の面積を求めよ．

(2) S 中で $x+y$ の値を最大にする点での x と y の値を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081334)

0.43 $a+b$, $(1+2)\times\ 3$ のように演算子 $(+,-,\times\ ,\div$等 $)$ を文字・数値・式の間に書く通常の数式の記法（中置記法）に対し，$ab+$ のように演算子を後ろに置く書き方を後置記法という．複雑な式の場合も，計算される順に式を組み立てていけばよい．下に例を示す．

$$\underbrace{\underbrace{(a+b)}_{ab+}\times\ \underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{ab+cd-\times}\qquad\qquad \underbrace{a+\underbrace{b\times\ \underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{bcd-\times}}_{abcd-\times\ +}\qquad\qquad \underbrace{\underbrace{a+\underbrace{b\times\ c}_{bc\times}}_{abc\times+}-d}_{abc\times\ +d-}$$

上の例にも見られるように，後置記法ではカッコがなくても演算順序を正しく表現できる．

- 後置記法の文字や数値の間には，見やすいように適宜カンマを入れる．例えば $1+23$ は $1,23+$, $12+3$ は $12,3+$ のように表す．
- 以下では後置記法の演算子としては，$+,-,\times$ の 3 種を用いる．べき乗は x^2 を $x,x\times$, x^3 を $x,x\times\ x\times$ のように，乗算の繰り返しとして表す．

(1) $6\times\ 5-4-3$ を後置記法で表せ．

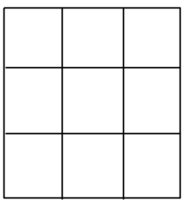
(2) 後置記法で $4,4\times\ 3,2\times -,1+$ と表される式の値を求めよ．

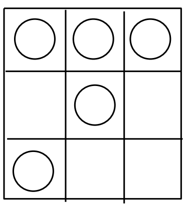
(3) 後置記法で $a,a\times\ a+1+a,1-\times$ と表せる式を通常の数式で，できるだけ簡単な形に直して表せ．

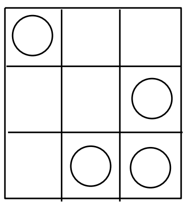
(4) x^3+ax^2+bx+c と同値で，演算子数ができるだけ少ない式を後置記法で表せ．

(筑波大 2008)　　(m20081335)

0.44 下図の (i) のような $3\times\ 3$ のマス目があり，各マスには○を 1 個入れることができる．○を 0 個以上入れた結果を「盤面」と呼ぶ．例えば○が 1 個の盤面は，どのマスに○があるかに応じて全部で 9 通りある．縦, 横, 対角線のいずれかの列に○が 3 個並んだものを「完成盤面」，そうでないものを「未完成盤面」と呼ぶ．例えば下図 (ii) は完成盤面（上段及び対角線に○が 3 個並んでいる），(iii) は未完成盤面の例である．


(i)


(ii)


(iii)

これについて，以下の問いに答えよ．

(1) ○が 4 個ある盤面は全部で何通りあるか．

(2) そのうち，完成盤面は何通りあるか．

(3) ○が 5 個ある盤面のうち，未完成盤面は何通りあるか．

(筑波大 2008)　　(m20081337)

0.45 集合 X から集合 Y への写像 $f\ :\ X \to Y$ による像に関して，以下を示せ．

(1) 任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つ．

(2) f が単射（1 対 1）であるならば，任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ．

(3) X の任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つならば，f は単射となる．

(筑波大 2009)　　(m20091315)

0.46 $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11$ のように p_n で n 番目の素数を表すとする. 次の問いに答えよ.

(1) $1 + p_1 \cdots p_n$ を割る最小の素数を p とすると,

$$p_{n+1} \leq p \leq 1 + p_1 \cdots p_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 番目の素数は $2^{2^{n-1}}$ 以下であることを帰納法で示せ.

(筑波大 2010)　　(m20101305)

0.47 次の式が成立する自然数 n の値を求めなさい.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2$$

(筑波大 2012)　　(m20121321)

0.48 (1) s と t は実数とする．$x + y = s,\ xy = t$ という関係式が成立するとき，x と y が実数となるための条件を，s と t を用いて表しなさい．

(2) 実数 x, y が $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ を満たして変化するとき，点 $(x + y, xy)$ の示す領域を求め，図示しなさい．

(筑波大 2012)　　(m20121322)

0.49 自然数 n について，$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \cdots,\ a_n > 0$ とする．このとき，次の (1) から (3) の示す不等式が成立することを証明しなさい．

(1) $0 < a_1 \leqq 1$ かつ $a_2 \geqq 1$ ならば $a_1 + a_2 \geqq a_1 a_2 + 1$

(2) $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ ならば $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n$

(3) $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geqq a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

(筑波大 2012)　　(m20121323)

0.50 $\mathbb{R}$ の部分集合 A の上限，下限をそれぞれ $\sup A$, $\inf A$ で表す．このとき，以下を示せ．

(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup A = -\inf(-A)$$

が成り立つ．ただし，$-A = \{-a \,|\, a \in A\}$ とする．

(2) $A, B \subset \mathbb{R}$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

が成り立つ．ただし，$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(3) $A, B \subset [0, \infty)$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B)$$

が成り立つ．ただし，$AB = \{ab \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(筑波大 2012)　　(m20121328)

0.51 集合 X の部分集合 $A,\ B$ に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2) $A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3) $C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4) $A_i \subset X\ \ (i = 1, 2, \cdots, k),\quad B_j \subset X\ \ (j = 1, 2, \cdots, \ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j \right) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \triangle B_j)$$

を示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211305)

0.52 (1) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4) - 6$ を因数分解せよ．

(2) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6} \times \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 4} \div \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$ を簡単にせよ．

(群馬大 2001)　　(m20011501)

0.53 等差数列をなす 4 つの数がある．これらの和は 40 で，第 2 項と第 3 項の積は初項と末項の積より 8 大きい．このような等差数列をすべて求めよ．

(群馬大 2001)　　(m20011502)

0.54 $0^\circ \leqq\ x \leqq\ 180^\circ$ のとき，等式　$2\cos^2 x = 3\sin x$ を満たす x の値を求めよ．

(群馬大 2001)　　(m20011503)

0.55 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 4$ について，以下の質問に答えよ．

(1) この関数が最小値をとるときの x の値，および，そのときの最小値を求めよ．

(2) この関数と原点に関して対称な 2 次関数の式を求めよ．

(3) この関数と，(2) で求めた関数のグラフにおいて，交点の座標を求めよ．

(4) この関数と，(2) で求めた関数のグラフにおいて，二つの曲線により囲まれる領域（境界を含む）に，格子点（座標が整数値であるもの）はいくつあるか．

(群馬大 2001)　　(m20011504)

0.56 12 人で旅をしている．A町からB町まで 30 キロメートルあるので，1 台のレンタカーを運転者付きで借りることにする．レンタカーは運転手を含めて 5 人乗りなので，一度には 4 人の旅人しか乗れない．12 人が同時にA町を出発して，同時にB町に着けるように計画を立てた．計画は以下の通りである．

8 人は徒歩で出発する．同時に，残りの 4 人は自動車でA町を出発する．この 4 人は途中でおろして，後は歩いてもらう．運転手はすぐさま引き返し，途中で出会う 8 人のうちの 4 人を乗せて B 町へ

向かうが，この 4 人も途中でおろし，後は歩いてもらう．運転手はまたすぐさま引き返し，途中で出会う 4 人を乗せて B 町へ向かう．自動車がB町に着くのと同時に，途中でおろされた 8 人も B 町に着く．

徒歩は時速 4 キロメートル，自動車は時速 60 キロメートルとし，自動車の方向転換や自動車の乗り降りにかかる時間は無視できるとする．

(1) 最初に自動車に乗るグループは，B 町の何キロ手前で自動車からおりることになるか．

(2) 旅人たちは，A町を出発してから何時間後に B 町に着きことができるか．

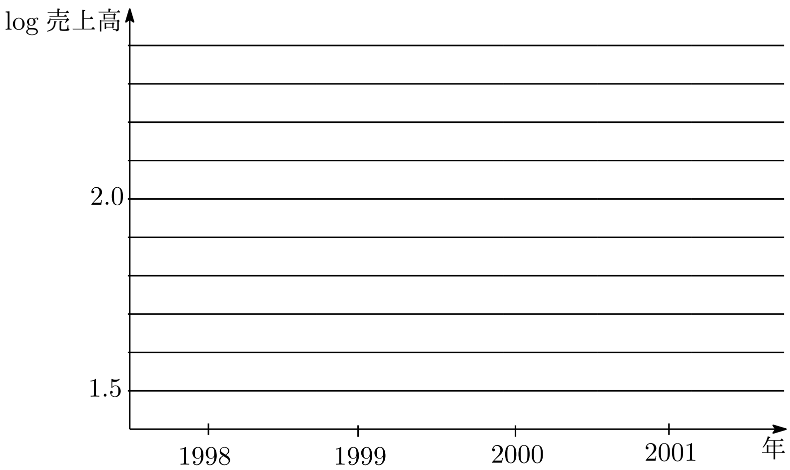
(群馬大 2001) (m20011505)

0.57 ある会社では，3 種の商品の過去 4 年間の売上高が次のようであった．以下の 3 問に答えよ．

	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年
商品 A	91 万円	123 万円	170 万円	229 万円
商品 B	31 万円	51 万円	78 万円	126 万円
商品 C	46 万円	83 万円	141 万円	257 万円

(1) 伸び率を見るために，片対数グラフを作成したい．売上高を 1 万円を単位に対数変換すると，次のようになった．対数の底は 10 とし，小数第 3 位で四捨五入した．図に商品の売上高を点で示し，各商品ごとの売上高の推移がわかるようにもっとも適切な直線を図に書き込め．

売上高（万円）	31	46	51	78	83	91	123	126	141	170	229	257
log 売上高	1.50	1.66	1.71	1.89	1.92	1.96	2.09	2.10	2.15	2.23	2.36	2.41



(2) 売上高を対数にしたときの，商品 B の y 年の売上高 t を近似したら，$\log t = ay + 1.5$ になった．定数 a を求め，y 年の売上高 m を示す式を示せ．

(3) 売上高の伸び率が今後もほぼ一定だと仮定したとき，商品 B の売上高が 1000 万円を超えるのは何年と推測できるか．

(群馬大 2003) (m20031501)

0.58 人口が p 人のある地域におけるネットワークの契約者数が a_0 人であるとする． 今後毎年新規加入者が, 前年末の非契約者の 10 %, 脱退者が前年末の契約者数の 5 %であると推定した． このとき, 以下の 3 問に答えよ． なお, 人口は将来に渡って一定であると仮定する．

(1) y 年後の契約者数を a_y 人としたとき, $y+1$ 年後の契約者数 a_{y+1} を求める式を, a_y と p の式で示せ．

(2) 新規契約者数と脱退者数が同数であるのは, 契約者数が人口の何%であるときか．

(3) y 年後の契約者総数 a_y を a_0 と p の式で求めよ.

(群馬大 2004)　　(m20041501)

0.59 y 軸上の点 $A(0,4)$ と x 軸上の点 $P(t,0)$ を結ぶ線分 AP の垂直 2 等分線を h とする. 以下の 3 問に答えよ.

(1) h の方程式を t の式で与えよ.

(2) h が放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接するときの条件を示せ. ただし, $a>0$ とする.

(3) h が放物線 $y=ax^2+bx+c$ に, t の値に関わらずに接するときの a, b, c を示せ.

(群馬大 2004)　　(m20041502)

0.60 次の等式が与えられたとする.

$$\log_2 \frac{y}{x} = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

この式で, x と y は 2 を整数乗して得られる数である. x と y の値を求めよ.

(群馬大 2005)　　(m20051502)

0.61 次の 4 つの不等式が与えられたとき, 以下の 3 問に答えよ.

$$\begin{cases} x+2y & \leqq & a \\ x-y & \leqq & 4 \\ 2x-y & \geqq & -5 \\ 2x+y & \geqq & -7 \end{cases}$$

(1) $a=10$ のとき, この 4 つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも正の整数となるものは何組あるか.

(2) $a=10$ のとき, この 4 つの不等式をすべて満たす x と y の組で, どちらも負の整数となるものは何組あるか.

(3) 4 つの不等式をすべて満たす x と y のうち, x と y がどちらも正の整数となる組とどちらも負の整数となる組が同数となるように a を変化させるとき, a が最小となる値を求めよ. ただし, $a>0$ とする.

(群馬大 2005)　　(m20051504)

0.62 (1) $x+\dfrac{1}{x}=a$ として，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ を a で表せ.

(2) x についての不等式 $|2x-1|-|x+2|>-1$ を解け。

(群馬大 2006)　　(m20061501)

0.63 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$, $g(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ について，以下の 2 問に答えよ.

(1) a^x, a^{-x} を $f(x)$, $g(x)$ を用いて表せ.　　(2) $f(x+y)$ を $f(x)$, $g(x)$, $f(y)$, $g(y)$ を用いて表せ.

(群馬大 2006)　　(m20061502)

0.64 1 から 7 の 7 つの数字をそれぞれ 1 度ずつ用いて 7 けたの数を作ることを考える.

(1) 7 けたの数は全部で何通りあるか答えよ.

(2) 2 と 5 が隣り合わない 7 けたの数は何通りあるか答えよ.

(群馬大 2006)　　(m20061504)

0.65 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ．

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(群馬大 2007) (m20071502)

0.66 $\tan\dfrac{\theta}{2}=x$ のとき， 以下の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta=\dfrac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ． (2) $\cos\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ．

(群馬大 2007) (m20071504)

0.67 (1) $\dfrac{y+z}{a}-\dfrac{x+z}{b}=0$ であり，かつ，$\dfrac{x+z}{b}-\dfrac{x+y}{c}=0$ である．$x:y$ の比を a, b, c を用いて表せ（z は用いないこと）．

(2) $f(x)=2x^2-7x+5$，$g(x)=x^2-3x-7$ であるとする．「$f(x)>0$ かつ $g(x)<0$」の条件を満たす実数 x の値の範囲を求めよ．

(群馬大 2008) (m20081501)

0.68 x, y の二次式 $8x^2-2xy-3y^2+kx+9y-6$ が一次式の積に因数分解できるように．実数 k の値を定めよ．

(群馬大 2008) (m20081502)

0.69 (1) 直線 $y=3x+a$ が放物線 $y=x^2+4x+1$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする．このときの定数 a の値を求めよ．

(2) 直線 $y=3x+b$ が円 $x^2+y^2-8y-20=0$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする．このときの定数 b の値を求めよ．

(群馬大 2008) (m20081503)

0.70 次の 3 つの不等式が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} ax-y & \geqq & 0 \\ x-3y & \leqq & 0 \\ 4x+3y & \leqq & 30 \end{cases}$$

(1) この 3 つの不等式をすべて満たす領域の面積が 15 であるとき，a の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(2) (1) で求めた a の値のとき，この 3 つの不等式をすべて満たす領域の中で，x と y の組がともに整数となるものは何組あるか．

(3) (1) で求めた a の値のとき，この 3 つの不等式をすべて満たす x と y の組で，$-x+y$ が最小となる x と y を求めよ．

(群馬大 2009) (m20091502)

0.71 (1) 不等式 $3x^2+x>2$ を解け．

(2) x の変域を $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 1$ としたとき，二次関数 $f(x)=3x^2+x-1$ の最大値と最小値を求めよ．

(群馬大 2010) (m20101501)

0.72 $a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n+6 \quad (n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列について，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が等比数列になるように，α を定めよ．

(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(群馬大 2010)　　(m20101502)

0.73　$3x^5-2x^4+5x^3-x^2+4x+7$ をある整数 A で割ったところ, 商 x^2+2, 余り $6x+1$ であった.

(1) 整式 A を求めよ.

(2) $f(x)=3x^5-2x^4+5x^3-x^2+4x+7$ としたとき, $-100 \leqq x \leqq 100$ の範囲において $f(x)=0$ となるような x が少なくとも 1 個あることを示せ.

(群馬大 2010)　　(m20101504)

0.74　3 次方程式 $2x^3-9x^2-6x+5=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき, 以下の各式の値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(群馬大 2011)　　(m20111501)

0.75　次の 3 つの直線が与えられたとき．以下の 3 つの問に答えよ．

$$\begin{cases} y &= ax+b \\ y &= \dfrac{1}{2}x \\ y &= 3x \end{cases}$$

(1) この 3 つの直線で囲まれる面積が 10 であり，2 つの直線 $y=ax+b$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ が垂直に交わるとする．このとき a と b の値を求めよ．ただし，$b>0$ とする．

(2) (1) で求めた a と b の値のとき，この 3 つの直線で囲まれる領域の中で，x 座標と y 座標がともに整数となる点はいくつあるか．ただし，境界上の点を含む．

(3) (1) で求めた a と b の値のとき，直線 $y=ax+b$ が $x=2$ において，2 次曲線 $y=cx^2+8$ と接するとする．このとき，c の値を求めよ．

(群馬大 2011)　　(m20111502)

0.76　以下の 3 つの問いに答えよ．

(1) 点 $A(-6,8)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ．

(2) 2 点 $B(-4,6)$ と $C(12,-6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

(3) 3 点 $D(0,-1),\ E(2,1),\ F(1,-1-\sqrt{3})$ を通る円の方程式を求めよ．

(群馬大 2012)　　(m20121501)

0.77　$\log_{10}2=0.301,\ \log_{10}3=0.477$ として，以下の 3 つの問いに答えよ．

(1) 20^{19} の桁数を求めよ．

(2) 12^{16} の桁数を求めよ．

(3) 5^{32} の桁数とその最初の数字（首位の数字）を求めよ．

(群馬大 2012)　　(m20121502)

0.78　以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) x の 3 次式 $12x^3+6x^2+20x+10$ があるとき，ある整式 A で割ったところ，商 $3x^2+5$，余り 0 であった．整式 A を求めよ．

(2) x の 5 次式 $4x^5+14x^4+11x^2-3x-5$ があるとき，ある整式 B で割ったところ，商 $2x^2+3$，余り $6x+10$ であった．整式 B を求めよ．

(群馬大 2012)　　(m20121503)

0.79 以下の式を簡単にせよ.

(1) $(\sin 25^\circ - 3\sin 65^\circ)^2 + (3\cos 115^\circ + \cos 155^\circ)^2$

(2) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) + \tan(135^\circ + \theta)\tan(135^\circ - \theta)$

(3) $(\sin x + \cos x)^2 + \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} + \tan^2 x + \cos^2 x\,(1-\tan^4 x)$

(群馬大 2013)　　(m20131501)

0.80 長方形 $ABCD$（辺の長さが $AB = CD = 4cm$, $BC = DA = 2cm$）がある. 点 P が頂点 A を出発して秒速 $1cm$ で長方形の辺の上を一周する（頂点 B, C, D を通り, A に戻る）. PA を一辺とする正方形の面積を $y\,cm^2$ とする.

(1) 5 秒後の y はいくつか.

(2) 出発してから x 秒後の y を x の式で表し, 図示せよ.

(群馬大 2013)　　(m20131502)

0.81 放物線 $y = 4x^2 + x + 3$ と直線 $y = kx + 2k + 1$ がある.

(1) 直線が放物線の接線となる場合の, 定数 k を求めよ.

(2) 2 本の接線の交点と 2 つの接点を結んで作られる三角形の面積を求めよ.

(群馬大 2013)　　(m20131503)

0.82 以下の問いに答えよ.

(1) アルファベットを, $AABABCABCDABCDEAB\cdots$ のように並べるとき, 初めて J が表れるのは 1 番目の A から数えて何文字目か.

(2) $10! = 10\times\ 9\times\ 8\times\ 7\times\ 6\times\ 5\times\ 4\times\ 3\times\ 2\times\ 1 = 3628800$ のように, 10 の階乗を表す整数の末尾には連続する 0 が 2 個ある. では, 5000 の階乗を表す整数の末尾に連続する 0 は何個あるか.

(3) 1 から 10000 の整数のうち, 3 または 5 または 7 の倍数である整数は何個あるか.

(群馬大 2013)　　(m20131504)

0.83 $\sqrt{15}$ は無理数である. 以下の各問に答えよ.

(1) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$ を展開して整理せよ.

(2) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ が無理数であることを示せ.

(3) 等式 $4a + (5b-3)\sqrt{15} + \sqrt{15}\left(a - 2b\sqrt{15}\right) = 0$ を満たす有理数 a, b の値を求めよ.

(群馬大 2014)　　(m20141501)

0.84 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について, 次の問に答えよ. ただし, a, b, c は有理数とする.

(1) $a \neq 0$ として「2 次方程式の解の公式」を導け.

(2) 次のような解になるための, a, b, c の条件を示せ.

（ア）1 つの有理数　（イ）1 つの複素数　（ウ）2 つの有理数　（エ）2 つの実数

（オ）2 つの複素数　（カ）不定（x の値が定まらない）（キ）矛盾している

(図書館情報大 1994)　　(m19941601)

0.85　10 進数を 2 進数に変換する方法として,「10 進数を次々に 2 で割り，その結果の余りを下から順に並べる」という方法がある.

（例）　　10 進数　13　　　　　1101　2 進数

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 13 & & \\
 & \Downarrow & & \\
2 & \big) \; 13 & & \\
2 & \big) \; \underline{\;6\;} & \cdots & 1 \\
2 & \big) \; \underline{\;3\;} & \cdots & 0 \\
2 & \big) \; \underline{\;1\;} & \cdots & 1 \\
 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1101 \\
\Uparrow \\
1 \quad 1 \quad 0 \quad 1
\end{array}
$$

(1)　n 桁の p 進数は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, p^{i-1}, \quad 0 \leqq a_i < p, \quad a_i \text{ は 0 または自然数}$$

であることを利用して，上記の方法が正しいことを示せ.

(2)　10 進小数を 2 進小数に変換する，たとえば 10 進小数 0.625 を 2 進小数 0.101 に直す方法を示し，その方法が正しいことを示せ.

(図書館情報大 1994)　　(m19941602)

0.86　(1)　$\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$ を展開せよ.

(2)　$1 + 2 + \cdots + 999 + 1000$ は次のどれに最も近いか.

(a) 100,000　(b) 500,000　(c) 1,000,000　(d) 5,000,000　(e) 10,000,000

(3)　$0, 1, 2, 3, 4$ の 5 個の数字の中から異なる 3 個の数字を用いて作られる 3 桁の整数のうち，奇数はいくつあるか.

(図書館情報大 1998)　　(m19981601)

0.87　アミダくじは図 1 のように何本かの縦線とそれをつなぐ横線からできており，縦線の上端から出発して下端に到着するまでをたどる．たどる道筋は：

- 縦線に沿って下に進み,
- 横線との分岐点にであったらその横線に沿って進み,
- 横線が縦線に出会ったところで再び下に進む.

これを下端に到着するまで繰り返す.

縦線には左から順に番号をふり,「縦線 i 」という呼び方で左から i 本目の縦線を指す ($i = 1, 2, \cdots, n$: n は縦線の本数)．図 1 の上端に記したのがこの番号である．また下端の番号は，上端の同じ番号から出発した道筋の到着先を表している．例として，図の点線は番号 3 のたどる道筋を示している．

図 2 の (a) のように，縦線と横線の交点は必ず T 字型で，(b) のように十字で交わったり，横線が途中で途切れたりすることはない．また普通のアミダくじでは，横線は (c) のように縦線を飛び越えたり，(d) のように斜めになったりすることは許されず，隣り合った縦線を水平につなぐだけである．これらの条件を満たすものを「正しい横線」と呼ぶ.

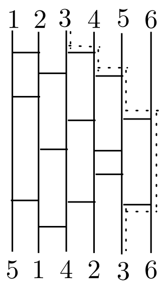


図 1

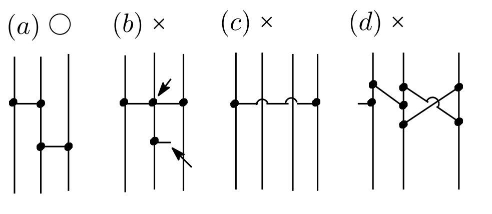
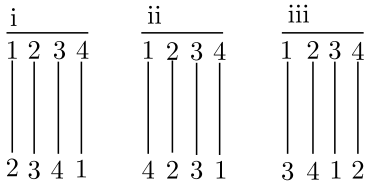


図 2

(1) 次のそれぞれについて,（正しい）横線を適当にいれて，上端・下端の同じ番号が道筋で結ばれるアミダくじを作れ.



(2) 縦線 i から出発した道筋が縦線 j に到着することは,「 $j=f(i)$ 」という関数関係として表せる． f をそのアミダくじの「表現関数」と呼ぶ．図 1 では縦線 3 からの道筋は縦線 5 に到着するから $f(3)=5$ であり， f 全体は次のようになる.

$$f(1)=2,\quad f(2)=4,\quad f(3)=5,\quad f(4)=3,\quad f(5)=1,\quad f(6)=6$$

縦線が n 本で縦線 $a, a+1$ をつなぐ横線が 1 本あるだけのアミダくじの表現関数 f_1 を答えよ．またその横線より下に，縦線 $b, b+1$ をつなぐ横線を追加したアミダくじの表現関数 f_2 を，$b=a, a-1, a+1$ ，それ以外の場合に分けて答えよ.

(3) さらに一般に， 2 つのアミダくじ A, B について，A の下端を B の上端につなぐと新しいアミダくじ AB ができる．それぞれの表現関数を f_A, f_B, f_{AB} とするとき，$f_{AB}(i)$ を f_A, f_B を使って表せ.

(4) 図 2(c) のような縦線を飛び越える横線は，正しい横線を何本か組み合わせることによって同じ働きを実現できる．問 (1) の結果を参考に，その実現方法を述べよ.

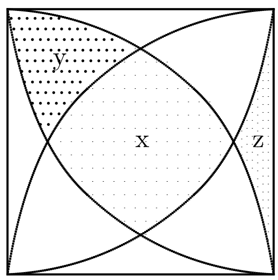
(5) 下端に $1, 2, \cdots, n$ をどのような順番に並べても，それを実現するアミダくじが必ず作れることを示せ.

(図書館情報大 1998)　　(m19981602)

0.88 右下の図形は 1 辺の長さ 1 の正方形の中に，各頂点を中心として半径 1 の円弧を 4 つ描いたものである．図の x, y, z それぞれの領域の面積をやはり x, y, z で表す.

(1) 次の各式の空欄を埋めて， x, y, z の満たす連立方程式を作れ.
ただし，π は円周率である.

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=1 \\ \square x+\square y+\square z=\dfrac{\pi}{4} \\ x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$



(2) x を求めよ.

(図書館情報大 1999)　　(m19991601)

0.89 ある玉を静止状態から放して下に落とすと，床で跳ね返って最初の 80 %の高さまで上がる．そこから再び落ち始め，やはりその 80 %の高さまで跳ね返ることを繰り返す．ただし，玉は床に垂直に落下して垂直に跳ね返るものとし，玉の大きさは無視する．このとき下の問に答えよ.

(1) 最初の高さ $1m$ から落とした玉が n 回目に跳ね返ったとき，どの高さまで上がるかを n で表せ.

(2) そのときまでに玉が動く総距離を n で表せ.

(図書館情報大 1999)　　(m19991602)

0.90 ある電卓では，表示窓に数値が $\boxed{1.23\times 10^3}$ のように有効数字 3 桁と 10 の指数で表示される．この例では $1.23\times 10^3=1230$ が表示されている．4 桁以上の数をキーで打ち込んでも，4 桁以降は有効数字の部分から切り捨てられる．例えば，“ 98765 ”と打ち込むと， $\boxed{9.87\times 10^4}$ という表示

になる（数値は 98700 になる）．最上位の桁，つまり整数桁は 1〜9 のいずれかになり，0 にはならない（ただし，数値が 0 の場合は除く）．計算は表示窓の数値に対して行われ，計算自体は十分な桁数をとって正確に行われるが，結果は表示窓に収まるように四捨五入される．次の各々のように数字・演算キーを打つと，計算結果がどのように表示窓に現れるかを答えよ．

(1) 4567+444　　　(2) 1055× 620

(図書館情報大 1999)　(m19991603)

0.91 ふつうの計算では加算・減算では同じ種類の量どうしの，また乗算は異なる種類の量どうしの計算であることが多い．例えば,「重さ＋長さ」や「金額×金額」は無意味だが,「長さ＋長さ＝長さ」,「単価×個数＝金額」には意味がある．しかし例外もある．

(1) 同種の量の掛け算で，日常的に使われるものの例をあげよ．

(2) 異なる種類の量の足し算で，日常的に使われ，数値にも十分意味のあるものの例をあげよ．

(図書館情報大 1999)　(m19991604)

0.92 ある計算機では 2 つの数の加減算には 1 の時間が，乗算には 10 の時間がかかり，これは数の大きさに関わらず一定である．(1)〜(3) の各式の値をできるだけ短い時間で計算する手順と所要時間を求めよ．ただし，計算で得られた結果は後で何度でも自由に使ってよい．また式は事前に自由に変形してよいが，a, b, c, x がとる数値は，その変形前にはわからないとする．計算手順の書き方は下の例参照．

(1) $ab+ac$ をこのまま計算すれば $X = a\times b$, $Y = a\times c$, $X+Y = (a\times b)+(a\times c)$ で乗算 2 回，加算 1 回が必要，所要時間は $2\times 10+1 = 21$ だが，$a(b+c)$ と変形すれば $Z = b+c$, $a\times Z = a\times(b+c)$ となって乗算 1 回，加算 1 回で済み，所要時間は $10 + 1 = 11$ になる．

(2) $2x$ は $2 \times x$ とすれば所要時間 10，$2x = x + x$ とすれば所要時間は 1 になる．

(1) $a^2 - b^2$　　(2) $ax^2 + bx + c$　　(3) $6x^2 + 5x + 1$

(図書館情報大 1999)　(m19991605)

0.93 後置記法と呼ばれる数式の表現法では，通常の表現法での「$a + b$」という式は「$ab+$」のように，加減乗除の記号を最後に書いて表す.「$(a + b) \times c$」の場合は「$a + b$」が「$ab+$」になり，c を右側から掛けるから，後置記法では「$ab + c\times$」となる．一方,「$a + b \times c$」は「$b \times c$」，つまり「$bc\times$」に左側から a を足すから,「$abc \times +$」になる．また「$a \times b + (c - d)$」は「$ab \times cd - +$」となる．このように後置記法ではでは括弧を用いる必要がなくなる．これらの後置記法の式は次のように構成されていると考えることができる．

$$\underbrace{ab+} \qquad \underbrace{\underbrace{ab+}\, c\times} \qquad \underbrace{a\, \underbrace{bc\times}\, +} \qquad \underbrace{\underbrace{ab\times}\,\underbrace{cd-}\, +}$$

(1) 以下の式を後置記法で表現せよ．

i. $a - b + c$　　ii. $a + b \times (c - d)$

(2) 以下の後置記法の式を通常の表現法で表現せよ．

i. $ab + c - d\times$　　ii. $ab\div\ c + def + -\times$

(図書館情報大 1999)　(m19991606)

0.94 (1) 10 進数の 21 を 2 進数で表せ．

(2) 2 進数の 101.101 を 10 進数で表せ．

(3) 10 進数の 0.3 を 2 進数で表せ．

ただし，2 進数，10 進数に関わらず小数点 5 桁未満は切り捨てる．

(図書館情報大 1999)　(m19991607)

0.95 1辺の長さが6で，2本の対角線の長さが2だけ違うひし形の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001601)

0.96 (1) 辺の長さが a の正方形の四隅を図 (A) のように切り落としてできる正8角形の辺の長さを求めよ．

(2) 同じ正方形の各辺の中点に頂点を持つ正8角形（図 (B)）の面積は，図 (A) の正8角形の面積の何倍か．

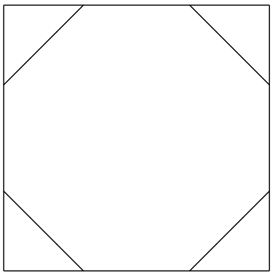


図 (A)

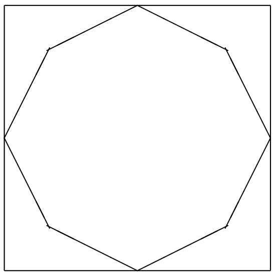


図 (B)

(図書館情報大 2000)　　(m20001602)

0.97 2つのチームが対戦して必ず勝敗が決まる（引き分けがない）試合によって優勝者を決めるとき，以下の問に答えよ．トーナメント，リーグ戦については下の注を参照．

(1) 48 チームでトーナメントをする場合，全部で何試合行われることになるか．

(2) 48 チームでトーナメントをする場合，1回戦を戦うチームは何チームあるか．

(3) 48 チームを6チームずつのリーグに分けてリーグ戦を行い，各リーグの一位どうしで決勝トーナメントを行う場合，全部で何試合行われることになるか．

(4) n は自然数で，$n = 2^k$ (k は0以上の整数) の形には表せないとする．n チームでトーナメントをするとき，一回戦から戦うチーム数を n で表せ．ただし，通常の演算・関数記号のほか，次の関数 $f(x)$ を用いてよい．

$f(x) = [x$ を超えない最大の整数 $]$　例：$f(1) = 1, f(2.5) = 2, f(-2.5) = -3$

(1) トーナメント : 勝ち抜き戦によって優勝者を決める方式で，優勝までの試合数が一番多い対戦を1回戦，以下順に2回戦，3回戦等と呼ぶ．1回戦に勝ったチームは2回戦に，2回戦に勝ったチームは3回戦に進む（以下同様）．ただし出場チームによっては1回戦は戦わず，2回戦から登場するチームもある．

(2) リーグ戦 : リーグに属するすべてのチームが互いに1回ずつ必ず対戦し，勝ち数の多い順に順位をつける．同率1位がある場合にはくじ引きなど，試合以外の方法で1位を決める．

(図書館情報大 2000)　　(m20001603)

0.98 厚さ $1\,cm$ の板で内側が縦・横・深さ $1\,cm$ のマス M_1 を作る．

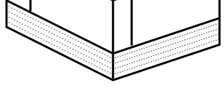
同じ板を使って M_1 がぴったりと入るように M_2 をつくる．

以下同様にして $M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots$ を作る．

(1) M_k の容積を求めよ．

(2) マス M_k の板の部分の体積がその容積よりも
初めて小さくなるときの k の値を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001604)



0.99 1 から 100 までの番号がついた空の箱が 100 個ある．これに対し：

- 1 回目にすべての箱に玉を 1 つずつ入れる．
- 2 回目には $2, 4, 6, \cdots, 100$ の箱に玉を 1 つずつ入れる．

  $\cdots\cdots\cdots$
- n 回目には $n, 2n, 3n, \cdots, kn, \cdots$ の箱に玉を 1 つずつ入れる $(kn \leqq 100)$．

この操作を n が 100 になるまで繰り返す．このとき以下の問に答えよ．

(1) 箱 47 と箱 96 に入っている玉の数はいくつか．

(2) 玉がちょうど 9 個入っている箱をすべて答えよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001605)

0.100 (1) 半径 r の円盤を，円盤と同じ中心をもつ 3 つの同心円で切って 4 つの部分に分ける（一番内側は円形，他の 3 つはドーナツ型になる）．各部分の面積が互いに等しくなるようにするには，3 つの同心円の半径をいくらにすればよいかを答えよ．

(2) 底面の半径が r，高さが h の円錐を水平に切って体積が等しい n 個の部分 $(n \geqq 2)$ に分けたとき，一番上の小さい円錐のすぐ下にある円錐台の厚さを求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001606)

0.101 (1) 正確に長方形の形をした土地があり，その縦・横の長さを測ったところ，小数点以下を四捨五入して $517m$ と $483m$ であった．この土地の正確な面積は何 m^2 以上，何 m^2 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ．

(2) 正確に直方体の形をした箱があり，その縦・横・高さの長さをミリ単位で測ったところ，小数点以下を四捨五入して $200mm$, $300mm$, $500mm$ であった．この箱の正確な体積は何 cm^3 以上，何 cm^3 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ（単位の違いに注意）．

(図書館情報大 2000)　　(m20001607)

0.102 あるバス営業所の燃料消費量は 1 年間に $R(l)$ で，消費の割合は一定である．燃料を保管するのに必要な費用は燃料の量，保管期間のそれぞれに比例し，1 l の燃料を 1 年間保管するには a 円の費用がかかる．燃料の注文は在庫がなくなったときだけ行い，注文した量に関係なく，1 回当たり b 円の費用がかかる．なお，年度の初めと終わりでの在庫量は同じとする．

(1) 毎回の注文量が一定（$x(l)$）のとき，1 年間で注文にかかる費用はいくらか．

(2) 毎回の注文量が一定（$x(l)$）のとき，1 年間で保管にかかる費用はいくらか．

(3) 毎回の注文量を一定としたとき，1 年間の注文にかかる費用と保管にかかる費用の和を最小にする注文量 $x_{\mathrm{opt}}(l)$ を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001608)

0.103 放物線 $y = x^2 + 2x - 2$ を x 軸の方向へ a，y 軸の方向へ b だけ平行移動する．

(1) 平行移動した後の放物線の方程式を a, b を使って示せ．

(2) 平行移動した後も放物線が点 $(1, 1)$ を通るとき，a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

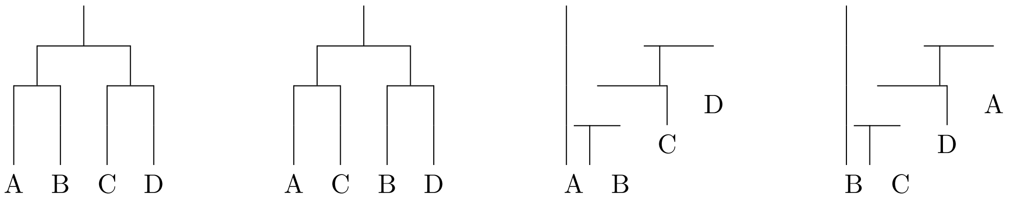
(3) a, b が (2) で求めた必要十分条件を満たしていれば，平行移動した後の放物線の頂点はある曲線の上に必ず乗る．その曲線の方程式を求めよ．

(図書館情報大 2002)　　(m20021601)

0.104 A, B, C, D の 4 人がトーナメント戦で優勝を争う．

A と B，C と D はそれぞれ同程度の強さで，互いに対戦したとき勝つ確率はそれぞれ 0.5 であり，一方 A，B は C，D より強く，対戦したとき A（または B）が勝つ確率は 0.7 とする．

下の図の (a)-(d) 組み合わせで対戦を進めたとき，それぞれの場合に A が優勝する確率を求めよ．



(a)　(b)　(c)　(d)

(図書館情報大 2002)　(m20021602)

0.105 n 個の数 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の最大値を $\max(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ で表す．例えば $\max(1,2)=2$, $\max(3,1,3)=3$ である．同様に $\min(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ は $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ の最小値を表す．

(1) max を使って $|a|$ を表す式を示せ．

(2) max を使って $\min(a,b)$ を表す式を示せ．

(3) 絶対値記号を使って $\max(a,b)$ を表す式を示せ．

(4) max, min を使って，a,b,c の 3 数を大きい順に並べた場合，真中にくる値を表す式を示せ．例えば 3 数が 7, 2, 3 であれば 3 が，1, 1, 2 であれば 1 が求める式の値になる．

ただし，式には各問ごとに指定された，max，min 絶対値記号のほか，四則演算記号（単項マイナス：$-a$ を含む）やカッコ類，1,2 のような定数だけを使ってよい．

(図書館情報大 2002)　(m20021603)

0.106 整数 x の n 乗 x^n を計算するときに，次の漸化式

$$x^k = \begin{cases} x^\ell \times x^\ell & (k=2\ell\text{のとき}) \\ x^{2\ell} \times x & (k=2\ell+1\text{ のとき}) \end{cases}$$

を再帰的に適用すると効率よく求められることが，2200 年以上前から知られている．

(1) $n=15$ のとき，上の漸化式を適用して x^{15} を分解すると，

$$\begin{aligned} x^{15} &= x^{\boxed{ア}} \times x \\ x^{\boxed{ア}} &= x^{\boxed{イ}} \times x^{\boxed{イ}} \\ x^{\boxed{イ}} &= x^{\boxed{ウ}} \times x \\ x^{\boxed{ウ}} &= x^{\boxed{エ}} \times x^{\boxed{エ}} \\ x^{\boxed{エ}} &= x^{\boxed{オ}} \times x \\ x^{\boxed{オ}} &= x^{\boxed{カ}} \times x^{\boxed{カ}} \end{aligned}$$

となるので，これを下の行から逆順にたどれば，x^{15} が 6 回の乗算で求められる．

(2) $n=15$ に対して (1) は実は最短手順ではなく，途中の値を 1 個保存することにより，5 回の乗算で x^{15} を求めることができる．その手順の 1 つは，

$$\begin{aligned} & x \times x \longrightarrow x^2 \\ & x^{\boxed{キ}} \times x^{\boxed{ク}} \longrightarrow x^{\boxed{ケ}} \\ & x^{\boxed{コ}} \times x^{\boxed{サ}} \longrightarrow x^{\boxed{シ}} \\ & x^{\boxed{ス}} \times x^{\boxed{セ}} \longrightarrow x^{\boxed{ソ}} \\ & x^{\boxed{タ}} \times x^{\boxed{チ}} \longrightarrow x^{15} \end{aligned}$$

（ただし，$x^{\boxed{ツ}}$を保存した．）

と表される．($\boxed{キ}$～$\boxed{ツ}$には同じ数字が入る箇所もある．また，$\boxed{キ}$と$\boxed{ク}$のように交換可能なものについては，解答順は問わない.)

(図書館情報大 2002)　　(m20021604)

0.107 1～n の番号が書かれた n 個の玉と，1～k の番号が書かれた k 個の箱があり，各箱には任意の個数の玉を入れることができるものとする．このとき,「n 個の玉のすべてを，いずれかの箱に入れる方法」の総数を考える．

(1) 玉の個数 n を固定する．箱の個数 k が以下の各条件を満たすとき,「すべての箱に 1 個以上の玉が入る」ような入れ方はそれぞれ何通りあるか，数値または n の式で表せ．

（ア） $k=1$ 　（イ） $k=2$ 　（ウ） $k=n-1$ 　（エ） $k=n$

(2) 箱の個数 k を固定する．玉の個数 n が以下の各条件を満たすとき,「どの箱にも 2 個以上の玉が入らない」ような入れ方はそれぞれ何通りあるか，数値または k の式で表せ．

（ア） $n=2$ 　（イ） $n=k$ 　（ウ） $n=k+1$

(図書館情報大 2002)　　(m20021605)

0.108 以下の $\boxed{ア}$～$\boxed{ク}$ にあてはまる式あるいは数値を解答欄に記せ．ただし $\boxed{エ}$ には複数の値が入る．

- 以下で $\log x$ は 10 を底とする常用対数 $\log_{10} x$ を指す．
- 特に $\log 2 = 0.301030$（小数第 7 位を四捨五入したもの）である．
- 実数 x $(x \geq 1)$ に対し，$\log x$ の小数部分を $L(x)$ で表す．例えば $\log 20 = 1 + \log 2$ より $L(20) = L(2)$ であり，これを小数点以下 4 位まで記すと 0.3010 である．

(1) 実数 x $(x \geq 1)$ を 10 進表記したとき，最高位の数字が d, $(d = 1, 2, \ldots, 9)$ であるのは

$$\boxed{ア} \leq L(x) < \boxed{イ}$$

のときである．

(2) 特に $d=1$，つまり最高位が 1 である場合について考える．実数列 a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が $\log a_n = 0.3 \times n$ を満たすとき，a_n の最高位が 1 になるのは n を $\boxed{ウ}$ で割った余りが$\boxed{エ}$ のときである．($\boxed{エ}$ には条件を満たすものすべてを記せ)．

(3) $L(2^3) = \boxed{オ}$ 　$L(2^4) = \boxed{カ}$ 　$L(2^{20}) = \boxed{キ}$

ただし値は小数第 5 位を四捨五入した小数第 4 位までの数値で答えよ．

(4) n が 1 から 50 までの整数値をとるとき，2^n の最高位の数字が 1 になる場合は $\boxed{ク}$通りある．

(図書館情報大 2002)　　(m20021606)

0.109 (1) 2 次元ユークリット空間（即ち平面）$\mathbb{R}^2$ の部分集合に関する次の性質を考える：

(1) 開集合である；**(2)** 閉集合である；**(3)** コンパクトである；**(4)** 連結である．

次の条件を満たす空でない部分集合の例をひとつずつあげよ：

(a) **(1)** かつ **(2)** 　(b) **(1)** であるが **(2)** ではない

(c) **(1)** ではないが **(2)** である 　(d) **(1)** でも **(2)** でもない

(e) **(3)** でないがその閉包（closure）は **(3)** 　(f) **(4)** でないがその内部（interior）は **(4)**

(2) 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ．

(3) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の 2 つの部分集合 $[0,1]$ と $[0,1] \cup [2,3]$ の間には全単射対応（即ち 1 対 1 かつ上への対応）が存在し得るか否か，その理由もこめて，述べよ．

ここで，$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqq x \leqq b\}$ である．

(茨城大 2006)　　(m20061707)

0.110 (1) ３つの元からなる集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合をすべてあげよ．

(2) 一般に n 個 $(n \geq 1)$ の元からなる集合 X の部分集合は総計何個あるか論ぜよ．

(3) 一般に，写像 $f\ :\ X \to Y$ について次の主張は正しいか否か判定し，その理由を述べよ．

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$　　(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$　　(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ただし，A, B は X の部分集合とし, C, D は Y の部分集合を表す．また，X の部分集合 X'，Y の部分集合 Y' に対して，

$f(X') = \{f(x) \in Y \mid x \in X'\}$，　$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$　である．

(茨城大 2007)　　(m20071708)

0.111 X, Y を２つの集合とし，X の任意の元 x に対して Y の元 y をただ１つ対応させる規則を，X から Y への写像という．集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ は，次の条件 (i) を満たすとき単射であるといい，条件 (ii) を満たすとき全射であるという．特に，条件 (i),(ii) を同時に満たすとき全単射であるという．

(i) X の元 x_1, x_2 について，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．

(ii) Y の任意の元 y に対し，$y = f(x)$ となる X の元 x が少なくとも１つ存在する．

また，X から Y への全単射が存在するとき，２つの集合 X と Y は対等であるという．

(1) ２つの写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が全単射ならば，f は単射，g は全射であることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to Y$ は全射でなく，$g : Y \to Z$ は単射でないが，合成写像 $g \circ f$ が全単射となる例を１つ挙げよ．ただし，X, Y, Z はすべて空集合ではないとする．

(3) X, Y を元の個数がそれぞれ m, n の有限集合とする．X から Y への写像全体の集合 $F(X, Y)$ の元の個数を求めよ．また，$F(X, Y)$ に属する写像のなかで単射となるものの個数を求めよ．

(4) 自然数全体の集合 N と整数全体の集合 Z は対等であることを示せ．また，N と実数全体の集合 R は対等でないことを示せ．

(茨城大 2008)　　(m20081703)

0.112 集合 X の部分集合全体からなる集合をべき集合といい，2^X と表す．以下の各問いに答えよ．

(1) $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ とする．このとき，2^X に属する全ての要素を記述せよ．

(2) 集合 X, Y に対して

$$X \subset Y \Longleftrightarrow 2^X \subset 2^Y$$

となることを示せ.

(3) 集合 X, Y に対して

$$2^{X \cap Y} = 2^X \cap 2^Y$$

となることを示せ.

(4) 集合 X, Y に対して

$$2^{X \cup Y} \supset 2^X \cup 2^Y$$

となることを示せ．また，$2^{X \cup Y} \subset 2^X \cup 2^Y$ とならない例を一つ挙げよ．

(茨城大 2009)　　(m20091707)

0.113 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0,1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0,1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f, g に対し, X の上で定義された関数 $f * g$, $f\Box g$ を

$$(f * g)(x) = f(x)g(x)\ , \quad (f\Box g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)\ , \quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき}, \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f, g, h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f * (g\Box h) = (f * g)\Box(f * h)\ , \quad (f\Box g)\Box h = f\Box(g\Box h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) * \Phi(B)\ , \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A)\Box\Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010) (m20101707)

0.114 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 1024 桁の 2 進数の非負の整数が表す数の個数を 10 進数で表すと, 最大で何桁になるか求めよ.

(2) 1024 桁の 2 進数の非負の整数と 100 桁の 3 進数の非負の整数の積で表される数の個数を 10 進数で表すと, 最大で何桁になるか求めよ.

(山梨大 2007) (m20071807)

0.115 n を自然数とするとき, $2^{2n+1} + 1$ が 3 で割り切れることを, 数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 2007) (m20071809)

0.116 n を自然数とするとき,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 2009) (m20091806)

0.117 次の 3 つの命題を仮定する.

$\boldsymbol{S}_1$: 犯人は悪代官である.

$\boldsymbol{S}_2$: 水戸黄門は歓迎される.

$\boldsymbol{S}_3$: 悪代官は歓迎されない.

これらの命題から得られる結論をすべて述べよ.

(山梨大 2009) (m20091807)

0.118 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} \geq \sqrt{n}$

(山梨大 2015) (m20151803)

0.119 x, y を実数としたとき，次のそれぞれが「$x^2+y^2 \leq 1$」に対して「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「いずれでもない」のうちいずれかを答えよ．

(1) $x \leq 1/2$ または $y \leq 1/2$

(2) $|x| \leq 1$ かつ $y \leq \sqrt{1-x^2}$ かつ $y \geq -\sqrt{1-x^2}$

(3) $|xy| \leq 1/2$

(4) $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ かつ $|y| \leq 1/\sqrt{2}$

(山梨大 2016)　　(m20161801)

0.120 命題の証明に関する以下の問いに答えなさい．

(1) p と q を命題とする．命題 $p \to q$ が真であることを証明するために，下表に示す 3 つの方法がある．直接法に関する説明を参考にして，対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい．

直接法	pを真と仮定して, qが真であることを証明する.
対偶法	（解答用紙に説明しなさい）
背理法	（解答用紙に説明しなさい）

(2) 命題関数 $P(n)$ を「最初の n 個の正の奇数の和は n^2 である」とする．すべての正の奇数 n に対して $P(n)$ が真であることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181804)

0.121 $x,\ y$ を実数としたとき，命題 A「$x^2+y^2 \leq 1$」と命題 B「$y^2 \leq x$」に対して答えよ．

(1) それぞれ A と B が真である $x,\ y$ の領域を図示せよ．

(2) A と B が同時に真である $x,\ y$ の領域を図示せよ．

(3) A または B が真である $x,\ y$ の領域を図示せよ．

(4) 「A と B の否定」あるいは「A の否定と B」が真である $x,\ y$ の領域を図示せよ．

(山梨大 2018)　　(m20181806)

0.122 40 名のクラスについて，選択科目 $A,\ B,\ C$ の履修状況は以下のとおりである．

・科目 $A,\ B,\ C$ のそれぞれの履修者は 18 名である．

・少なくとも科目 A と B を履修している学生は 9 名である．

・少なくとも科目 A と C を履修している学生は 8 名である．

・少なくとも科目 B と C を履修している学生は 5 名である．

・1 科目以上を履修している学生は 35 名である．

右のベン図における領域のうち，以下の (a)〜(e) に該当する人数を求めなさい．

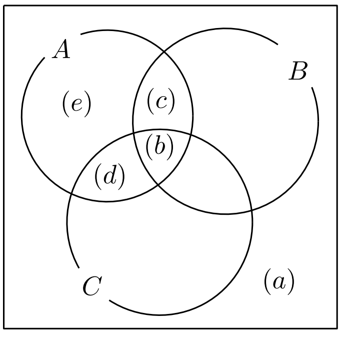
(a) 1 科目も履修していない学生

(b) 3 科目履修している学生

(c) 2 科目 A と B のみを履修している学生

(d) 2 科目 A と C のみを履修している学生

(e) 1 科目 A のみを履修している学生



(山梨大 2019)　　(m20191804)

0.123 推移律の成立とは，集合の任意の要素，A, B, C に対し関係 (A, B) と関係 (B, C) がともに真ならば，関係 (A, C) が真になることである．

例えば，「集合:整数，関係 (A, B):A は B より小さい」において，推移律は成立する．

次の集合，関係について推移律が成立するかどうか，具体例をあげて述べよ．

(1) 「集合:整数，関係 (A, B):A は B より 10 以上大きい」

(2) 「集合:整数，関係 (A, B):A と B の差の絶対値は 1 である」

(3) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A は B と原点を結ぶ直線上にある」

(4) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A と B との距離が 1 未満である」

(山梨大 2019) (m20191806)

0.124 ${}_nC_r$ $(0 \leq r \leq n)$ は式 (1)-(3) で与えられる．

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{1} $$

$$ {}_nC_n = 1 \tag{2} $$

$$ {}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \qquad (1 \leq r \leq n) \tag{3} $$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ．

$$ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \tag{4} $$

(山梨大 2020) (m20201804)

0.125 10 進表記の $m(m \geq 1)$ 桁の自然数 n の各位の数字を $d_i(1 \leq i \leq m,\ 0 \leq d_i \leq 9)$ と表すものとし，$r(n)$ を以下と定義する．

$$ r(n) = \sum_{i=1}^{m} d_i $$

このとき，$r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ．

(山梨大 2021) (m20211801)

0.126 楕円 C : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $F(\sqrt{3}, 0)$ と C 上の点 $P(x, y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向とのなす角を θ とするとき

$$ r = \frac{1}{2 + \sqrt{3}\cos\theta} $$

が成り立つことを示せ．

(2) 点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP, FQ の長さをそれぞれ p, q とするとき，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ．

(3) 点 F において互いに直交する C の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ．

ここで楕円 C の弦とは C 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである．

(新潟大 1998) (m19982001)

0.127 (1) $y = |x-1|$ のグラフを描け．

(2) $y = \big||x-1| - 1\big|$ のグラフを描け．またこのグラフと軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $y = \Big|\big||x-1| - 1\big| - 1\Big|$ のグラフを描け．またこのグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(新潟大 2002) (m20022001)

0.128 (1) 実数 a, b, c について，不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ 証明せよ．

(2) ２次方程式 $x^2-5x+d=0$ が虚数解を持つような d の範囲を求めよ．

(新潟大 2011) (m20112012)

0.129 x–y 平面上の曲線 $y=ax^2+1$ と直線 $y=x$ が接するとき，a の値と接点の座標を求めよ．

(新潟大 2012) (m20122003)

0.130 5 つの球があり，1 から 5 まで番号がついている．次の (1) から (3) に答えよ．

(1) 5 つの球から 3 つを取り出す組合せは何通りか.

(2) 5 つの球から 3 つを取り出し 1 列に並べる並べ方は何通りか.

(3) 5 つの球を円形に並べる並べ方は何通りか.

(新潟大 2014) (m20142015)

0.131 半径 a の円に内接する正三角形の面積を求めよ．

(新潟大 2014) (m20142016)

0.132 $\dfrac{3}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{2^x}=2$ を x について解け．

(新潟大 2017) (m20172014)

0.133 $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．a と b の値を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192007)

0.134 次の方程式を解け． $(\log_3 x)^4-(\log_3 x)\left(\log_3 x^3\right)+\log_3 x^2=0$

(新潟大 2019) (m20192008)

0.135 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け． $\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\sin x-2\cos x+1<0$

(新潟大 2019) (m20192009)

0.136 次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$ がある．

$$x_1=1,\ x_2=4,\ x_{n+2}=(p+3)x_{n+1}-3px_n$$

次の問いに答えよ．ただし p は実数である．

(1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=x_{n+1}-px_n$ により定める．数列 $\{a_n\}$ の一般項を p を用いて表せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=x_{n+1}-3x_n$ により定める．数列 $\{b_n\}$ の一般項を p を用いて表せ.

(3) $p \neq 3$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を p を用いて表せ.

(4) $p=3$ のとき，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=\dfrac{x_n}{3^n}$ により定める．このとき数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192012)

0.137 和 $\displaystyle\sum_{n=10}^{100}\log a^n$ は $\log a$ の何倍か．ただし，$a>0$ とする．

(長岡技科大 1991) (m19912101)

0.138 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ とおく．$a_n>1000$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

(長岡技科大 1994) (m19942101)

0.139 $(a+bi)^2 = i$ となる実数の組 (a, b) を求めよ.（ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位.）

(長岡技科大 1996)　　(m19962101)

0.140 自然数 n の各位の数の和を $f(n)$ とする．たとえば $f(2053) = 2+0+5+3 = 10$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} f(n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n)$ を求めよ．

(3) k を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k} f(n)$ を求めよ．

(長岡技科大 1998)　　(m19982101)

0.141 自然数 n に対して，数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の式で表す公式を以下の手順で求める．下記の $\boxed{}$ にあてはまる数を記入せよ．

数列 a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を $a_k = k$, $b_k = k(k-1)$, $c_k = k(k-1)(k-2)$ と定義すると

$$b_{k+1} - b_k = \boxed{\text{ア}}\, a_k\ , \qquad c_{k+1} - c_k = \boxed{\text{イ}}\, b_k$$

である．これらの両辺を $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について和を取り整理すると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{ウ}}\, b_{n+1}\ , \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{エ}}\, c_{n+1}$$

が得られる．一方，$k^2 = \boxed{\text{オ}}\, a_k + \boxed{\text{カ}}\, b_k$ と表せるので

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\text{キ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, c_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}\, n^3 + \boxed{\text{コ}}\, n^2 + \boxed{\text{サ}}\, n$$

である．

(長岡技科大 2000)　　(m20002101)

0.142 (1) $(1+i)^{16}$ を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(2) a を実数とする. xy 平面の 3 直線 : $ax + 3y + 1 = 0$, $2ax - y + 2 = 0$, $2x + ay + 3 = 0$ が 1 点で交わっているとき，a の値を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052101)

0.143 直角三角形の各辺の長さをそれぞれ a, b, c (c は斜辺) として，次の問に答えよ．

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明せよ．

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) を 2 つ示せ．

(3) 正の整数 n に対して，$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ であることを証明せよ．

(4) (3) で示した結果を用いて，$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) が無限個存在することを証明せよ．

(富山大 2000)　　(m20002301)

0.144 開区間 $(-1, 1)$ の上で定義された写像 $f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leqq 0) \\ 1 - x & (0 < x < 1) \end{cases}$
は $(-1, 1)$ から $(-1, 1)$ への全単射であることを示せ.

(富山大 2008)　　(m20082308)

0.145 $\boldsymbol{R}$ を実数全体からなる集合とする．$\boldsymbol{R}$ の空でない有界部分集合 A の上限を $\sup A$ で表す.

(1) $\boldsymbol{R}$ の空でない有界部分集合 A, B に対して $C = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ とおくとき
$\sup C = \sup A + \sup B$ 　　であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{X}$ を空でない集合とし，f, g を $\boldsymbol{X}$ 上の有界な実数値関数とすれば,
$\sup\{f(x)+g(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\} \leqq \sup\{f(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\} + \sup\{g(x) \mid x \in \boldsymbol{X}\}$ 　　であることを示せ.

(富山大 2008) 　　(m20082309)

0.146 正の整数 a に対する関数 f の値を，a が 3^n で割り切れて 3^{n+1} で割り切れないとき $f(a) = n$ と定める．ただし，n は 0 以上の整数である．次の問いに答えよ.

(1) $f(ab) = f(a) + f(b)$ を証明せよ.

(2) $f(a+b) \geqq \min\{f(a),\ f(b)\}$ を証明せよ．また，等号が成り立たない $a,\ b$ の例を一組あげよ.

(富山大 2009) 　　(m20092307)

0.147 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \to Y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) X の元 $a,\ b$ が $f(a) = f(b)$ をみたすとき $a \sim b$ と書く. この関係～は同値関係であることを示せ.

(2) (1) の同値関係～による商集合を $X/\sim$ で表すとき, $X/\sim$ から $Y/\sim$ への全単射が存在することを示せ.

(富山大 2010) 　　(m20102307)

0.148 $d(x, y)$ を空でない集合 X 上の距離とし，$x, y \in X$ に対して $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ とする.

(1) ρ は X 上の有界な距離であることを示せ.

(2) 距離 d が有界であることが ρ と d が同等となるための必要十分条件であることを示せ．ただし，同等とは任意の $x, y \in X$ に対して $Ad(x, y) \leq \rho(x, y) \leq Bd(x, y)$ となる正定数 $A,\ B$ が存在することである.

(富山大 2012) 　　(m20122308)

0.149 点 (x_1, y_1) から，直線 $ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の長さは
$\dfrac{|\ ax_1 + by_1 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で表されることを証明せよ.

(福井大 2003) 　　(m20032401)

0.150 3 直線 $4x - 3y + 3 = 0$，$x - 4y + 4 = 0$，$-3x - y + 14 = 0$ によって作られる三角形について，次のものを求めよ.

(1) 面積 　　　　(2) 外心の座標

(福井大 2003) 　　(m20032402)

0.151 10 進数の 34 を 2 進数で表記しなさい.

(福井大 2004) 　　(m20042401)

0.152 $y = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ とすると, y はいくらになるか求めよ. ただし $r \neq 1$ とする.

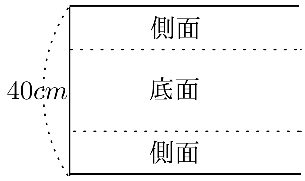
(福井大 2005) 　　(m20052414)

0.153 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha + \beta)$ 　　　　(2) $\cos(\alpha - \beta)$

(福井大 2005) 　　(m20052415)

0.154 幅 $40cm$ のアルミ板を図の点線のように折り曲げて, 水路を作りたい. 水路の断面積が最大になるようにするには, 端から何 cm のところで折り曲げればよいか. また, このときの断面積を求めよ.



(福井大 2005)　　(m20052416)

0.155 a , b を正の数とするとき, 以下の関係が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(福井大 2005)　　(m20052420)

0.156 次の値を求めなさい.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times \ x^2y^{\frac{4}{3}}$　(2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$　(3) $4\log_2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_2 3+\log_2\frac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $5^{\log_5 7}$　(5) $\log_2 3\cdot\log_{27}25\cdot\log_5 16$

(福井大 2006)　　(m20062413)

0.157 $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3$ において，x の定義域が $0.5\leq x\leq 8$ とする．この時

(1) $s=\log_2 x$ とするとき，s の範囲を示せ．

(2) y を s の関数として表し，そのグラフの概形を示せ．

(3) y の最小値と最大値と，その各々を与える x を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062414)

0.158 $y=a\sin x+b\cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の関数が，$y=A\sin(x+\theta)$ の形に変換できることを示しなさい．

(2) $a=1,\ b=\sqrt{3}$ の時，A および θ の値を求めよ．

(3) $0\leq x\leq\pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の x の値を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062415)

0.159 $\left(2x^2-\frac{1}{3x}\right)^8$ の展開式において，x^7 の係数を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062424)

0.160 次の関数を因数分解しなさい.

(1) $9x^4-2x^2y^2+y^4$　(2) x^3-7x-6　(3) $x^3-6x^2-12x+8$

(福井大 2008)　　(m20082411)

0.161 次の値を求めよ.

(1) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$　(2) $\log_3 9\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{5}$　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　　(m20082412)

0.162 x は鋭角，y は鈍角であり，$\sin x=\frac{1}{2}$，$\sin y=\frac{1}{3}$ とする．このとき，$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$ の値を求めよ.

(福井大 2009)　　(m20092406)

0.163 点 $(1,-2)$ から直線 $4x+3y+7=0$ への最短距離を求めよ.

(福井大 2009) (m20092414)

0.164 数列の和の公式で (　　) の中に入る式を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big)=n^3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\Big)=n\times 2^{n+1}$

(福井大 2010) (m20102412)

0.165 2 次方程式 $x^2-2px+p-2=0$ が，次の条件の 2 根を持つように p の値の範囲を定めよ.

(1) 1 根が正，他の 1 根が負となる場合.

(2) 1 根が -1 と 1 の間にあり，他の 1 根が 1 と 2 の間にある場合.

(福井大 2011) (m20112411)

0.166 x^4+x^2-6 を，次の範囲で因数分解せよ.

(1) 有理数 (2) 実数 (3) 複素数

(福井大 2011) (m20112412)

0.167 次の値を求めよ.

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}}\times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4\log_2\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 3+\log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ+\sin 50^\circ)^2+(\cos 50^\circ-\cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011) (m20112413)

0.168 2 次方程式 $2x^2-5x-6=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(福井大 2012) (m20122401)

0.169 次式を因数分解せよ.

(1) $\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{1}{9}x^2y^2+\dfrac{1}{16}y^2+\dfrac{1}{6}xy$

(2) $b^2+c^2+b(a-c)-c(a+b)$

(福井大 2012) (m20122402)

0.170 次の値を求めよ.

(1) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}\left(b^{-\frac{3}{2}}\sqrt{a^2b}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}}$ ， ただし，a,b は正の数とする.

(2) $\log_5 \sqrt[8]{5}$

(3) $\dfrac{\log_5 8 \cdot \log_3 6 \cdot \log_2 3}{\log_5 3 + \log_5 2}$

(福井大 2012)　　(m20122414)

0.171　次の方程式を解け.

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

(福井大 2012)　　(m20122415)

0.172　次の関数の最大値及び最小値を求めよ.

$$\cos 2x + \sin x$$

(福井大 2012)　　(m20122416)

0.173　次の設問に答えよ.

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ の値を求めよ.

(2) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ.

(3) $\log_{10} E(M) = 1.5M + 11.8$ の時, $E(7)$ および $\dfrac{E(9)}{E(7)}$ の値を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132415)

0.174　次の設問に答えなさい.

(1) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \cdots$ がある. この数列の何項までの和をとれば, 初めて 10000 を超えるか. ただし, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(2) n を自然数とするとき $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ を証明しなさい.

(福井大 2013)　　(m20132416)

0.175　次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限値を求めよ.

$$a_1 = 0 \qquad \text{および} \qquad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}a_n$$

(福井大 2014)　　(m20142422)

0.176　3 次方程式 $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ の実数でない 2 つの根を α, β とするとき, 次の値を求めよ.

(1) α および β　　(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$　　(3) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$　　(4) $\alpha^3 + \beta^3$

(福井大 2015)　　(m20152414)

0.177　次の複素数の絶対値を求めよ.

(1) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)$　　(2) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$

(福井大 2015)　　(m20152431)

0.178　次の連立方程式を解け. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

(岐阜大 2001)　　(m20012601)

0.179 父と, ３人の兄弟, A 君, B 君, C 君がいる. この３兄弟は, 論理的に物事を考えることができる兄弟である. さて, 父は, 赤いボールを３個, 白いボールを２個, の計５個のボールをもっていた.

今, A 君, B 君, C 君の３人がそれぞれ１つの箱を持っていて, 父は, この箱に５個のボールの中から, 任意にボールを選び, ３人の箱にそれぞれ１個ずつわからないように入れた.

しかし, A 君は, B 君と C 君の箱に入れたボールの色をそれぞれ見てしまった.（B 君・C 君も A 君が見てしまったことを知っている）

B 君も, C 君の箱に入れたボールの色を見てしまった.（A 君・C 君も B 君が見てしまったことを知っている）

そこで, 父は, 兄弟３人を前にして, A 君に次の質問をした.「A 君, 君は自分の箱に入っているボールの色を知ることができるかね？」A 君は, この父の問いかけに,「知ることはできない.」と答えた. B 君もこの答えを聞いていた.

次に, 父は, 再び兄弟３人を前にして, B 君に次の質問をした.「B 君, 君は自分の箱に入っているボールの色を知ることができるかね？」B 君も, この父の問いかけに,「知ることはできない.」と答えた.

では, この時, C 君の箱には, 何色のボールが入っているか, その理由を説明しながら, 答えなさい（なお, A 君, B 君とも嘘はついていないとする）.

(岐阜大 2005)　　(m20052618)

0.180 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x, y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える．このとき，半径 r の円は，x 軸となす角 θ（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \boxed{\quad（ア）\quad} \\ y = \boxed{\quad（イ）\quad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を n 等分して，$\Delta\theta = 2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$\theta_0 = 0,\ x_0 = r,\ y_0 = 0$

$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1} = \boxed{\quad（ウ）\quad} \\ y_{i+1} = \boxed{\quad（エ）\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\cdots$, (x_n, y_n) を求め，これらの２点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）〜（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，$r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は使わない形で答えよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062622)

0.181 10 進数の表記で 14 は 2 進数の表記では $\boxed{（ア）}$ となる.

10 進数の表記で 18 は 16 進数の表記では $\boxed{（イ）}$ となる.

10 進数の表記で $14 + 18$ の計算結果は 2 進数の表記で $\boxed{（ウ）}$, 16 進数の表記で $\boxed{（エ）}$ となる.

10 進数の表記で $14 \times\ 18$ の計算結果は 2 進数の表記で $\boxed{（オ）}$, 16 進数の表記で $\boxed{（カ）}$ となる.

上記の (ア)〜(カ) に入る数値を答えよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072611)

0.182 $X = \{x\ :\ |x| \leq \pi,\ x \in \boldsymbol{R}\}$, $Y = \{y\ :\ |y| \leq 1,\ y \in \boldsymbol{R}\}$ とする．以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい．ただし，$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表すものとする．

$$f\ :\ X \to Y\ , \quad x \mapsto \sin x\ .$$

(1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(岐阜大 2008)　　(m20082609)

0.183 以下の文を読んで，設問に答えよ．

ブール変数（2 値変数）x, y, z, u がある．論理式 $x \leqq y$ は，$x = 1$ かつ $y = 0$ のとき成り立たず（値 0 をとり），その他のときは成り立つ（値 1 を取る）ものとする．変数 u は，$x \leqq y$ が成り立ちかつ $y \leqq z$ が成り立つとき値 1 をとり，その他のときは値 0 を取るものとする．

(1) 変数 x, y, z, u の関係を表す真理値表を作成せよ．

(2) 変数 u を変数 x, y, z を用いた論理式で表せ．論理記号として，論理和，論理積，否定の記号，および括弧を必要に応じて用いるものとする．

(岐阜大 2008)　　(m20082613)

0.184 次の式の値を求めよ．

(1) $\tan\theta = 1/3$ のとき．$(\sin\theta + \cos\theta)^2$ の値を求めよ．

(2) $(1 + \tan\alpha)/(1 - \tan\alpha) = 2 + \sqrt{3}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092614)

0.185 xy 平面に直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて三角形を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，直線の方程式は ① $x - y + 1 = 0$，② $2x + y - 4 = 0$，③ $x + 3y + 3 = 0$ とする．

(1) 直線の方程式 ①, ②, ③ の傾きと y 軸の切片を求めよ．

(2) 直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて xy 平面に三角形を図示せよ．

(3) 問 (2) で図示した方程式 ① と ② の交点を A，③ と ① の交点を B，② と ③ の交点を C とし，交点 A, B, C の座標を求めよ．

(4) 交点 A, B, C で囲まれた三角形（$\triangle ABC$）の面積を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092615)

0.186 連立方程式 $\begin{cases} 2x + y = kx \\ 2x + 3y = ky \end{cases}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつような定数 k の値を求めよ．

(豊橋技科大 1996）　　(m19962701)

0.187 $x + y = 2$ のとき，$\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ．

(豊橋技科大 1996）　　(m19962702)

0.188 $x + 2y \leqq 4$，$2x + y \leqq 4$，$x + y \geqq 1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす，

すべての x，y に対して，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ．　(豊橋技科大 1996）

(m19962703)

0.189 集合 $\{a, b, c\}$ から集合 $\{p, q, r, s\}$ への写像は全部で何個あるか．

(豊橋技科大 1996）　　(m19962704)

0.190 $\sin 2\alpha$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ．

(豊橋技科大 1997）　　(m19972701)

0.191 次の連立方程式を解け． $\begin{cases} 2^{y-x+1}=8 \\ 4^x+60=4^y \end{cases}$ （豊橋技科大 1998） (m19982701)

0.192 $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$ のとき，$\sin A\cos A$ および $\sin^4 A+\cos^4 A$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 1998) (m19982702)

0.193 以下の二つの問に答えよ．

(1) 次の 3 点が一直線上にあるように定数 a の値を定めよ．

$(3-2a,\ 4)$，$(3,\ a)$，$(1,\ 3)$

(2) 原点を通り，上の直線に直交する直線の方程式を求めよ．

(豊橋技科大 1998） (m19982703)

0.194 $a \neq 0$ のとき，以下の不等式の解を求めよ．

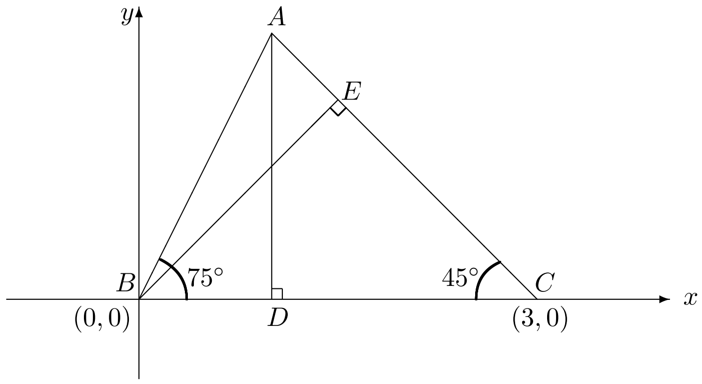
$$a-\frac{2}{a}<1$$

（豊橋技科大 1999） (m19992701)

0.195 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ．

(1) $\sin 75^\circ$ ， $\cos 75^\circ$ を加法定理を用いて求めよ．

(2) 点 C の座標を $(3,0)$ ， 点 A ， B より辺 BC , AC に下ろした垂線を AD ， BE とする．このとき，辺 AE ， EC の長さを求めよ．



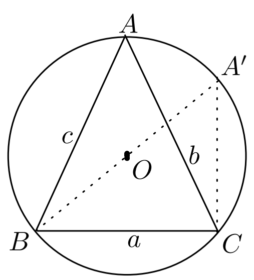
(3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999） (m19992702)

0.196 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a,b,c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A,B,C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA'=2r$ とするとき，$\angle BA'C=\angle BAC$, $2\angle BAC=\angle BOC$ であることを示せ．

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S=\dfrac{r^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.197 はじめ，容器には 10 %の食塩水が 500 g 入れてある．以下の問いに答えよ．

(1) 容器から食塩水を 100 g 取り出して捨て，次に容器に 5 %の食塩水を 100 g 入れて，よく攪拌（かくはん）するという操作を考える．この操作を n 回行ったときの容器中の食塩水の濃度を a_n %とする．a_1 を求めよ．また，a_n と a_{n+1} との間の関係式を求めよ．

(2) a_n を n を用いて表せ．また，(1) で示した操作を無限回行った極限では，容器中の食塩水の濃度はどのようになるか答えよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002702)

0.198 $\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ を部分分数に分解せよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012701)

0.199 2 次方程式 $x^2-ax+9=0$ が，以下のような二つの異なる実数解を持つように a の値の範囲を求めよ．

(1) 共に 1 より大きい実数解となる．

(2) 共に 1 より小さい実数解となる．

(3) 1 より大きい実数解と小さい実数解を一つずつ持つ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012702)

0.200 放物線 $y=x^2+x+2$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動したところ，$y=x^2-3x+5$ になった．a, b の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012703)

0.201 (1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$x+x^{-1}$ の値を求めよ．

(2) $(321)^a=1000, \quad (3210)^b=1000$ のとき，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012704)

0.202 α, β が共に鋭角であり，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012705)

0.203 次の等式を (1),(2) に従って証明せよ．ただし，$a>0$ $(a\neq 1)$, $b>0$ $(b\neq 1)$, $Q>0$ とせよ．

$$\log_a Q=\frac{\log_b Q}{\log_b a}$$

(1) $x=\log_a Q$ のとき，Q を指数関数で表現せよ．

(2) 上で求めた式の両辺に対して，底を b とする対数をとることで，$\log_a Q=(\log_b Q)/(\log_b a)$ になることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032701)

0.204 次の不等式を満たす x の最大の整数を (1)，(2) に従って求めよ．

$$(x^2-3x-6)^2-6(x^2-3x-6)+8\leq 0$$

(1) $t=x^2-3x-6$ として，$t^2-6t+8\leq 0$ を満たす t の範囲を求めよ．

(2) t の範囲を満たす x の最大の整数を求めよ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032702)

0.205 次の連立不等式の解を求めよ. また, 連立不等式を満たす最大の整数を求めよ.

$$\begin{cases} x^2-6x+8 \geq 0 \\ x^2-10x+21<0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004) (m20042701)

0.206 次の有理式を整式と, 分子の次数が分母の次数より小さい分数式との和で表せ.

$$\frac{4x^2-13x+9}{2x-3}$$

(豊橋技科大 2004) (m20042702)

0.207 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 2x^2-6x+1 \leq 0 \\ 2x^2-5x+2>0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004) (m20042703)

0.208 方程式 $\cos^2 x+\sin x+a=0$ について x の範囲を $0 \leq x<2\pi$ とする.

(1) この方程式を満たす実数 a の範囲を求めよ.

(2) 実数 a の値に対する方程式の解の個数を調べよ.

(豊橋技科大 2004) (m20042704)

0.209 $\left(\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}\right)^2$ を計算すると, $A+Bi$ となる. A および B を求めよ. ただし, i は虚数単位, A と B は実数とする.

(豊橋技科大 2005) (m20052701)

0.210 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x^2+2xy-15y^2=0 \\ 2x+xy-15y-30=0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2005) (m20052703)

0.211 合宿で 11 人を 3 つの定員 4 人の部屋に割り振りたい. ここで 11 人中特定の 2 人は必ず別々の部屋になるようにしたい, なお, 11 人は区別できる個人として扱うが, 3 つの部屋は同等に扱い, 区別しない. 部屋割りは何通りあるか. 場合の数を求めよ.

(豊橋技科大 2016) (m20162702)

0.212 次の値を求めよ. ただし, オ. において, 1 以上 100 以下の整数を全体集合とし, $A=\{1,2,3,5,7,13\}$ とする. また, $n(A)$ は集合 A の要素数を表し, $\overline{A}$ は集合 A の補集合を表す.

ア. 3!　　イ. 0!　　ウ. ${}_5P_2$　　エ. ${}_7C_2$　　オ. $n\left(\overline{A \cup \overline{A}}\right)$

(豊橋技科大 2016) (m20162706)

0.213 関数 $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して, その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く. そのとき次の方程式を解け.

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}=\mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019) (m20192901)

0.214 次の式を因数分解せよ．

(1) $pqx^2-(p^2-q^2)x-pq$ (2) $x^3-2x^2-16x+32$

(三重大 2002) (m20023101)

0.215 $a \leq x \leq a+1$ において関数 $f(x)=x^2-10x+8a$ の最小値を $g(a)$ とするとき，$g(a)$ を最小にする a の値と最小値を求めよ．

(三重大 2002) (m20023102)

0.216 2次方程式 $x^2-12x+k=0$ の 1 つの解が他の解の 2 乗になるとき，定数 k の値を定めよ．

(三重大 2002) (m20023103)

0.217 点 $\mathrm{P}(x, x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で 2 点 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(3,9)$ の間にある．このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ．

(三重大 2002) (m20023104)

0.218 a を実数とする放物線 $C: y=x^2+2ax-a^2+5a+4$ が与えられたとき，以下の問いに答えよ．

(1) a が動くとき，放物線 C の頂点の軌跡が描く放物線の式を求めよ．

(2) 放物線 C が他の放物線 $y=-x^2-6x$ と 2 点で交わるときの a の範囲を求めよ．

(三重大 2002) (m20023105)

0.219 次の各不等式を解け．

(1) $\log_{\sqrt{a}}(x-5)<\log_a(x-2)$ ただし，a は 1 でない正の定数とする．

(2) $x^{\log x}>\dfrac{1000}{x^2}$ （対数の底は 10）

(三重大 2004) (m20043101)

0.220 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB=4$，$BC=3$，$CD=2$，$DA=1$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) $\cos A$ の値を求めよ.

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

(三重大 2005) (m20053115)

0.221 平面極座標系 (r,θ) において $r=\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$ （ただし, ε は 0 または正の整数）と表される曲線がある．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x,y) で表せ.

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ.

(a) $\varepsilon=0$ (b) $0<\varepsilon<1$ (c) $\varepsilon=1$ (d) $\varepsilon>1$

(三重大 2006) (m20063102)

0.222 (1) 2 項定理を利用して，$(x-2y)^8$ の x^6y^2 の係数を求めよ．

(2) $x+y+z=18$ を満足する非負の整数の値の組 (x,y,z) の個数を求めよ．

(三重大 2006) (m20063116)

0.223 n が自然数のとき，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成立することを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(三重大 2007) (m20073109)

0.224 以下の方程式および不等式が表す範囲を図示せよ.

(1) $y - x = \sqrt{1 - 2xy}$　　(2) $y - x < \sqrt{1 - 2xy}$

(三重大 2007)　(m20073110)

0.225 x, y 平面上に, 中心を点 (a, b) とし, 半径が r の円 A がある. A の外部にある原点 $O(0, 0)$ から, A に引いた 2 本の接線の接点を P, Q とするとき, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ.

(2) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ.

(三重大 2010)　(m20103115)

0.226 xy 平面上において, $(x, y) = (0, 0)$, $(-2, 0)$ を直径の両端とする円 A, および $(x, y) = (0, 0)$, $(20, 0)$ を直径の両端とする円 B がある. 以下の問に答えよ.

(1) 円 A および円 B の両方に接する直線を全て求めよ.

(2) (1) で求めた直線のうち, y 軸と平行でないもの全てに接する任意の円について, 円の半径 r をその円の中心座標を用いて表せ. 円の中心座標については, 適切な文字変数を与えて用いること.

(三重大 2011)　(m20113105)

0.227 x, y 平面上についての以下の設問に答えよ.

(1) $|x| + |y| = 1$ のグラフを描け.

(2) $|x + y| + |x - y| = 1$ のグラフを描け.

(3) 実数 x, y が (2) の等式を満たすとき, $|x| + |y|$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(三重大 2012)　(m20123114)

0.228 放物線 $y = x^2 + a$ と円 $x^2 + y^2 = 9$ について, 次の問に答えよ.

(1) この放物線と円が接するとき, 定数 a の値を求めよ.

(2) 異なる 4 個の交点を持つような定数 a の値の範囲を求めよ.

(3) 共有点の個数と定数 a の値の関係を説明せよ.

(三重大 2013)　(m20133114)

0.229 次の点 P は, t の値が変化するとどのような曲線, あるいは直線上を動くか, 数式およびグラフで示せ.

(1) 放物線 $y = x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P

(2) 円 $x^2 + y^2 - 2tx + 2(2t - 1)y + 5t^2 - 4t - 8 = 0$ の中心 P

(三重大 2015)　(m20153107)

0.230 三角関数について, 以下の問いに答えよ. ただし, n は自然数である.
この際, オイラーの公式 ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) を用いても良い. ただし, i は虚数単位である.

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(5) $\cos(n\theta)$ は，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ．

(三重大 2018)　　(m20183102)

0.231　次の不等式が表す領域を xy 平面に図示せよ．

$$(-x+y^2-1)(4x^2-8x+y^2)<0$$

(三重大 2020)　　(m20203104)

0.232　Nim という複数個の石を 2 人で交互に取るという簡単なゲームがある．1 回に取る石は，1 〜 3 個で最後に石を取った方が負けである．以下の問いに答えよ．

(1) 残っている石が 2 〜 4 個のとき，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(2) 残っている石が 5 個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(3) 残っている石が 6 〜 8 個の時，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(4) 残っている石が $4n+1$ 個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を数学的帰納法で示せ．また，それ以外の時は次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(京都大 1998)　　(m19983301)

0.233　昭和 25 年は西暦 1950 年であるが，1950 は 25 で割りきれる．昭和元年から 63 年までで西暦が割りきれるのは何か．

(京都大 1999)　　(m19993301)

0.234　正の整数 k, $N\,(1\leq k\leq N)$ が与えられたとき，方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=N \tag{1}$$

の正の整数解

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & m_1 \\ x_2 & = & m_2 \\ & \cdots & \\ x_k & = & m_k \end{array}\right. \tag{2}$$

の総数を求めるために，解 (2) に対して項数が $N-k$ であるような数列

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m_1-1\text{ 個}},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{m_2-1\text{ 個}},\cdots,\underbrace{k,k,\cdots,k}_{m_k-1\text{ 個}}$$

をつくる．ただし，$m_i=1$ であるような i はこの数列の項にはならないとする．以下では，項数 M の数列 $a_1,a_2,\cdots,a_M$ を $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにして，(1)〜(4) に答えよ．なお，数列の項は全て正の整数とする．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が与えられたとき，新たな数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ を

$$\overline{a}_n=a_n+n-1\quad(n=1,2,\cdots,M)$$

と定義する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が正の整数 k に対して

$$1\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_M\leq k$$

を満たすとき，数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ は

$$1\leq\overline{a}_1<\overline{a}_2<\cdots<\overline{a}_M\leq k+M-1 \tag{3}$$

を満たすことを示せ．

(2) 条件 (3) を満たすような数列 $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{M}$ の総数を求めよ.

(3) 2つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{M}$ について,

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

であるとき，かつ，そのときに限り $\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにする．このとき．$\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ であれば $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{M} = \{\bar{b}_n\}_{n=1}^{M}$ であり，また，その逆も成り立つことを示せ.

(4) (1) から (3) の結果を利用して，方程式 (1) の正の整数解の総数を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093302)

0.235 (1) 2 以上 17 以下のすべての素数 n に対して，$n^2 + 2$ の値を求めよ.

(2) 2 以上の自然数 n で，n と $n^2 + 2$ がともに素数になるものをすべて求めよ.

(京都大 2012)　　(m20123301)

0.236 縦 $1(m)$，横 $n(m)$ の床がある．この床に，縦 $1(m)$，横 $k(m)$ のタイル T_k を何枚か使って敷き詰めたい．T_k は何枚でも使ってよいものとする．床が $n(m)$ のときのタイルの敷き詰め方を f_n 通り，また T_1 を使わずに敷き詰めるときの詰め方を g_n 通りとする時，次の問に答えよ．なお，n, k は整数とする.

例：

f_1 は $T_1\times$ 1 の 1 通りだけなので，$f_1 = 1$

f_2 は $T_1\times$ 2 および $T_2\times$ 1 の 2 通りだけなので，$f_2 = 2$

(1) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_2 + f_1$ であることを示せ.

(2) f_n を求めよ.

(3) $g_n - g_{n-1} - g_{n-2} = 0$, $g_2 = 1$, $g_1 = 0$ であることを示せ.

(4) g_n を求めよ.

(大阪大 1995)　　(m19953501)

0.237 $y = ax^2$ と $y = x + k$ $\quad (k > 0$, $a > 0)$ があり，負の交点を A，他方を B とする．原点 O と A と B を通る円がある．O 以外での x 軸と交わる円の交点を C とする．このとき CB は x 軸と垂直である．次の各問に答えよ.

(1) a と k の関係を求めよ.

(2) 円の方程式を a で表せ.

(3) 四角形 $OACB$ の面積は円の内接四角形の最大の面積の何倍か.

(大阪大 1997)　　(m19973501)

0.238 以下の問に答えよ．ただし，$C(m, r)$ は異なる m 個のものから r 個とる組み合わせの数を表す．ただし，$C(m, r)$ の値は，$m \geqq r$ の場合は通常の定義に従うものとし，$m < r$ の場合は $C(m, r) = 0$ と定めることにする.

(1) 次の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．ただし，n は正の整数とする.

$$C(n, 0) + 2C(n, 1) + 3C(n, 2) + \cdots + (n + 1)C(n, n)$$

(2)　2 以上の整数 n に対して条件 [1] を満たす整数を x, y, z とする．

$$0 \leqq x < y < z \leqq n \cdots\cdots\cdots [1]$$

x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次のように定義する．

$$f(x, y, z) = C(x, 1) + C(y, 2) + C(z, 3)$$

条件 [1] を満たす組 (x, y, z) すべての集合を関数 f の定義域とするとき，異なる値 $f(x, y, z)$ の個数 $R(n)$ を考える．すなわち，$R(n)$ は関数 f の値域の要素数である．

$x_1 \neq x_2$ あるいは $y_1 \neq y_2$ あるいは $z_1 \neq z_2$ のいずれかが成り立つとき，

$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$ となる場合は，値 $f(x_1, y_1, z_1)$ を重複して勘定しないことに注意せよ．

(a) 条件 [1] を満たす (x, y, z) の組の個数（すなわち，関数 f の定義域の要素数）を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(b) $n = 6$ の場合，異なる $f(x, y, z)$ の値をすべて列挙せよ．また，$R(6)$ の値も書け．

(c) 一般の n に対して $R(n)$ の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(大阪大 1999）　　(m19993501)

0.239　行列に対する新たな演算子 $\otimes$ を考え，式の集合 $\mathcal{Z}$ を以下のように定義する．

(1)　各行列 A_1, $A_2, \ldots$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(2)　$\mathcal{Z}$ に属する任意の式 F, G に対し，式 $(F \otimes G)$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(3)　$\mathcal{Z}$ は，上の 2 条件に該当する式だけを要素として含む．

このとき，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ に対し，それが $\mathcal{Z}$ の要素となるように「括弧づけ」を行うことを考える．例えば，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ に対しては

$$((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3))$$

の 2 通りの「括弧づけ」が存在する．また，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4$ に対しては

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4), \quad ((A_1 \otimes A_2) \otimes (A_3 \otimes A_4)) \quad ((A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)) \otimes A_4)$$

$$(A_1 \otimes ((A_2 \otimes A_3) \otimes A_4)), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes (A_3 \otimes A_4)))$$

の 5 通りの「括弧づけ」が存在する．以下では，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ (ただし $n \geq 2$) に対する「括弧づけ」の個数を T_n と表す．

(1)　式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4 \otimes A_5$ に対する「括弧づけ」を 5 通り示せ．

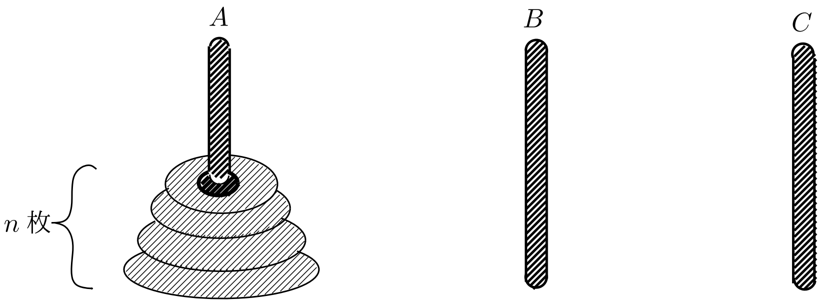
(2)　$T_n \geq 2T_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3)　$T_n \geq 2T_{n-1}$ の結果および数学的帰納法を用いて, $T_n \geq 2^{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(4)　式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ には $\otimes$ が $n-1$ 個現れていることに注意して，$T_n \leq (n-1)!$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013501)

0.240　以下の問題は，ハノイの塔と呼ばれる問題である．以下の設問 (1)-(3) に答えよ．



ハノイの塔の問題

図のように，n枚の円盤を積んだ塔がある．最初，３本の棒A,B,Cのうち，Aに全ての円盤を大きいものから小さいものへ順に積んである．このn枚の円盤全てを,Cの棒に移動したい．ただし，移動は，棒の最上の円盤１枚を別の棒の最上に動かすことしかできない（1回に２枚以上動かせない）．また，大きい円盤を小さい円盤の上に置いてはいけない．さらに，棒以外のところに円盤を置いてはいけない．

例えば n が 2 のとき，$A \to B$, $A \to C$, $B \to C$ と 3 回円盤を動かすことで，全てを移動できる．（$A \to B$ は，A の棒の最上の円盤を B の棒の最上に移動して置くことを意味する.）

(1) n が 3 のとき，全ての円盤を移動する最小の手順を $A \to B$, $\cdots$ のように記述せよ．

(2) 一般に n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの，円盤の総移動回数を $X(n)$ とする．$X(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(3) ハノイの塔の問題に，$A \to C$ および $C \to A$ の移動を禁止する制約を追加する（他の制約は同じ）．この制約下で，n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの円盤の総移動回数を $Y(n)$ とする．$Y(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023501)

0.241　以下の設問に答えよ.

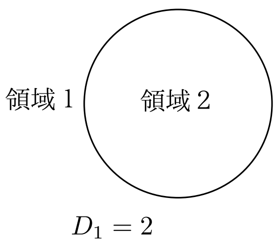
(1) 平面上に半径 $\dfrac{2}{3}$ の円 C および円 C 上に相異なる n 個の点 $P_1, \cdots, P_n$ がある. 各 P_i を中心とした半径 1 の円 C_i が描かれているとする $(1 \leqq i \leqq n)$. このとき, $P_1, \cdots, P_n$ と異なる C 上の点 P_{n+1} を適当にとり, P_{n+1} を中心とした半径 1 の円 C_{n+1} を描くと C_{n+1} は円 $C_1, \cdots, C_n$ と相異なる $2n$ 個の交点をもつようにできることを示せ.

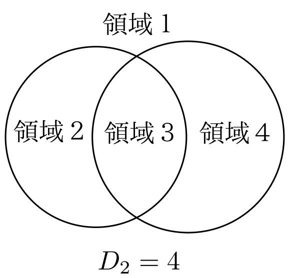
(2) 平面を半径 1 の円でできるだけ多くの領域に分割することを考える. 円が 1 個,2 個のとき, 下の図のように 2 個,4 個の領域に分かれる. n 個の半径 1 の円での平面の最大の分割数を D_n と書くことにする $(n \geqq 1)$.

(a) $n = 3, 4$ のとき, 最大の分割数を与える図を書き, D_3, D_4 を求めよ.

(b) $D_{n+1} = D_n + 2n$ を示せ.

(c) D_n を n の式で示せ.





(大阪大 2004)　　(m20043501)

0.242　$a>0,\ 0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin 2x+2a(\sin x+\cos x)+2$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおいて，y を t の関数として表せ．

(2)　y の最大値および最小値を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043502)

0.243　n を自然数，k を n 以下の自然数とする，n 人の学生が k 個のグループに分かれ，各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す．ただし，各グループは 1 名以上の学生を含むものとする．

(1)　$S(4,2)=11$ であることを，すべての並び方を列挙することで示せ．ただし，学生を A,B,C,D で表し，A で 1 つのグループ，B,C,D でもう 1 つのグループを構成し，B,C,D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A],[B,C,D]\}$ と表すものとする．

なお，$\{[A],[B,C,D]\}$ と $\{[B,C,D],[A]\}$ や $\{[C,D,B],[A]\}$ は同じ並び方を表すが，解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい．

(2)　$S(n,k)=(n-1)S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ．ただし，$S(0,0)=1$，各 $i(i \geq 1)$ に対して $S(i,0)=0$ とし，任意の $i,j\,(i<j)$ に対して $S(i,j)=0$ とする．

(3)　H_n を

$$H_n=\frac{S(n+1,2)}{n!}$$

とする．H_n を，n を用いて表せ．

(4)　設問 (3) の H_n が，任意の自然数 $n(n \geq 1)$ に対して，

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor+1}{2}<H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor+1$$

を満たすことを示せ．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は，x 以下の最大の整数を表すものとする¿

(大阪大 2011)　　(m20113507)

0.244　$\{a_n\}$ は数直線上の点 A_n の座標に対応する数列であり，自然数 n に対して $A_n(a_n)$ は次のように帰納的に定められる．

線分 A_nA_{n+1} を $2:1$ に内分する点を $A_{n+2}(a_{n+2})$ とする．ただし，$a_1=0$，$a_2=1$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4，a_5 の各項が，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{20}{27}$ で与えられることを示せ．

(2)　a_{n+2} を a_{n+1} および a_n を用いて表せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，$n \to \infty$ のときの a_n の値を示せ．

(大阪大 2013)　　(m20133501)

0.245　x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が，

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられることを説明（証明・解説）せよ．

(神戸大 1997)　　(m19973801)

0.246　p を素数とする．任意の自然数 d は，

$$d=p^n m, \quad m \text{ は } p \text{ で割りきれない整数}, n \text{ は負でない整数}$$

と表せる．この n を $\mathrm{ord}_p(d)$ と表すことにする．次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{ord}_p(ab)$ =$\mathrm{ord}_p(a)$+$\mathrm{ord}_p(b)$ を示せ．

(2) $\mathrm{ord}_p(\mathrm{lcm}(a,b)) = \max(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．ここで，$\mathrm{lcm}(a,b)$ は a,b の最小公倍数，また $\max(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の大きい方を表す．

(3) $\mathrm{ord}_p(a+b) \geq \min(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．また $\mathrm{ord}_p(a) \neq \mathrm{ord}_p(b)$ のとき，等号が成立することを示せ．ここで，$\min(\mathrm{ord}_p(a),\mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の小さい方を表す．

（神戸大 2001） (m20013801)

0.247 a,b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ ,\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

で数列 a_n , b_n を定める.

(1) $a_n \geq b_n$ を示せ（相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ）.

(2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053805)

0.248 ある集合 X の部分集合 A,B,C について，次のことを証明せよ．対称差 $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B\triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ がともに有限集合であるならば，$A\triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ も有限集合である．（ただし，$A \setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.）

(神戸大 2012) (m20123807)

0.249 次の連立方程式を解け. $\begin{cases} 3x^2+4x-4<0 \\ x^2+4x-1>0 \end{cases}$

(山口大 2000) (m20004301)

0.250 次の 2 次方程式が 2 重解をもつように m の値を定め，そのときの解を求めよ．

$$x^2+(m-2)x+m-2=0$$

(山口大 2001) (m20014301)

0.251 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ を $r\sin(x+\alpha)$, $r>0$ の形に表せ.

(山口大 2001) (m20014302)

0.252 次の連立方程式を解きなさい. $x^2+xy=15$, $y^2+xy=12$

(山口大 2001) (m20014303)

0.253 次の方程式を解きなさい. $\cos 3\theta + \cos\theta = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

(山口大 2001) (m20014304)

0.254 次の式を因数分解せよ. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$

(山口大 2001) (m20014305)

0.255 次の式を $r\sin(x+\alpha)$, $-\pi < \alpha \leqq \pi$ の形に表せ. $\sin x - \sqrt{3}\cos x$

(山口大 2001) (m20014306)

0.256 θ の範囲が $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，θ の関数 $y = 2\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1$

の最大値と最小値を求めなさい．また，そのときの θ の値を求めなさい．

(山口大 2003) (m20034301)

0.257 x についての 2 次方程式 $x^2-4ax+5a^2=20$ の解が，異なる 2 つの正の解を持つように定数 a の値に範囲を求めなさい．

(山口大 2003)　(m20034302)

0.258 x の 2 次方程式 $ax^2-2ax-a^2-1=0$（a は実数）の 2 つの解が実数を持つとき，解の存在する a の範囲を求めなさい．

(山口大 2003)　(m20034303)

0.259 ド・モアブルの法則 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい．

(山口大 2003)　(m20034304)

0.260 四角形 $ABCD$ は，円に内接し，$AB=6,\ BC=CD=3,\ \angle D=60^\circ$ である．この四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい．

(山口大 2017)　(m20174303)

0.261 4 桁の自然数のうち次の条件にあてはまるものの個数を求めなさい．

(1) 9852, 7421 のように千の位の数，百の位の数，十の位の数，一の位の数が順に小さくなるもの．

(2) 0 を含むもの．

(山口大 2018)　(m20184303)

0.262 平面上の異なる 2 つの定点 A,B に至る距離の比が $m:n\ (m,n>0)$ である点の軌跡（そのような点全体のなす図形）を求めよ．

(九州大 2005)　(m20054705)

0.263 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおくとき，S_n と a_{n+2} の間に成り立つ関係式を推定せよ．

(2) 上の問で推定した関係式を数学的帰納法によって証明せよ．

(九州芸術工科大 1999)　(m19994801)

0.264 一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える．

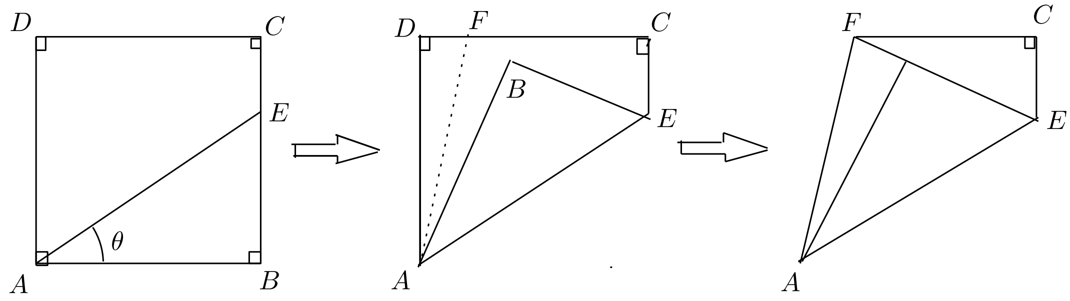


fig.1　fig.2　fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ．

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか．

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ．

(長崎大 2005)　(m20055002)

0.265 関数 $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 19x + 10$ において，$f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075012)

0.266 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ の逆関数を求めよ．

(長崎大 2010)　　(m20105001)

0.267 いま，2 次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \leqq \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) 2 点間の関係 L について，下記の①～③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，2 次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．
このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．
[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①～③のいずれかを入れよ．

　関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．
　さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
　ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
　また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．
　以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　　(m20025101)

0.268 図 1 のような底面の半径が r，母線の長さが l の直円すいがある．以下の設問に答えよ．

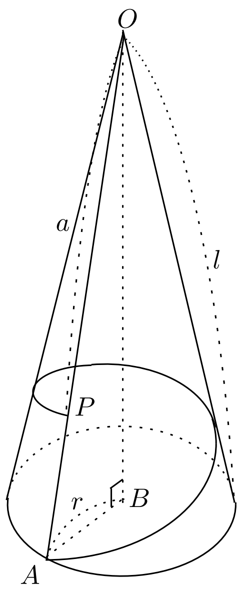


図 1 直円すい

(1) 母線 OA 上に $OP = a$ となる点 P からこの直円すいの側面を一巻きして，点 A にいたる最短の長さ b を求めなさい．ただし，$l > 2r$ であるとする．

(2) この直円すいが $r=5,\ l=30$ の寸法をもつとする．$a=20$ のときの b の値を計算しなさい．

(3) (2) の直円すいにおいて，$a=30$ のときの曲線 AP の概略図を描きなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095201)

0.269 (1) 次の命題を数学的帰納法により証明しなさい．
「任意の自然数 n に対して, n^3+2n は 3 で割り切れる」

(2) 次の命題を背理法により証明しなさい．
「自然数 n が, 2 または 3 で割り切れないならば, 6 でも割り切れない」

(熊本大 2010)　　(m20105201)

0.270 以下の証明問題に答えなさい．

(1) 自然数 n に関する不等式 $2^n > 2n-1$ について，数学的帰納法により証明しなさい．

(2) $\log_{10} 2$ が無理数であることを，背理法により証明しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135201)

0.271 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $1-i$ と $(1-i)^2$ を複素数平面上に図示せよ．

(2) $(1-i)^5$ を計算し，$x+yi$ の形（$x,\ y$ は実数）で表せ．

(宮崎大 2015)　　(m20155301)

0.272 以下は数え上げの問題である．(1) から (5) の各問いに答えよ．ただし，同じ数字を繰り返し使用してはいけないものとする．

(1) 5 つの数字 $1,2,3,4,5$ から作ることができる 3 桁の数はいくつあるか．

(2) (1) のうち 500 よりも小さい数はいくつあるか．

(3) (1) のうち偶数はいくつあるか．

(4) (1) のうち奇数はいくつあるか．

(5) (1) のうち 5 の倍数はいくつあるか．

(宮崎大 2020)　　(m20205306)

0.273 全体集合 U を $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ とし，部分集合 A,B,C を $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,f,h\}$，$C=\{c,d,e,f\}$ とする．この時以下の (1) から (5) の各問いに答えよ．

(1) A の捕集合

(2) 積集合 $A\cap C$ の補集合

(3) 和集合 $A\cup B$ の補集合

(4) 差集合 $B-C$

(5) 集合 U,A,B,C の関係を各要素も書き入れてベン図で示せ．

(宮崎大 2020)　　(m20205307)

0.274 命題 p を“ バナナは安い ”，命題 q を“ バナナは美味しい ”とする，この時，以下の (1) から (5) の各命題を命題 p,q を用いて示せ．ただし，“ かつ ”は記号“ $\wedge$ ”を，“ または ”は記号“ $\vee$ ”を，命題“ p ”の否定は記号“ $\neg p$ ”を，命題“ q ”の否定は記号“ $\neg q$ ”を用いよ．

(1) バナナは安く，かつ美味しい．

(2) バナナは安いが，美味しくない．

(3) “ バナナは高いか，または美味しい ”ということはない．

(4) バナナは安くもなく美味しくもない．

(5) バナナは安いか，またはバナナは高くて美味しい．

(宮崎大 2020)　　(m20205308)

0.275 n 個の中から r 個を取り出す組合せを ${}_n\mathrm{C}_r$ とする時，以下を証明せよ．

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r $$

(宮崎大 2020)　　(m20205309)

0.276 (1) 10 進数の 147 を 2 進数，16 進数で表しなさい．

(2) 2 進数の 111100010100 を 16 進数で表しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225306)

0.277 次のように定まるフィボナッチ数列 $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots$ について，設問に答えなさい．

$$ f_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases} $$

(1) $f_2,\ f_3,\ f_4$ の値を答えなさい．

(2) $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots$ は

$$ f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1 \qquad n \in N \equiv \{0, 1, 2, \cdots\} $$

を満たすことを証明しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225307)

0.278 (1) $\{1, 2, \cdots, 100\}$ から異なる 2 つの数字を選ぶとき，その和が偶数となる組合せの総数は何通りあるか答えなさい．

(2) $\{1, 2, \cdots, 100\}$ から異なる 2 つの数字を選ぶとき，その和が偶数となる組合せと奇数になる組合せはどちらがどれだけ多いか答えなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225308)

0.279 任意の命題 α に対して，命題論理式

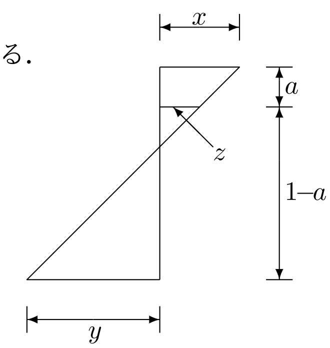
$$ \alpha \to (\beta \to \alpha) $$

は，トートロジー (恒真式) であることを証明しなさい．

(宮崎大 2022)　　(m20225309)

0.280 右の図形の長さ z を x, y, a を用いて求めよ．

ただし，z の位置は上部の三角形にあるものとする．



（鹿児島大 2001）　　(m20015401)

0.281 関数 $y = 2^x$ の逆関数を求め，そのグラフを描きなさい．

(鹿児島大 2011)　(m20115405)

0.282 xy 平面上に点 $A(1,5)$，点 $B(4,3)$，点 $C(5,8)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 B から線分 AC へ垂線を下ろしたとき，その足である点 P の座標を求めなさい．

(2) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 Q の座標を求めなさい．

(鹿児島大 2011)　(m20115412)

0.283 以下の (a)，(b)，(c) を値が大きいものから順に答えよ．

(a) $\log_2 3$,　(b) $\log_3 2$,　(c) $\log_4 4$

(鹿児島大 2014)　(m20145402)

0.284 太陽光はあるガラスの板を 1 枚透過すると，その強さの 20%が失われる．太陽光の強さを元の 10%以上に保ちたい．このガラスを何枚まで重ねても良いか．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 重ねても良いガラスを何枚を求める式を答えよ．

(2) (1) の式の計算方法を説明し，その結果を答えよ．ただし，必要であれば $\log_{10} 0.8 = -0.1$ を用いよ．

(鹿児島大 2015)　(m20155412)

0.285 三角形の加法定理を用いて，

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta - a)$$

の式における a を決定したい．どのように決定するか解法の過程を説明せよ．また a の値を答えよ．

(鹿児島大 2016)　(m20165411)

0.286 対数についての以下の問いに答えよ．ただし，a, b, c, M は 1 でない正の数が入るものとする．

(1) 底とは $\log_a M = b$ の式のどの記号であるか．

(2) 底の変換公式とは次の (ア) から (エ) のうちのどれか．

（ア） $\log_a M = \dfrac{\log_a b}{\log_M b}$　（イ） $\log_a M = \dfrac{\log_M b}{\log_a b}$

（ウ） $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_a b}$　（エ） $\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c a}$

(鹿児島大 2016)　(m20165412)

0.287 $\log M$ は $\log_{10} M$ の 2.303 倍で近似される（≒で結ばれる）．近似ではなく完全に等号（＝）で結ぶには対数表記で何倍すればよいか．ただし，$\log M = \log_e M$ である．

(鹿児島大 2016)　(m20165413)

0.288 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ．

(鹿児島大 2021)　(m20215417)

0.289 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ を求めたい．解法の指針を最初に述べた後に解答せよ．

(鹿児島大 2022)　(m20225411)

0.290 (1) $\cos^2\theta\sin(2\theta) - \cos\theta\sin(3\theta) = A\sin(4\theta)$ と表したとき，係数 A を求めよ．

(2) $\cos^5\theta = B\cos\theta + C\cos(3\theta) + D\cos(5\theta)$ と表したとき，係数 B，C，D を求めよ．

(室蘭工業大 2007)　(m20075511)

0.291 $x^2-2x+2y^2-3=0$ を xy 平面へ図示せよ.

(室蘭工業大 2015) (m20155505)

0.292 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する以下の点の対称移動をそれぞれ求めよ.

(1) $(1,\ \sqrt{3})$ (2) $(0,\ 1)$

(香川大 2016) (m20165703)

0.293 非負の整数 x , y に対して関数 f を次のように定義する.

$$\begin{cases} f(0,y)=y+1 \\ f(x+1,0)=f(x,1) \\ f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y)) \end{cases}$$

(1) $f(1,3)$ の値を計算せよ. ただし, その計算過程も示せ.

(2) $f(0,y)=y+1$ の例のように, y に関する多項式として $f(1,y)$ を表現せよ. そして, その正しさを帰納法により示せ.

(3) $f(x,y)\geq x+y+1$ であることを示せ.

(島根大 2005) (m20055802)

0.294 コンピュータやネットワークの技術の発展により，我々の生活はより便利で快適なものになってきた. その一方で，それらに関連する事件（例えば，ファイル共有アプリケーションによる機密情報の流出，出会い系サイトがらみのトラブル等）も多数発生している．以下の問いに答えよ.

(1) コンピュータやネットワークの技術に関連する事件としてどのようなものがあるか，2 つ挙げ，それぞれ 100 文字程度で説明せよ．ただし，上記の文中で例として挙げたものは除く.

(2) 小問 (1) で挙げた事件に巻き込まれないためには，どのような対策が必要か，それぞれ 100 文字程度で説明せよ.

(島根大 2008) (m20085805)

0.295 (1) 次の 2 進数を 10 進数へ変換せよ.

1101.1011

(2) 次の 10 進数を 2 進数へ変換せよ.

0.9

(3) 次の 8 ビットの 2 進数の 2 の補数を求めよ. ただし, 2 の補数は 8 ビットの 2 進数で表現せよ.

01011110

(4) 2 つの 10 進数 $x=11,\ y=13$ を 5 ビットの 2 進数へ変換し, 次の演算をせよ. ただし, 演算結果は 5 ビットの 2 進数で表現せよ.

$(a)\ x+y$ $(b)\ x-y$

(島根大 2010) (m20105811)

0.296 n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007) (m20076106)

0.297 直線 $y=ax-3$ と円 $x^2+y^2+2y=0$ がある．この直線と円が交わったり，接したりしないときの a の値を求めよ.

(宇都宮大 2007) (m20076107)

0.298 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$ を解け.

(宇都宮大 2007)　　(m20076108)

0.299 n を自然数とするとき，$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ.

(宇都宮大 2007)　　(m20076112)

0.300 直線 $ax - y + 1 = 0$ が曲線 $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$ とまったく交わらずに済むような，実数 a の範囲を示しなさい.

(宇都宮大 2014)　　(m20146101)

0.301 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ.

(1) 半径 1 の円の内接正 12 角形の周長を求めよ.

(2) 半径 1 の円の外接正 12 角形の周長を求めよ.

(3) 上記の結果を用いて，円周率 π が 3.05 より大きく 3.25 より小さいことを証明せよ.

(宇都宮大 2022)　　(m20226103)

0.302 $\log_{16} 2 + \log_8 4 + \log_2 a = 1$ のとき，実数 a を求めよ.

(工学院大 2003)　　(m20036201)

0.303 複素数 $4 - 3i$ の絶対値を求めよ.

(工学院大 2004)　　(m20046208)

0.304 $A = 3 + 3i,\ B = 2 - 2i$ (i は虚数単位) のとき $\dfrac{A}{B}$ を計算せよ．ただし，答えは分母を有理化した値を記すこと.

(工学院大 2005)　　(m20056208)

0.305 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対する正接関数 $\tan y$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ とする．すなわち，

$$y = \mathrm{Tan}^{-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tan y \qquad \left(x \in (-\infty,\ \infty),\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Tan}^{-1}1$ の値を求めよ.

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$ の値を求めよ.
ただし，必要であれば，次の正接関数に対する加法定理は既知として用いてよい.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(はこだて未来大 2009)　　(m20096303)

0.306 (1) 3 方程式 $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ を満たすすべての解を求めよ.

(2) 10 進数表記したとき 13 となる数を 2 進数で表記せよ.

(3) 72 の約数の個数は全部でいくつあるか.

(4) 複素数 $\dfrac{1}{2+2i} + \dfrac{1}{1-3i}$ の実部と虚部を答えよ．（i : 虚数単位）

(5) a を正の実数とするとき, $\dfrac{a^2+4}{a}$ の最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106901)

0.307 x, y は正の値をとる実数の変数とし, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たしているとする.

(1) $x = 1$ のとき, $\log_2(2x^2y) = 2$ を満たす実数 y の値を求めよ.

(2) $\log_2 y = -2\log_2 x + 1$ となることを示せ.

(3) $z = (\log_2 y)^2 + 12\log_2 x - 3$, $X = \log_2 x$ とするとき, $z = 4X^2 + 8X - 2$ となることを示せ. また, z の最小値とそのときの x, y の値を求めよ.

(東京工科大 2010) (m20106906)

0.308 整数 $m, n \geqq 0$ に対する次の再帰関数について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & ,m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき} \\ 2 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 1 \text{ のとき} \\ A(m-1, A(m, n-1)) & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n \geqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) $A(1, 2)$ を答えなさい.

(2) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m, 1)$ を答えなさい.

(3) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(1, n) = 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.

(4) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m, 2)$ を答えなさい.

(岩手県立大 2010) (m20107001)

0.309 次の関係式を用いながら, あとの問いに答えなさい.

$$_n\mathrm{C}_m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!} \quad ①$$

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, b^n \quad ②$$

なお, 以下では集合 X の要素数を $|X|$ と表す.

(1) 次式が成り立つことを示しなさい.

$$_{n+1}\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{k-1} + {}_n\mathrm{C}_k$$

(2) 次式が成り立つことを示しなさい.

$$_n\mathrm{C}_0\, 2^n + {}_n\mathrm{C}_1\, 2^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\, 2^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 3^n$$

(3) 要素数が $q(q > 0)$ である有限集合 A の部分集合のうち, 要素数が $r(r \leq q)$ である集合全体を次式の $P_r(A)$ と表す.

$$P_r(A) = \left\{ B \,\middle|\, B \subseteq A, \text{ かつ, } |B| = r \right\}$$

このとき, $|P_r(A)|$ を q と r を用いて表しなさい.

(4) 要素数が $n(n > 0)$ である有限集合 A の部分集合全体を $P(A)$ としたとき, $|P(A)|$ を, 途中の式を省略せずに n を用いて表しなさい.

(岩手県立大 2013) (m20137001)

0.310 (1) i は虚数単位とする. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ の実部と虚部を求めよ.

(2) $0 < x < 1$ のとき, 方程式 $\log_3 x - 3\log_x 9 + 1 = 0$ を解け.

(3) 不等式 $\sin 2\theta > \sin\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

(富山県立大 2017) (m20177101)

0.311 条件 $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ.

(3) 正の整数 n に対して，不等式 $a_n < a_{n+1} < 1$ が成り立つことを証明せよ.

(富山県立大 2017)　　(m20177102)