[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：3 積分

0.1 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+6}{x^2-4}dx$　(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大 2017)　(m20170102)

0.2 $\displaystyle I_n = \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$　（n は 0 または自然数，a は正の定数）とする.
以下の問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle I_0 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい.

(2) $\displaystyle I_n = \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい.

(北海道大 2017)　(m20170110)

0.3 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

（北見工業大 2004）　(m20040202)

0.4 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$

(北見工業大 2005)　(m20050204)

0.5 (1) $\displaystyle\int x \log x dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を，$x = \sin\theta$ という置換積分によって求めよ.

(北見工業大 2005)　(m20050208)

0.6 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　（ヒント：$t = \sin x$ という置換積分）

(北見工業大 2006)　(m20060204)

0.7 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2 dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(北見工業大 2007)　(m20070203)

0.8 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$　($t = x^2+2x+2$ と置け)

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\, dx$

(北見工業大 2008)　(m20080202)

0.9 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x \, dx$ を計算せよ.　ヒント ： $t = \cos x$ とおくとよい.

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ の値を求めよ．

(北見工業大 2009)　　(m20090202)

0.10　次の積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin x\,dx$

(北見工業大 2010)　　(m20100203)

0.11　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^3\,dx$

(北見工業大 2011)　　(m20110203)

0.12　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)}dx$ を求めよ．

(北見工業大 2012)　　(m20120203)

0.13　定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ を求めよ．

(北見工業大 2012)　　(m20120204)

0.14　次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

(2)　$\displaystyle\int x\log x\,dx$

(北見工業大 2013)　　(m20130204)

0.15　(1)　直線 $y=x+1$ と曲線 $y=x^2-1$ の交点の座標を求めよ．

(2)　(1) の直線と曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(北見工業大 2013)　　(m20130205)

0.16　次の積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int (3x-1)^5 dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x\,dx$

(北見工業大 2014)　　(m20140202)

0.17　次の積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \tan x dx \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\text{である．}\right)$　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

(北見工業大 2015)　　(m20150204)

0.18　次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2x^3 e^{-x^2} dx$

(北見工業大 2016)　　(m20160203)

0.19　積分 $\displaystyle I=\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ を計算せよ．

(北見工業大 2017)　　(m20170203)

0.20　次の積分の値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\;dx$　　(2)　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x}\;dx$

(北見工業大 2018)　　(m20180201)

0.21 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+4} dx$

(北見工業大 2019) (m20190201)

0.22 積分 $I = \displaystyle\int_1^e x \log x \, dx$ を計算せよ．

(北見工業大 2019) (m20190208)

0.23 積分 $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{2x} dx$ を計算せよ．

(北見工業大 2022) (m20220202)

0.24 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int (x+1) \log x \ dx$ (3) $\displaystyle\int e^{-3x} dx$

(岩手大 1994) (m19940306)

0.25 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \exp[-(x-t)^2] dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \, a_n}} \exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ． $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$

(岩手大 1994) (m19940307)

0.26 任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

(a) $f_0(x) = x^2$

(b) $f_n(x) \, e^{-x} = \displaystyle\int_x^{\infty} f_{n-1}(t) \, e^{-t} dt$

次の問に答えよ．

(1) 次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t} dt \ , \quad J = \int_x^{\infty} t \, e^{-t} dt \ , \quad K = \int_x^{\infty} t^2 \, e^{-t} dt$$

(2) 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (\, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3) 前問の2つの数列の一般項 $a_n, b_n(\, n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960301)

0.27 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2) x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3) $f(5)$ を求めよ．

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997)　　(m19970302)

0.28 範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x) = \sin x + x \int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 I_1 , I_2 , I_3 , J_1 , J_2 , J_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \,, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \,, \qquad I_3 = \int_0^{\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \cos t \, dt \,, \qquad J_2 = \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, dt \,, \qquad J_3 = \int_0^{\pi} t \cos t \, dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる2つの定積分を，次のように A , B とおく．

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt = A \,, \qquad \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt = B$$

A , B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980306)

0.29 次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004）　　(m20040302)

0.30 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010) (m20100305)

0.31 2 つの曲線 $y = \cos 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$, $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について, 次の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を図示し, また図形 S を斜線で図示しなさい.

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい.

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(岩手大 2016) (m20160304)

0.32 関数 $f(x) = x^2 e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ の増減と極値を調べ, そのグラフをかきなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい,

(岩手大 2017) (m20170303)

0.33 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し, 概形を図示しなさい. また, (1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2019) (m20190303)

0.34 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について, 次の問に答えなさい.

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい.

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し, この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい. また, 極値と変曲点の座標も示しなさい.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2020) (m20200303)

0.35 関数 $f(x) = 4x^4 \log_e x$ について, 次の問いに答えなさい. ただし, $x > 0$ とする.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の $\lim_{x \to +0} f(x)$ および $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい.

(4) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210303)

0.36　e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい.

(1) 次の関数 $g(x)$ を考える．ただし，a, b を定数とし，$a > 0$, $b < 0$ とする.

$$g(x) = ae^{bx}$$

広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = 1$ が成り立つとき，$a = -b$ を示しなさい.

(2) $a = 2$, $b = -2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xg(x)dx$ の値を求めなさい.

(岩手大 2022)　　(m20220304)

0.37　次の積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}$　$(a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx$

(秋田大 2001)　　(m20010403)

0.38　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$　(ただし，n は 2 以上の自然数)

(秋田大 2001)　　(m20010404)

0.39　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．注意：log は自然対数で，π は円周率である.

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4(3+3x-x^2)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \log\frac{3}{\boxed{\text{(t)}}} + \boxed{\text{(u)}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx = \boxed{\text{(v)}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}x^4 dx = \boxed{\text{(w)}}$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-4x}\sin x dx = \frac{1}{\boxed{\text{(x)}}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{(y)}}}$

(秋田大 2002)　　(m20020403)

0.40　積分 $S = \displaystyle\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr$ を計算せよ. ただし,R は正の定数である. 必要ならば変換 $r^2 = u$ を用いよ.

(秋田大 2005)　　(m20050405)

0.41　次の積分を計算せよ.　$\displaystyle\int (\cos x)^r \sin x\, dx,$　　r は実数

(秋田大 2006)　　(m20060405)

0.42　次の定積分を求め，$\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{1}{\boxed{}}\left(\frac{\pi}{2} + \boxed{}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos x dx = \frac{\boxed{}}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{\boxed{}}{3}$　　(4) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{\boxed{}}{15}$

(5) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{x}\log x dx = \frac{2}{\square}\left(e^{\frac{3}{2}} + \square\right)$ (6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 + \frac{\square}{e}$ (7) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2e^{-x}dx = \frac{\square}{e}$

(秋田大 2007) (m20070404)

0.43 次の $\square$ 内に当てはまる整数を入れよ．

曲線 $y = \dfrac{2}{3}(1 + x\sqrt{x}\,)$ の区間 $0 \leqq\ x \leqq\ 3$ における，この曲線の弧の長さは $\dfrac{\square}{3}$ である．

注意：log は自然対数で，e は自然対数の底とする．π は円周率とする．

(秋田大 2007) (m20070405)

0.44 次の積分を計算せよ．ただし，(2) では，$\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ となることを使ってよい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int \log\frac{x-1}{(x+1)^2}dx$

(秋田大 2008) (m20080404)

0.45 n を整数とし，$I_n = \displaystyle\int x^n e^x dx$ とおく．

(1) n が正の整数のとき，I_n を I_{n-1} を用いて表せ． (2) I_3 を求めよ．

(秋田大 2008) (m20080405)

0.46 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を求めよ．

(秋田大 2009) (m20090402)

0.47 （広義の）定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ を求めよ．

(秋田大 2009) (m20090403)

0.48 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ．

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{(\text{コ})}\,\pi$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{\boxed{(\text{サ})}}\,\pi$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{arcsin}\,x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{(\text{シ})}}$

(秋田大 2010) (m20100403)

0.49 $x = \tan t$ と置き換えて，次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(秋田大 2011) (m20110403)

0.50 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \log\left(x^2+1\right)dx$$

(秋田大 2013) (m20130403)

0.51 2 つの曲線 $y = 4x - x^2$ と $y = x - 4$ がある．このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい．

(1)　上記の 2 直線で囲まれた図形を図示しなさい.

(2)　(1) の図形の面積を求めなさい.

(秋田大 2014)　　(m20140401)

0.52　曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ がある．このとき，以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1)　上記の曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形を図示しなさい.

(2)　上記の曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(秋田大 2015)　　(m20150401)

0.53　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(x-a)|dx$　(a は $0 < a < \pi$の定数)　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(秋田大 2016)　　(m20160402)

0.54　次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$　（但し，$a > 0$ とする．）

(2) $\displaystyle\int_1^{e} \log_e x\ dx$　（e は自然数の底である．）

(秋田大 2017)　　(m20170403)

0.55　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(秋田大 2019)　　(m20190401)

0.56　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+x}}dx$　ただし，$t = \sqrt{x^2+x} - x$ と置換して求めよ.

(秋田大 2020)　　(m20200401)

0.57　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

(2) $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$ について次に答えよ.

(a) $x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくとき $\dfrac{dx}{d\theta}$ を求めよ.

(b) (a) を用いて θ で置換積分をして，I を求めよ.

(秋田大 2021)　　(m20210401)

0.58　次の積分 (1)，(2) を求めなさい．ここで，$|y|$ は y の絶対値を表す.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos(x)\ \mathrm{dx}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 |\ 1 - x^2\ |\ dx$

(秋田大 2022)　　(m20220401)

0.59　関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を　$f_1(x) = \dfrac{1}{10}e^{2x}$,　$f_2(x) = x^2\log(x+1)$　と定義する.

(1) 定積分 $S_1 = \displaystyle\int_0^a f_1(x)dx$, $S_2 = \displaystyle\int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a+b=1$ という関係があるとき，$S = S_1 + S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a+b=1,\quad 0<a<1,\quad 0<b<1$$

を満たすと仮定する．$S = S_1 + S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001)　　(m20010502)

0.60 実数 y の関数:

$$f(y) = \frac{1}{1+e^{-\beta y}}\ ,\qquad (-\infty < y < \infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$,　b) $\beta = 0$,　c) その他の場合.

の各々について, $x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \leq x \leq 1$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$， α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004）　　(m20040501)

0.61 x を実数とし，関数 $f(x)$ を　$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$　と定義する.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け.

(4) 関数 $g(x)$ を　$g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$　により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ.

(東北大 2008)　　(m20080501)

0.62 t, x, y を実数，A を実数の定数とし，以下の問いに答えよ.

(1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2+A}$ を用い，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$. 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090503)

0.63 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m = 0, 1, 2, 3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.64 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき,

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概略を描け.

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.65 点 $P(0, -1)$ を通る直線と曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ が 2 点 Q, R で交わるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 点 Q の x 座標を a として, $0 < a < 2$ とする.

(1) 点 Q, R それぞれにおける曲線 C の接線 ℓ_Q , ℓ_R の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接線 ℓ_Q , ℓ_R の交点の軌跡を求めよ.

(3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき, y 軸, 曲線 C, 接線 ℓ_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し, この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ.

(東北大 2012)　　(m20120503)

0.66 z を正の実数とする. 実変数の関数 $f(x)$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz}f(x)dx$ が存在するとき, これを $I[f](z)$ と書くことにする.

(1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば, $I[f](z)$ が存在することを示せ.

(2) a を実数とする. $I[\sin ax](z)$, $I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120509)

0.67 x を正の実数とし，関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する．

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減表を書き，関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $y = f(x)$, $y = 0$, $x = b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ．ただし，b は $b > 1$ を満たす実数とする．

(東北大 2013)　　(m20130501)

0.68 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.69 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．

$$f(x) = \frac{-ax^2 - (a-1)}{x^2 + 1} \qquad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ．ただし，$y = f(x)$ は x 軸と 2 つの交点 A および B をもつものとする．

(1) $y = f(x)$ が x 軸と 2 つの交点をもつ a の条件を示し，交点 A, B の x 座標 x_A，x_B (ただし $x_A > x_B$) 求めよ．

(2) $y = f(x)$ の増減表を示し，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 交点 A, B における接線の方程式を求め，その接線 2 本の交点の座標を求めよ．

(4) $y = f(x)$ と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_1 と，(3) で求めた 2 本の接線と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_2 を求め，S_1 と S_2 の大小関係を示せ．

(東北大 2014)　　(m20140501)

0.70 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．
ただし，a は正の実数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ．

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.71 xy 平面上の点 P の座標 (x,y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.72 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$ を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190509)

0.73 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.74 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^\alpha (\log x)^n \, dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ．

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220511)

0.75 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2-i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ．　　(お茶の水女子大 1997)　　(m19970602)

0.76 $\displaystyle\int e^x \cos x dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970603)

0.77 (1) $y^4 = x^4(1-x^2)$ は x-y 平面で閉じた曲線になる．この曲線のおおよその形を描け．

(2) この曲線に囲まれた領域の面積を計算するには積分 $\displaystyle 4\int_0^1 f(x)dx$ が必要である．
関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 上の積分を実行せよ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990604)

0.78 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int \sin 3x dx$　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$　(3) $\displaystyle\int \log x dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$　(5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$

（お茶の水女子大 1999）　(m19990605)

0.79 次の各問に答えよ．

(1) $\tan x\left(\dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x(-\infty<x<\infty)$ で表す．$\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999）　(m19990606)

0.80 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000604)

0.81 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s>0$ とする．

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ．

$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000605)

0.82 半径 a の円が x 軸に接しながら滑らずに回転してゆくとき，円周上の一点の軌跡をサイクロイドと呼ぶ．

(1) 点の初期位置を原点として，この軌跡の方程式を回転の中心角に関するパラメータ表示で与えよ．ただし，円は常に x 軸の上側にあるものとする．

(2) この点が再び x 軸に戻るまでの一周期分の曲線の弧長を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010601)

0.83 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t),g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)}f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$\displaystyle\int_{t^2}^{t^3}x\log x dx$　（log は自然対数関数を表す.）

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x \log x dx \qquad （\log \text{ は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.}）$$

(3) 次の関数の導関数を f, g_1, g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010602)

0.84 関数 f は実数の閉区間 $[a, b]$ で連続とし，

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt$$

とおくとき，

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

という式が成立することを，どういう事実を使ったか明確に説明しながら示せ．特に，

(1) $f(x) = c$（定数） (2) $f(x) = e^x$

であるとき，$f_n(x)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001） (m20010603)

0.85 変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ． $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{2}(1+t^2)$

(3) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010604)

0.86 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t dt$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x} dx$

(お茶の水女子大 2003) (m20030604)

0.87 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x dx$ (ただし, $\log x$ は自然対数とする.) (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2007) (m20070602)

0.88 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int x e^{x^2} \sin x^2 \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-2x+2} dx$

(お茶の水女子大 2009) (m20090604)

0.89 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$

(お茶の水女子大 2010) (m20100602)

0.90 平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100603)

0.91 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(お茶の水女子大 2010) (m20100610)

0.92 次式で決まる曲線で囲まれる面積について考察せよ. 以下の (1) から (3) の手順に従ってもよいし, または別の手順で解答してもよい. ただし, x と y は実数とする.

$$y^2 - x^2(x+a) = 0$$

(1) $a=1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(2) $a=-1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(3) $a=1$ のときの曲線によって囲まれた領域の面積を求める. 積分の計算においては $t=\sqrt{x+a}$ とおいて置換積分を行ってよい.

(お茶の水女子大 2011) (m20110603)

0.93 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110605)

0.94 極座標表示で表された曲線 : $r=1+\cos\theta\ \ (0\leq\theta\leq 2\pi)$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 曲線の長さを求めよ.

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110606)

0.95 以下の各問いに答えよ.

(1) 次の実数値関数の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が, 異なる 2 点 a, b を含む区間で連続であれば

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

となるような点 ξ が 2 点 a, b の間に必ず存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2012) (m20120601)

0.96 $t > 0$ に対して,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$

とする. このとき以下の各問に答えよ.

(1) 右辺の広義積分は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ.

(3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2012) (m20120605)

0.97 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx$ ただし, arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする.

(お茶の水女子大 2013) (m20130601)

0.98 $n \geq 0$ なる整数 n に対して,

$$I_n = \int_{-1}^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} \, dx$$

とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 と I_1 を求めよ.

(2) I_{n+1} と I_n の関係を求めよ.

(3) I_n を求めよ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130608)

0.99 (1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a) := \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく. 極限 $I_n = \lim_{a \to \infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ, I_n を求めよ.

(2) 整数 k, n は $0 \leq k < n$ を満たすものとし, $a_0, \cdots, a_k$ は負の実数, $a_{k+1}, \cdots, a_n$ を正に実数とする. このとき x に関する方程式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ.

(お茶の水女子大 2015) (m20150601)

0.100 $-\infty < a < b < \infty$ とし, $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で, かつ $f(x) \geq 0$ を満たすものとする. もし $\displaystyle\int_a^b f(x) dx = 0$ であるならば, $[a, b]$ 上の各点 c で $f(c) = 0$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170602)

0.101 整数 n に対して, $x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める.

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ. また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ.

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 P_m, Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.102 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \left(x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \cdots\right) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする．

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sup_{\frac{k-1}{2^n} \leq x \leq \frac{k}{2^n}} g(x)$$
を求めよ．

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200601)

0.103 次の積分を計算せよ．(ただし，n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200606)

0.104 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ．

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200611)

0.105 (1) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ のとき，$\dfrac{dt}{dx}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を，上記 (1) のように $t = x + \sqrt{x^2-1}$ とおいて，t の関数の積分に置換せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200612)

0.106 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める． このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.107 $a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき，次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210610)

0.108 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x)=\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．
$0<x_1<x_2$ ならば $f(x_1)>f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して
$g'(x)^2=g(x)^3+1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x)>0$ をみたす連続関数とし，
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)=0=\lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a>0$ に対し，X_a は $h(x)\geq a$ をみたす実数 x の集合とする．
このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

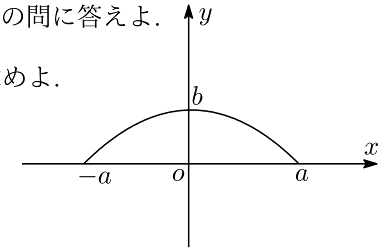
(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.109 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220606)

0.110 図の曲線は点 $(0,b)$ を頂点とする放物線の一部を表している．以下の問に答えよ．



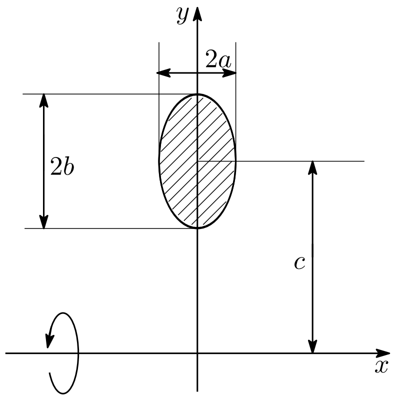
(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ．

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ．

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ．

(東京大 2002)　　(m20020702)

0.111 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c $(c>a,\ c>b)$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.112 $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$，$g(x) = x^2 e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.113 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

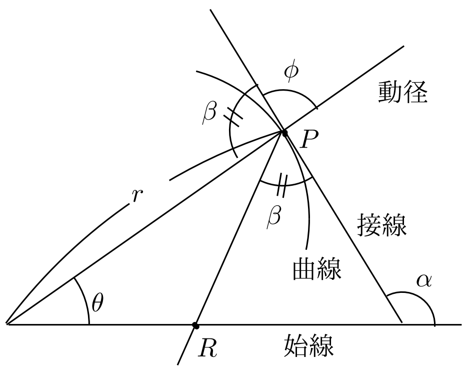
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.114 xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ 　(ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする．　点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

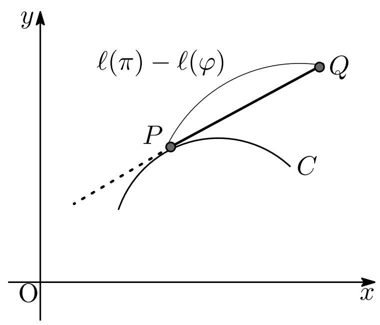
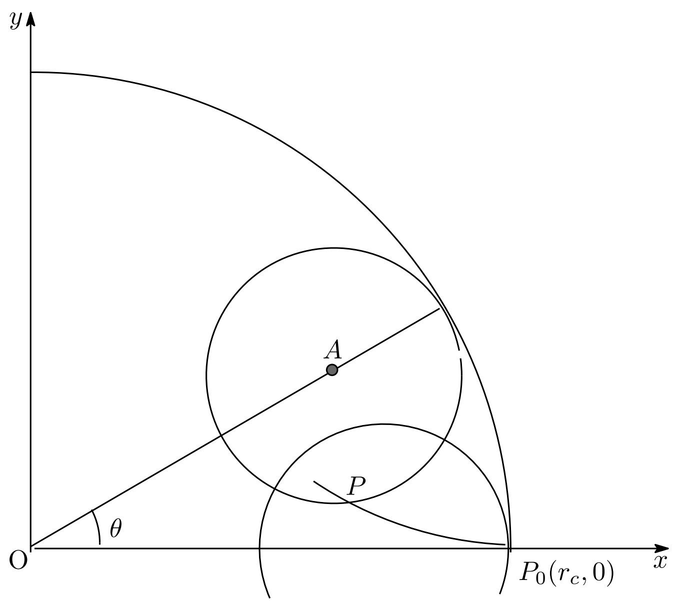


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.115 図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3) $r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.116 (1) 次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$$

(2) $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2) dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a) = \varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ．

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする．

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.117 次を示せ．

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ．
$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt \quad (x \in \boldsymbol{R}) \ .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\sin nx| dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a) \ .$

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

0.118 n を整数として以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする．$f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(x) \cos nx \, dx = 0$$
が成り立つことを示せ．（ ここで a は任意の実定数とする．）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.119 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$ を求めよ．

(2) $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ とおいて $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960902)

0.120 定積分 $\displaystyle\int_1^e x \log x \, dx$ の値を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060903)

0.121 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す xy 平面上の曲線を C とする．次の問いに答えなさい．

(1) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求め，t の式で表しなさい．

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め，t の式で表しなさい.

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい.

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい.

(東京農工大 2009) (m20090902)

0.122 以下の広義積分の値を求めなさい.

$$\int_0^\infty \left(xe^{-x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

(東京農工大 2013) (m20130902)

0.123 (1) x が正の実数のとき $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty (12\,t+1)e^{-xt}dt$ を x の式で表しなさい.

(2) (1) で求めた $F(x)$ について $\displaystyle\int_2^3 F(x)dx$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2014) (m20140902)

0.124 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2022) (m20220902)

0.125 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005) (m20051004)

0.126 関数 $y = f(x)$ のグラフ C が $(x, y) = (\sin t\,,\ t\cos t)\,,\quad (0 \leq t \leq \pi/2)$ と表されるとする．$t = \pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) $f'(x_0)$ を計算し，点 P における C の接線の方程式を求めよ.

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ. (3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ.

(電気通信大 2007) (m20071004)

0.127 (1) $u = \tan \dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$, $\cos x$ を u を用いて表せ.

(2) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx\,,\quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ.

(電気通信大 2008) (m20081003)

0.128 次の積分を求めよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x(\log x)^3 dx$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

(横浜国立大 2000) (m20001101)

0.129 次の定積分を計算しなさい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$$

(横浜国立大 2016) (m20161106)

0.130 次の不定積分を求めよ．

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$ (但し，$A \neq 0$)

(千葉大 1995)　　(m19951202)

0.131 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int (x^2+3)\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(千葉大 2005)　　(m20051206)

0.132 実数 $t \geq 0$, 実数 $a > 0$ について定義された関数 $f(t) = \sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s) = \int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.133 $\dfrac{1}{\cos x - \sin x}$ を積分せよ．

(筑波大 1998）　　(m19981301)

0.134 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする．

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 5, \\ (t-6)^2, & 5 \leq t \leq 6. \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[0,6]$ 上の f のグラフを描け．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ．

(3) $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき，すべての t に対して $F(t)$ を求め，区間 $[0,6]$ 上の F のグラフを描け．

(4) 区間 $(0,6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(5) 関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する．

$$F_1(t) = \int_2^t f(s)ds\ ,\ F_2(t) = \int_3^t f(s)ds\ .$$

このとき，$F_1(t) - F_2(t)$ を求めよ．

(筑波大 2000)　　(m20001301)

0.135 定積分　$I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha x)\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha \geq 0\ ,\ \beta \neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx = \mathrm{sign}(\beta)\frac{\pi}{2}$　を導け．

ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.136 (x,y) 直交座標系において $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$　$(\alpha > 0)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031304)

0.137 次式をグラフに描いたときに，この曲線と x 軸で囲まれる面積を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で求めよ．

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

(筑波大 2003)　　(m20031305)

0.138 次の定積分を行え．　$\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(筑波大 2003)　　(m20031306)

0.139 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031307)

0.140 以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい．また，これを用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい．

(2) 次の不等式が成立することを証明しなさい．ただし，$n > 2$ とする．

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

(筑波大 2004)　　(m20041307)

0.141 $f(x) = x \ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \ln x$ を求めよ.

(2) $x \geq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y = f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3) x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004）　　(m20041308)

0.142 $y = x^2 - 2x - 8$ の曲線を x 軸に対して回転させて囲まれる部分の体積を求めよ.
ただし, 求める部分は $x^2 - 2x - 8 = 0$ の解 x_1 , x_2 の間のみとする ($x_1 \leqq x \leqq x_2$).

（筑波大 2004）　　(m20041309)

0.143 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ を計算しなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ を計算しなさい.

（筑波大 2004）　　(m20041310)

0.144 xy 平面上に 2 本の曲線 $y = x^2 - 1$ と $y = -(x-k)^2 + (k+1)$ が与えられているとする.

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ.

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を公式として用いてよい.

（筑波大 2004）　　(m20041311)

0.145 曲線　$y = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2 \quad (x \geq 0)$　について, 次の問いに答えよ.

(1) y が最小値をとる x の値と, その最小値は何か?

(2) y の変曲点における x の値は何か?

(3) y が上に凸である x の範囲と, 下に凸である x の範囲を示せ.

(4) y のグラフの概形を描き, その上に, x 軸と交わる点, 最小値をとる点, 変曲点の座標をそれぞれ示せ.

(5) このグラフの x 軸の下にある部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2005)　(m20051302)

0.146 (1) 関数 $f(x) = xe^{ax}$（a は定数）の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2+1)}$ の不定積分を求めよ.

(筑波大 2005)　(m20051308)

0.147 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい.

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい.

(筑波大 2006)　(m20061301)

0.148 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ.

(3) $x \leq 0$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か，理由をつけて答えよ.

(筑波大 2006)　(m20061314)

0.149 (1) $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ で与えられる図形の概略を描け $(a > r > 0)$.

(2) この図形を y 軸の周りに回転して得られるドーナッツ型の回転体（トーラス）の体積 V を求めよ.

(筑波大 2006)　(m20061317)

0.150 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx$ を求めなさい.

(2) $I(a) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\sin x + 1)^2 dx$ を最小にするような a の値を求めなさい.

(筑波大 2006)　(m20061323)

0.151 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ.

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \leq 1$ を利用し，不等式 $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ.
ただし，$0 < x_1 < x_2$ とする.

(筑波大 2007)　(m20071301)

0.152 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (xg(x)) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$$ となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1}f(y)dy$$ とおけば

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u_n(x) = f(x)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$ をみたすことを示せ.

(筑波大 2007)　(m20071308)

0.153 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，閉区間 $[a,b]$ で $g(x)>0$ であるならば，$\dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x=c$ が区間 (a,b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(筑波大 2007)　(m20071311)

0.154 関数 $f(x)=x\cdot\ln x \quad (x>0)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ．

(3) $x\to+0$ および $x\to+\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ．

曲線 $y=x\cdot\ln x$ と x 軸と $x=a \quad (0<a<1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく．

(5) $S(a)$ を求めよ．　(6) $S(a)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}S(a)$ を求めよ．

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e=2.72$ の値を用いなさい．

(筑波大 2007)　(m20071314)

0.155 4 次関数 $y=f(x)=x^4-8x^2+ax+b$ のグラフは 2 点 $x=\alpha,\ \beta \quad (\alpha<\beta)$ で x 軸と接する．

(1) a,b,α,β を求めよ．　(2) $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071334)

0.156 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^{2n})dx$（$n$ は 0 以上の整数）の値を n を使って表せ．

(筑波大 2008)　(m20081331)

0.157 3 次関数 $f(x)=x^3-x^2-74x+144$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(-5), f(0), f(5)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) $f(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸，直線 $x=-1,\ x=1$ が囲む面積を求めよ．

(筑波大 2008)　(m20081338)

0.158 実変数 x の関数 $f_n(x)=x^n\log x$ （n は自然数）について，以下の問いに答えよ，

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f_n(x)$ （$f_n(x)$ の $x=0$ における右側極限値）を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ．

(筑波大 2009)　(m20091306)

0.159 整数 $n\geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n=\displaystyle\int\cos^n x\,dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい．

$$I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n\geqq 2)$$

(筑波大 2009)　(m20091316)

0.160 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \geq 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\log t = \int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du \quad (t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log \frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x\log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010) (m20101303)

0.161 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい.

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(筑波大 2011) (m20111302)

0.162 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ.

(筑波大 2012) (m20121326)

0.163 積分を利用して，次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013) (m20131303)

0.164 次の問いに答えよ.

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x\,dx = \sum_{m=0}^\infty \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　(m20131304)

0.165 $\displaystyle\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$ を求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141304)

0.166 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C: x^3-3xy+y^3=0$ について，次の問いに答えよ.

(1) C の特異点をすべて求めよ.

(2) C 上の点 (x, y) に関する xy の極値をすべて求めよ.

(3) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおき，C の極方程式を求めよ.

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ.
(ヒント：極方程式を用いて，$t=\tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.167 曲線 $A: y=x\cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線 A, x 軸 $(y=0)$，そして $x=a\ (a<0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} S(a)$ の値を求めなさい.

(筑波大 2016)　　(m20161307)

0.168 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える.

$$x_i=\frac{i}{n}\qquad(i=0,1,\cdots,n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して,

$$I_k=(x_{k-1},x_k]\qquad(k=1,\cdots,n)$$

とし，次の和を定義する.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sup_{x\in I_k} f(x)$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\inf_{x\in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n\to\infty$ において極限を持つとき,

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$
$$s=\lim_{n\to\infty} s_n$$

とする．$S=s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい,

$$S=s=\int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $f(x)=x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{ が無理数})\\ x & (x\text{ が有理数})\end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である.

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.169 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x-\mu)^2}{2}\right\}$　　$(0<x<\infty\ ;\ -\infty<\mu<\infty)$ とおく.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx=\frac{1}{2}$ となる m を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171316)

0.170 (1) 数列

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\quad(n=1,2,\cdots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が, $C\geq\dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ. ただし, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す.

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.171 以下の関数を積分せよ. ただし, k は整数であり, 積分定数は省略してよい.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$　　(2) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sin x}$　　(4) $x^k\ln x$

(筑波大 2018)　　(m20181311)

0.172 (1) $f(x)$ は $x\geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって, 任意の $\varepsilon>0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する. このとき, 任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_\varepsilon^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする. (1) の等式を用いて, 任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して,

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の広義積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.173 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く. ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが, 定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合, $y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる. この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする.

上記の定義域において, 次の問に答えよ

① $y = \mathrm{Arctan}\, x$ について, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ.

② 次の無限級数 S の値を求めよ. ただし, その導出過程を示すこと.

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020) (m20201305)

0.174 次の定積分の値を求めなさい.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$$

(筑波大 2020) (m20201310)

0.175 (1) 以下の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\pi \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり, $f(x) > 0 \ \ (x \in [0,1])$ とする. このとき, 以下の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021) (m20211304)

0.176 定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) I_1 を求めよ.

(b) $I_n \ \ (n \geqq 2)$ を求めよ.

(筑波大 2022) (m20221303)

0.177 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(2) $\displaystyle\int (2x+1)\ln x dx$

(埼玉大 2001) (m20011404)

0.178 (1) 次の等式を満たす実数 a, b, c, d を求めよ. $\dfrac{1}{x^4+4} = \dfrac{ax+b}{x^2-2x+2} + \dfrac{cx+d}{x^2+2x+2}$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$ を求めよ.

(埼玉大 2001) (m20011405)

0.179 曲線 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めなさい.

(埼玉大 2003) (m20031403)

0.180 $a > 0$ とするとき, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx$ を求めよ.

(埼玉大 2003) (m20031404)

0.181 $f(x) = \dfrac{3e^{2x} + 4\sin x}{2e^{2x} + e^{-x}}$ とおく.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\ dx$ を求めよ.

(埼玉大 2004) (m20041402)

0.182 次の積分を求めよ．

$$\int \frac{x+1}{(2x^2+4x-7)^n}dx$$

（埼玉大 2004） (m20041403)

0.183 (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$, $\cos x$ および $\dfrac{dt}{dx}$ を t の式で表せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061402)

0.184 n を自然数とし、$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく.

(1) I_2 を求めよ.

(2) $n \geqq 3$ のとき，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ を示せ.

(埼玉大 2006) (m20061408)

0.185 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(埼玉大 2007) (m20071402)

0.186 n を自然数とする．次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ の値を求めよ.

(埼玉大 2008) (m20081407)

0.187 (1) 関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y=\dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009) (m20091401)

0.188 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx<\infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx=\infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^{\infty} |g(x)|\,dx<\infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\le x<\infty}|g(x)|=\infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 2010) (m20101404)

0.189 つぎの積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{11}e^{x^4}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{(x-3)^2(x-2)}\,dx$

(埼玉大 2010) (m20101406)

0.190 次の不定積分を求めよ.

$$\int \left(2x^2\tan^{-1}2x\right)dx$$

(埼玉大 2011) (m20111402)

0.191 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx \qquad (m, n\text{ は自然数})$$

(埼玉大 2012) (m20121402)

0.192 次の定積分を求めよ.

$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(埼玉大 2013) (m20131403)

0.193 $-1<x<1$ に対し，$t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) x を t の式で表し，さらに，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ.

(2) 不定積分

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を t の不定積分で表せ.

(3) 広義積分

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131410)

0.194 次の定積分を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

(埼玉大 2015) (m20151403)

0.195 次の不定積分を求めよ.

$\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-2x+3}dx$

(埼玉大 2016) (m20161402)

0.196 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{-x^2+10}{(x+1)(x-2)^2}dx$

(埼玉大 2017) (m20171402)

0.197 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$ (ただし，k は，0 でない定数)

(埼玉大 2018)　　(m20181401)

0.198　次の不定積分を求めよ．　$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

(埼玉大 2019)　　(m20191403)

0.199　(1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ を因数分解せよ．

(2) 2 つの関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ と $y = -x^2 + 4x - 3$ の交点を求めよ．

(3) 2 つの関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ と $y = -x^2 + 4x - 3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(群馬大 2003)　　(m20031503)

0.200　二次曲線 $y = 2x^2 + 5x + 3$ を考える．

(1) 二次曲線上の点 $P(-2, 1)$ における法線（点 P を通り，点 P における接線と垂直に交わる直線）の方程式を求めよ．

(2) (1) の法線と二次曲線の交点の座標を求めよ．

(3) (1) の法線と二次曲線により囲まれる面積を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091504)

0.201　2 つの曲線 $y = -x^2 + 2x + 18$,　$y = x^3 + 2x^2 - 11x + 3$　がある．

(1) 2 つの曲線の交点の座標を全て求めよ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めよ．

(群馬大 2015)　　(m20151501)

0.202　2 つの曲線 $y = x^2$ と $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$ とする) が，$x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ の 3 点で交わっている．このとき，以下の問いに答えよ．

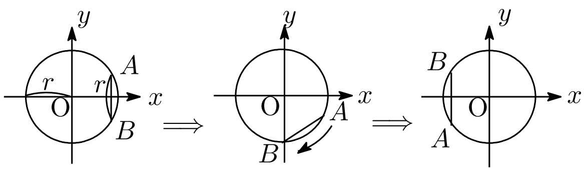
(1) b と c をそれぞれ a の式で表せ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積を a の式で表せ．

(3) 2 つの曲線の $x = -1$ における接線が直交するときの a を求めよ．

(群馬大 2016)　　(m20161501)

0.203　原点を中心とする半径 $r(r > 0)$ の円の円周に両端が接する長さ r の線分 AB がある．図のように AB がはじめ y 軸と平行に置かれ，線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び y 軸と平行になるまで移動する．このとき次の問に答えよ．



(1) 線分 AB が通る領域を図示し，その面積を求めよ．

(2) (1) の図形を y 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

0.204　次の積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^4 dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{-x} dx$

(図書館情報大 1999)　　(m19991608)

0.205 2つの放物線 $y=x^2$ と $x=8y^2$ の交点を求めよ．また，その2つの放物線に囲まれた部分の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001610)

0.206 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ を求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ である．

(茨城大 1999)　　(m19991701)

0.207 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 1999)　　(m19991702)

0.208 $f_0(x)$ を値1をとる定数関数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x f_0(t)dt$,　$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)dt$,　$f_3(x)=\displaystyle\int_0^x f_2(t)dt$ を求めよ．

(2) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$　(ただし，$n=1,2,3,\cdots$) を求めよ．

(3) $E(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ とおくとき　$\dfrac{d}{dx}E(x)$ を求めよ．

(茨城大 1999)　　(m19991703)

0.209 (1) $y=2\sqrt{1+x}+\log\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011701)

0.210 次の定積分を求めよ．ただし，m と n は0以上の整数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

（ヒント：階乗を利用すると結果を簡潔に表示できる．$0!=1$ である.）

(茨城大 2001)　　(m20011702)

0.211 (1) 次の等式が $x=-1$ を除くすべての実数 x について成立するように，4つの定数 A,B,C,D を求めよ．

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$

(茨城大 2002)　　(m20021702)

0.212 関数 $y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y=\mathrm{Arctan}\,x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y=\mathrm{Arctan}\,x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051702)

0.213 関数 $y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，その逆関数 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ を考えることができる．次の各問に答えよ.

(1) $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ は，どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ．

(2) 合成関数の微分公式に従い，$f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ．

(茨城大 2007)　　(m20071701)

0.214 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y=\tan^{-1}x$ は，$y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y=\tan x$ の逆関数を表す．

(茨城大 2013)　　(m20131702)

0.215 有理関数 $f(x)=\dfrac{5}{(x^2+1)(x+2)}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}$ を満たす定数 a,b,c を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151701)

0.216 $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{x}dx$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　　(m20021802)

0.217 不定積分 $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}dx$ を求めよ．

（山梨大 2004）　　(m20041802)

0.218 不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$ を求めなさい．

(山梨大 2006)　　(m20061803)

0.219 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x+\mu)dx$ を求め，定数 α，β，λ，μ の式で表しなさい．ただし，$\lambda\neq 0$ とする．

(山梨大 2007)　　(m20071805)

0.220 定積分 $\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-1}\,dx$ の値を求めなさい．

(山梨大 2010)　　(m20101804)

0.221 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ の値を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121801)

0.222 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(1) $f(x)=\sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2) $f(x)=\sin 3x$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $f(x)=x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.223 整数 n，正数 b に対して，$I_n=\displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \sin nx\,dx$，$R_n=\displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \cos nx\,dx$ とおく．次の小問に答えよ．

(1) I_n+nR_n を求めよ．

(2) R_n-nI_n を求めよ．

(3) I_n と R_n を求めよ．

(4) $b=\pi$ のとき，I_n と R_n を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191801)

0.224 自然数 n に対して，$P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$ とする．このとき，$n\neq m$ に対し，次が成立することを証明せよ．

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=0$$

(信州大 1998)　　(m19981902)

0.225 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を示せ．

(2) $f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1/n}^{1/n}|f(x)|^n dx\right)^{1/n}=|f(0)|$$ となることを示せ．

(信州大 2008)　　(m20081904)

0.226 (1) $|x|\leq\dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1+x)-x|\leq 2x^2$ が成立することを証明せよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\cos x\,dx$$

(信州大 2012)　　(m20121903)

0.227 (1) $t=\tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ．

(2) $t=\tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{d\theta}{1+\sin 2\theta}$ を求めよ．

(信州大 2015)　　(m20151902)

0.228 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x ついての恒等式となるように，定数 a,b,c の値を定めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ の値を求めよ．

(信州大 2017)　　(m20171902)

0.229 $a,\ b$ は定数で $a<b$ とする．$a<p<q<b$ を満たす $p,\ q$ に対して，

$$I(p,q)=\int_p^q\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$　$(p\leqq x\leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ．

(2) 極値 $I = \lim_{p \to a+0} \left\{ \lim_{q \to b-0} I(p, q) \right\}$ を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181902)

0.230　不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191902)

0.231　広義積分 $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ．

(信州大 2021)　　(m20211902)

0.232　$\sqrt{x^2 + a} = t - x$ とおいて，置換積分法により不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする．

(信州大 2022)　　(m20221902)

0.233　(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ を求めよ．ただし，n は正の偶数とする．

(信州大 2023)　　(m20231902)

0.234　自然対数の底を e とする．

(1) 任意の正整数 k に対して，$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \lambda^k = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，$g_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} x^n e^{-x} dx$ と置くとき，$g_n(\lambda)$ を求めよ．

(3) $\lim_{\lambda \to \infty} g_n(\lambda)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982003)

0.235　次の問いに答えよ．

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ とすると，$\sin x,\ \cos x,\ dx$ は，それぞれ次のように t で表されることを示せ．

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\ , \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\ , \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$ を求めよ．

(新潟大 2000)　　(m20002002)

0.236　非負の整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．このとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．さらに I_3, I_4 の値を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012002)

0.237　次の問いに答えよ．

(1) 定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ を求めよ．

(2) $\beta > 2$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{dx}{x (\log x)^{\alpha}}$ を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log x)^{\alpha}}$ は存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

（新潟大 2004）　(m20042002)

0.238 自然数 n に対して, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) 任意の実数 x に対して, $1 + x \leqq e^x$ を示せ.

(2) $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ および $e^{-nx^2} \leqq (1+x^2)^{-n}$ $(-\infty < x < \infty)$ を示せ.

(3) $x = \cos t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$ を示せ.

(4) $x = \tan t$ とおくことにより, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(5) $\sqrt{n} I_{2n+1} \leqq \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leqq \sqrt{n} I_{2n-2}$ $(n \geqq 2)$ を示せ.

(新潟大 2005)　(m20052003)

0.239 問 (1)〜(4) の不定積分および定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x dx$　(2) $\displaystyle\int \cos x dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$　(4) $\displaystyle\int_1^4 (2x^2 + 3x + 1) dx$

(新潟大 2006)　(m20062008)

0.240 18 m/s の速さで走っている列車にブレーキをかけた．ブレーキをかけてから t 秒後の列車の速さ ν m/s は，$\nu(t) = 18 - at$ で求められる．問 (1)〜(3) に答えよ．ただし，a は定数である．

(1) 列車がブレーキをかけてから停止するまでの時間を求めよ．

(2) 物体の速さ $\nu(t)$ は位置 $P(t)$ の時間変化に等しくなる．
$\nu(t) = \dfrac{dP(t)}{dt}$ を考慮して，列車がブレーキをかけてから停止するまでの距離を，a を用いて表せ．

(3) 列車はブレーキをかけてから 135 m 走って停止した，a を求めよ．

(新潟大 2006)　(m20062009)

0.241 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x^2+1)(x-1) dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+q} dx$　$(q > 0)$　(3) $\displaystyle\int e^{-x} \cos(ax) dx$　$(a > 0)$

(新潟大 2006)　(m20062010)

0.242 極座標表示の曲線 C : $r = 1 + \cos\theta$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の各問に答えよ.

(1) xy 座標で表したとき，x と y の最大値，最小値を求めよ．また，C の概形を描け.

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ.

(3) C の長さを求めよ.

(新潟大 2009)　(m20092009)

0.243 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{ax} |\sin x| dx$（ただし $a < 0$）を求めたい.

(1) $I_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{ax} |\sin x| dx$ としたとき，I_n と I_{n+1} が満たす関係式を求めよ.

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} I_i$ としたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を I_1 を用いて表現せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{ax} |\sin x| dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ となる理由を述べよ.

(4) I_1 を実際に計算し, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{ax}|\sin x|\,dx$ を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102005)

0.244 放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに回転させて出来る立体の体積を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102010)

0.245 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x^3-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

(新潟大 2011) (m20112004)

0.246 以下の計算をせよ.

(1) $(xe^x\sin x)'$ (2) $\displaystyle\int xe^x\sin x dx$

(新潟大 2011) (m20112007)

0.247 次の3つの関数のそれぞれの不定積分を求めよ.

(1) $f(x)=2x-1$ (2) $g(x)=\dfrac{2}{x+3}$ (3) $h(x)=(2x-1)^2$

(新潟大 2011) (m20112014)

0.248 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ において微分可能であるとき以下の問に答えよ. ただし, e は自然対数の底であり, a,b は定数とする.

$$f(x)=\begin{cases} e^x & (x<0\text{ のとき}) \\ (ax+b)e^{-x} & (x \geqq 0\text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 定数 a,b を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 曲線 $y=f(x)$ の概形を描け.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ.

(新潟大 2012) (m20122009)

0.249 座標平面において, 曲線 $C: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ で囲まれた図形を F とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) F の概形をかけ.

(2) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて, F の面積を求めよ.

(3) 媒介変数表示 $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて, F の周りの長さを求めよ.

(新潟大 2012) (m20122016)

0.250 関数 $f(x)=x^2e^{-2x}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点の x 座標を求めよ.

(2) 曲線 $y=f(x)$ の概形を描け.

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

を求めよ.

(新潟大 2013)　　(m20132003)

0.251 以下の問に答えよ．

(1) $F(\omega)=\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt$ を求め，$F(\omega)$ のグラフを描け．

(2) $F'(\omega)=\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ を $\omega=0$ 以外で求めよ．

(3) $y=\tan(a\omega)$ のグラフを，横軸を $a\omega$ 軸，縦軸を y 軸とする座標平面に，$-\dfrac{\pi}{2}\leq a\omega\leq\dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で描け．

(4) $F(\omega)=0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\bullet$ 印で示せ．

(5) $F'(\omega)=0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に $\odot$ 印で示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142004)

0.252 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)^2dx$$

(新潟大 2014)　　(m20142007)

0.253 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int(5x-4)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^5}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(新潟大 2014)　　(m20142014)

0.254 定積分 $-\displaystyle\int_{1/e}^{1} x\log x\,dx$ を計算せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152002)

0.255 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152008)

0.256 次の (1)～(3) の不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int(6x-1)^3\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\log_e x\,dx$

(新潟大 2015)　　(m20152014)

0.257 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152018)

0.258 関数 $g(x)=\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ の上の曲線の長さ s を $-\log_e 2\leq x\leq\log_e 2$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162002)

0.259 以下の関数で表される曲線がある．区間 $-4\leqq\ x\leqq\ 4$ における曲線の長さを求めよ．

$$y=2\left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right)$$

(新潟大 2016)　　(m20162009)

0.260 自然数 n に対して，

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\ ,\qquad J_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2dx$$

とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 次の公式を利用して，$I_{n+2}=I_n$ を示せ．

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ．

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ．

(4) J_n を求めよ．

(新潟大 2016)　(m20162011)

0.261 (1) 関数 $f(x)=\exp(2x)$ 上の x 座標が負である点 P における接線と，両座標軸とで囲まれる図形の面積を S とする．点 P の x 座標を p とし，S を p で表せ．

(2) 前問 (1) において p の関数 S の最大値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)=\exp(ax)$ とその逆関数 $g(x)=\dfrac{1}{a}\log x$ のグラフが $x=e$ で接する（すなわち，この点で接線を共有する）ように定数 $a(\neq 0)$ の値を求め，この 2 曲線と x 軸，y 軸の囲む部分の面積を求めよ．

(新潟大 2017)　(m20172001)

0.262 曲線 $y=\cosh x$ の $x=0$ から $x=2$ までの弧の長さを求めよ．

(新潟大 2017)　(m20172006)

0.263 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$

(新潟大 2017)　(m20172010)

0.264 つぎの (a)〜(c) の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x+2}$　(b) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$　(c) $\displaystyle\int\log_e x dx$

(新潟大 2017)　(m20172013)

0.265 放物線 $y=-mx^2+nx$ は第一象限で直線 $x+y=4$ と接点 $P(t,\ -mt^2+nt)$ で接する．ただし，$m>0,\ n>0$ である．次の (1),(2) に答えよ．

(1) $m,\ n$ を t の関数として表せ．

(2) 放物線と x 軸で囲まれる面積が最大になるときの $m,\ n$ とその面積を求めよ．

(新潟大 2017)　(m20172016)

0.266 (1) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

(新潟大 2017)　(m20172019)

0.267 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\left(\frac{x+3}{x}\right)^2dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{(2x-1)^3}dx$　(3) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos x dx$

(新潟大 2018)　(m20182002)

0.268 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r)=B\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R<r$ では $\rho(r)=0$ である．

(1) 半径 $r + \triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.269 $a,\ b$ を $0 < a < b < 1$ となる実数とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182009)

0.270 自然数 n に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $H_1(x),\ H_2(x),\ H_3(x),\ H_4(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ を示せ．

(3) $H_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，任意の実数 $T > 0$ に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2}dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

なることを示せ．

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty xH_6(x)e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182011)

0.271 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$ を求めよ（積分定数は C とせよ）．

(新潟大 2019)　　(m20192002)

0.272 整数 $n \geqq 0$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $I_{2n-1} = \dfrac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$，$I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ を求めよ．　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$ を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192014)

0.273 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と座標軸に囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(新潟大 2020)　　(m20202002)

0.274 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x+1)^2(x-2)}dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}dx$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222002)

0.275 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1+\sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする．

(新潟大 2022) (m20222008)

0.276 x がすべての実数の範囲を動くとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ．

$$f(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \sin t - \sin(x-t) \right\} dt$$

(長岡技科大 1991) (m19912102)

0.277 次の定積分 I_n （$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$）について，以下の問に答えよ．

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$$

(1) I_0 および I_1 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，I_n を I_{n-1} で表せ（部分積分法を利用せよ）．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1992) (m19922101)

0.278 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^n \, dx$ とおく．ここで，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x(\log x)^n$ を求めよ．

(2) I_0，I_1 を求めよ．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1995) (m19952101)

0.279 任意の 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(0) + cf(1)$$

となるような定数 a, b, c を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972102)

0.280 $f(x)$ を連続関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$ を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

$$-f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

(長岡技科大 1998) (m19982103)

0.281 関数 $f(x) = 2|x| + x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $F(t) = \displaystyle\int_t^{t+1} f(x)dx$ とおく．t がすべての実数の範囲を動くとき，$F(t)$ の最小値を求めよ．

(長岡技科大 1999) (m19992102)

0.282 自然数 n について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$ の値を求めよ．

(長岡技科大 2000) (m20002102)

0.283 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ を求めよ.

(長岡技科大 2001) (m20012102)

0.284 xy 平面で, 2 曲線 $y=2x^2$, $y=3-x^2$ で囲まれる部分を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) S の概形を描き, その面積を求めよ.

(2) S を y 軸の回りに回転させてできる回転体を V とする. V の体積を求めよ.

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, V の $t \leqq y \leqq t+1$ にある部分の体積の最大値を求めよ.

（長岡技科大 2004） (m20042101)

0.285 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ が与えられている．以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線と直線の交点 A, B の座標を求めなさい.

(2) 曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めなさい.

(3) 点 P が曲線上の A と B の間を動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2006) (m20062103)

0.286 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい.

(2) 区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a,b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_{k-1})+f(a_k)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$ を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい.

(長岡技科大 2007) (m20072104)

0.287 曲線 $y=e^x$, 直線 $y=3$ および y 軸で囲まれた部分 S の面積を A とする.

(1) S の概形を描き, その面積 A を求めなさい.

(2) $0<t<\log 3$ とする. S のうちで $t \leqq x \leqq 2t$ の範囲にある部分の面積 $A(t)$ を求めなさい.

(3) t が前問の範囲を動くとき, $A(t)$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2010) (m20102102)

0.288 空間に半径 r の球が 2 つある．これらが共有点を持つとし，中心の間の距離を $2s$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの球の共通部分の体積 V を r, s で表しなさい.

(2) $s=r^2$ の条件を満たして r, s が動くとき，V を最大にする r の値を求めなさい.

(長岡技科大 2013) (m20132103)

0.289 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える．A$(r,0)$ とし，円周上に点 B を ∠AOB$=30^\circ$ になるようにとる．下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014)　　(m20142104)

0.290　関数 $y = \sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする．下の問いに答えなさい.

(1) 図形 S を図示し，面積を求めなさい.

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(長岡技科大 2015)　　(m20152103)

0.291　次の積分を行いなさい.　$a > 0$ で a は定数.

(1) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{ax} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

(金沢大 1999)　　(m19992202)

0.292　n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$　このとき，次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ.　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007)　　(m20072210)

0.293　次の不定積分をしなさい.

$$\int x \cos x \, dx$$

(金沢大 2010)　　(m20102210)

0.294　次の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}} dx$ とおくとき，広義積分 I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) I_n の値を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112206)

0.295　xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ から，$y = x$ へ下ろした垂線の足を Q とする．点 Q の座標を，t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする．$t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を，(2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする．$y = x$ と $y = x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を，$y = x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を，s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ.

(金沢大 2012) (m20122207)

0.296 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon+\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)<1$.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $f(x)<\varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x)=0$.

(金沢大 2013) (m20132203)

0.297 $a>0,\ t>0$ とする．$I_a(t)=\displaystyle\int_0^a t^x dx$ について，次の問いに答えよ.

(1) $I_a(1)$ を求めよ.

(2) $t \neq 1$ のとき $I_a(t)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 1} I_a(t)$ を求めよ.

(金沢大 2013) (m20132207)

0.298 実数 ℓ に対して，連続関数 $f_\ell\ :\ (-\pi,\ \pi)\to \boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sin \ell\theta}{\sin\theta} & (\theta \neq 0),\\ a & (\theta=0)\end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta=0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell=2,3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

0.299 次の広義積分の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015) (m20152206)

0.300 次の微分，積分を計算しなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2015) (m20152209)

0.301 $Q_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$Q_n(t)$ は n 次式 $(n=1,2,3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(Q_n(t)\right)^2 dt=1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)dt = 0 \ \ (0 \leqq \ m < n \leqq \ 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする．このとき $Q_n(t)$ $(n = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162203)

0.302 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．　$I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016)　　(m20162214)

0.303 関数 $y = \sin^{-1} x$, $x \in [-1, 1]$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(2) $y = \sin^{-1} x$ のグラフの概形をかけ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162219)

0.304 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geq 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162221)

0.305 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とし，n は $n > 2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ．ここで，$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016)　　(m20162222)

0.306 (1) 不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

(2) n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^{\infty} e^{1-t}\frac{1}{t^n}dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! + (-1)^{n+1}(n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172205)

0.307 定数 $a>0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $x=0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} f(x)$ と $x=\dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{a}-0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1+f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 b $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を a と b を用いて表せ.

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.308 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1-x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け.

(2) 2 つの等式

$$1+\tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4}\log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta = \int_0^{\pi/4}\log(\cos\theta)d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ.

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，
$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ.

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.309 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} \ \ (t\in \boldsymbol{R}), \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (x \in \boldsymbol{R})$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ および $\lim_{t\to-\infty} f(t)$ を求めよ.

(2) $y=f(t)$ のグラフの概形を図示せよ.

(3) $y=F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ.

(4) $a>0$ に対して，極限値 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{F(ax)}{x}$ を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212201)

0.310 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin|x|-\sin x)dx$$

の値を求めよ.

(金沢大 2021)　　(m20212202)

0.311 $\boldsymbol{R}$ 上の関数 f は，任意の有界閉区間において積分可能であり

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ \ (x,y\in\boldsymbol{R})$$

を満たすとする．次の問いに答えよ.

(1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)dy\ \ (x\in\boldsymbol{R})$ とするとき，f は

$$f(x)=F(x+1)-F(x)-F(1)\ \ (x\in\boldsymbol{R})$$

を満たすことを示せ.

(2) f は微分可能であり，任意の実数 x に対して，$f'(x)=f(1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 x に対して，$f(x)=f(1)x$ が成り立つことを示せ.

(金沢大 2021)　　(m20212208)

0.312 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(富山大 2000)　　(m20002303)

0.313 y 軸は鉛直方向，座標軸の単位は cm であるとして，次の問に答えよ．ただし，水位とは x 軸からの水面の高さのこととする.

(1) 関数 $y=x^2$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ．水位が $h\ cm$ のときの水量を求めよ.

(2) 関数 $y=|x^2-1|$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 B は，上げ底の器のようになる．この器に水を注いで水位が $h\ cm$ になったときの水量を求めよ.

(3) B の容器に毎秒 $V\ cm^3$ の割合で水を注いだとき，水面の上昇速度を水位 h の関数として求めよ.

(富山大 2000)　　(m20002304)

0.314 次の各問いの計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{x\ dx}{(x^2-1)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

(富山大 2001)　　(m20012303)

0.315 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x^2\log x^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

(富山大 2003)　　(m20032302)

0.316 $x = a\cos\theta$, $y = b(1+\sin\theta)$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$, a, b は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2$ $(c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.317 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$

（富山大 2004）　　(m20042302)

0.318 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int x(1+x^2)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

(富山大 2005)　　(m20052302)

0.319 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

(富山大 2005)　　(m20052312)

0.320 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$

(富山大 2006)　　(m20062303)

0.321 関数 $y = \sin x + \cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) y の導関数を求め, 関数 y の増減と極大値, 極小値を調べよ．

(2) 関数 y のグラフを描け, 関数 y と x 軸との交点の座標も明らかにせよ．

(3) x が 0 から $\dfrac{3\pi}{4}$ の範囲で, 関数 y と x 軸で囲まれる面積を求めよ．

(富山大 2006)　　(m20062306)

0.322 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int x \sin x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$

(富山大 2007)　　(m20072302)

0.323 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{d}{dx} \log_e \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $\dfrac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

(富山大 2008)　　(m20082301)

0.324 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+x-3}{x^4-x^3-x^2-x-2}dx$ を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082306)

0.325 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{2\log x}$　　(2) $\dfrac{d}{dx}x^x$　　(3) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin(e^x)$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+1}$　　(5) $\displaystyle\int x\log|x|\,dx$

(富山大 2009)　　(m20092301)

0.326 次の計算をせよ.

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(富山大 2010)　　(m20102302)

0.327 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^5(2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \log(3x-1)dx \quad (3x>1)$

(富山大 2012)　　(m20122302)

0.328 懸垂曲線 $y = a\cosh\dfrac{x}{a} \quad (a>0)$ と直線 $y=b \quad (b>a)$ で囲まれた図形を考える.

(1) 直線と懸垂曲線は $x=\pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ.

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ.

双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,　$\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, 逆双曲線関数 $\cosh^{-1}x = \pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(x>1)$,　$\sinh^{-1}x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を用いても良い.

(富山大 2012)　　(m20122305)

0.329 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int x^2e^x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2\sqrt{3}x+2}dx$

(富山大 2013)　　(m20132302)

0.330 $y=\sqrt{x-a}$, $(a>0,\ x\geq a)$ で与えられる曲線 C と C 上の点 $P(p,q)$ で接し，点 $(0,b)$ を通る直線 L を考える．以下の設問に答えよ.

(1) 直線 L の方程式を a,b,p 用いて表せ.

(2) p と q を a と b で表せ.

(3) 上の結果を用いて，直線 L と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．ただし，$b=0$ とする.

(富山大 2013)　　(m20132305)

0.331 次の計算をせよ．ただし，(1) を解くにあたっては，$x+\sqrt{x^2+5}=t$ なる変数変換を用い， 積分計算結果は x の式で表すこと.

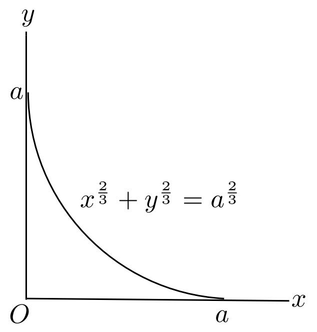
(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(富山大 2014)　　(m20142302)

0.332 曲線 : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a>0)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) この曲線は $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす t を用いて, $x=a\sin^3 t$ と表すことができる. 同様に y を t で表せ.

(2) 曲線と x 軸, y 軸が囲む領域の面積を π と a を用いて表せ.



(富山大 2014) (m20142305)

0.333 次の計算をせよ. 計算の概略も示すこと.

(1) $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4 x-6cos^6 x)\,dx$

(富山大 2015) (m20152306)

0.334 関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-x^3$ で与えられるとき, 次の問いに答えよ. 計算の概略も示すこと.

(1) $f(x)=0$ となる最大と最小の x の値を求めよ.

(2) 極大値と極小値をすべて求めよ. さらに $f(x)$ の概形も描け.

(3) $f(x)$ が x 軸とつくる閉じた図形の面積を求めよ.

(富山大 2015) (m20152309)

0.335 a を実数の定数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^a \log x dx$ が収束する a の値の範囲を求めよ.

(2) (1) の広義積分が収束するとき, その値を求めよ.

(富山大 2016) (m20162301)

0.336 次の計算をせよ. ただし, 計算の概略も示すこと.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ (2) $\displaystyle\int x\log_e x dx \quad (x>0)$

(富山大 2017) (m20172302)

0.337 関数 $f(x)=(1+kx)e^{kx} \quad (x \geqq 0)$ について, 次の各問いに答えよ. ただし, k は実数である.

(1) 次の積分 $I(X)$ を X を用いて表せ. ただし, $X>0$ とする.

$$I(X)=\int_0^X f(x)dx$$

(2) $k=-1$ のとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty} I(X)$ を求めよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{X\to\infty} I(X)$ が有限のとき, 関数 $f(x)$ の広義積分は存在する. 関数 $f(x)$ の広義積分が存在するための条件を, k についての不等式で表せ.

(富山大 2017) (m20172305)

0.338 不定積分 $\int e^x \sin x dx$ を求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182303)

0.339 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.340 次の計算をせよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(富山大 2019)　　(m20192302)

0.341 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され，

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$
$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また，$f^{(n)}(x)$，$g^{(n)}(x)$ を，それぞれ，$f(x)$，$g(x)$ の n 次導関数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$，および，$f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ．

(4) $n \geqq 2$ として，$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ．

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.342 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.343 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x=0$ と $x=2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021) (m20212304)

0.344 次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(福井大 2000) (m20002404)

0.345 倒立した円錐形の容器に水を注ぐ．いま，容器の上面の半径を R cm，深さを H cm とする．水は，t 秒後には $at^2\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$ の割合で注がれる．

(1) t sec 後の容器内の水面の上昇率を求めなさい．

(2) 何秒後に容器は水で満たされるか．

(福井大 2000) (m20002405)

0.346 関数 $f(X)=\sqrt{3}\sin X+\cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X)dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000) (m20002406)

0.347 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}dx$ (2) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(福井大 2001) (m20012405)

0.348 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta$ (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2 dx$

(福井大 2001) (m20012406)

0.349 底面の半径 1，高さ 1 である直円柱がある．この底面の半径を含み，底面と 45° をなす平面で直円柱を 2 分するとき，小さいほうの体積を求めなさい．

(福井大 2003) (m20032408)

0.350 次の関数を積分しなさい．

(1) $y=\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$ (2) $y=x\sin x^2$ (3) $y=\dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003) (m20032409)

0.351 以下の積分 $I_1 \sim I_4$ を求めなさい.

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin mx \, \sin nx dx \quad (m, n \text{ は正の整数})$$

$$I_3 = \int x^2 \sin ax dx \quad (a \neq 0) \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx \quad (I_4\text{は有効数字 2 桁で求めなさい.})$$

（福井大 2004） (m20042408)

0.352 半径 r の円の面積を積分により計算し, その値が πr^2 となることを証明しなさい.

（福井大 2004） (m20042409)

0.353 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$$

（福井大 2004） (m20042410)

0.354 定数 $a \neq 0$ のとき，次の定積分の値を求めなさい.

$$\int_0^{1/a} e^{-ax}dx$$

（福井大 2004） (m20042411)

0.355 水面上を移動している物体が, $5m/$秒の割合で減速している. 速度 $20m/$秒のときから静止するまでに移動する距離を求めなさい.

（福井大 2004） (m20042412)

0.356 次の不定積分を求めよ.

$$\int x^2 \sin x dx$$

(福井大 2005) (m20052403)

0.357 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t}\cos t\,, \quad y = e^{-t}\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(福井大 2005) (m20052404)

0.358 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005) (m20052413)

0.359 次の不定積分および定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(福井大 2005) (m20052418)

0.360 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a>0\,,\ |x| \leq a$

ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式

“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ” を使え.

(福井大 2006) (m20062403)

0.361 $x^2+(y-b)^2=a^2 \quad (b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる体積を求めよ.

(福井大 2006)　　(m20062404)

0.362 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(2) $\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$　　(3) $x\log x$

(福井大 2006)　　(m20062417)

0.363 次の積分を求めよ.（途中の計算式も書くこと） $\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (\ a>0\ )$

(福井大 2007)　　(m20072404)

0.364 2 つの放物線 $y^2=2x$, $x^2=2y$ で囲まれた部分の面積を求めよ.（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2007)　　(m20072405)

0.365 (1) 次の関数を積分せよ.（途中の計算式も書くこと）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad \text{ヒント：} \sqrt{x^2+a}=t-x \text{ とおく.}$$

(2) 次の定積分を求めよ.（途中の計算式も書くこと）}

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (a>0)$$

なお, 必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いよ.

(福井大 2008)　　(m20082403)

0.366 円 $x^2+(y-b)^2=a^2\ \ (b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる立体の体積 v を求めよ.（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2008)　　(m20082404)

0.367 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(2) $\dfrac{1-x}{x^2}$　　(3) $\tan x$　　(4) $e^x\cos x$

(福井大 2008)　　(m20082416)

0.368 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mt\cos nt\,dt$ を以下の手順で求めよ. ただし, m,n 自然数とする.

(1) $\sin mt\ \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ.

(2) $m=n$ の時の定積分を求めよ.

(3) $m\neq n$ の時の定積分を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082417)

0.369 関数 $y=e^{-x}\sin x$, $x\geq 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) $0\leq x\leq 4\pi$ の範囲で, この関数の概形を示せ. このとき $y=e^{-x}$ の概形も示せ.

(2) $0\leq x\leq \pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) k を整数とする時, $k\pi\leq x\leq (k+1)\pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x\geq 0$ の範囲で, グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082418)

0.370 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = (3x-2)^5$ (2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (3) $y = \dfrac{x}{ax+b}$

(4) $y = \dfrac{\log x}{x}$ (5) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

(福井大 2009) (m20092410)

0.371 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ を x 軸の周りに一回転して得られる回転楕円体の体積を求めよ．

(福井大 2009) (m20092411)

0.372 (1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ．

$$f(x) = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

(福井大 2009) (m20092416)

0.373 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

(福井大 2010) (m20102404)

0.374 $y^2 = ax$ と $x^2 = ay$ $(a > 0)$ で囲まれた面積を求めよ．

(福井大 2010) (m20102405)

0.375 次の関数を積分せよ．

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (2) $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$ (3) $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

(4) $x^2 \log x$ (5) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

(福井大 2010) (m20102416)

0.376 次の関数 $r = a(1+\cos\theta)$，$(a > 0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ．

(福井大 2010) (m20102417)

0.377 不定積分を求めよ．

$$\int x\sin x\,dx$$

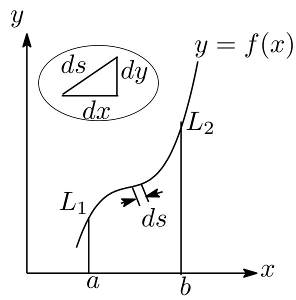
(福井大 2011) (m20112403)

0.378 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ．

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる．

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け．



(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.379 次の関数の不定積分を求めよ

(1) $x(2x-3)^2$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(3) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$　　(4) $e^x \cos x$

(福井大 2011)　　(m20112415)

0.380 曲線 $\boldsymbol{A}: y = \sin 2x$ と曲線 $\boldsymbol{B}: y = a\sin x$ がある．

$0 < a < 2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で以下の問いに答えよ．

(1) 右の枠内に曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の概形を描け．

(2) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ．

(3) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で囲まれる面積が，(2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112416)

0.381 定数 a, r が $0 < r \leq a$ のとき，円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112417)

0.382 不定積分を求めよ．

$$\int \log_e x\,dx$$

(福井大 2012)　　(m20122405)

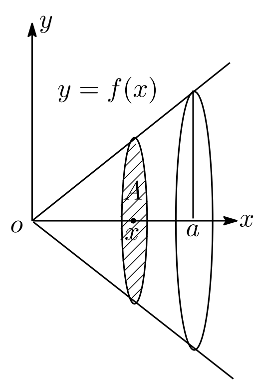
0.383 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a \geq 0)$$

(福井大 2012)　　(m20122406)

0.384 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x$ がある．この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体（回転体）の体積を，次の問いにしたがって求めよ．

(1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき，
$x = x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ．



(2) 関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq a$ において x 軸のまわりに回転するときに生じる立体の体積 V を求めよ．体積 V は (1) で求めた面積 A を $0 \leq x \leq a$ の範囲で積分することで求めることができる．なお，円錐の体積を求める公式を使ってはいけない．

(福井大 2012)　　(m20122407)

0.385　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $8x^3 - 6x^2 - 2 + 2e^{3x} + 4\sin x$

(2) $\cos x \sin^6 x$

(3) $\dfrac{1}{5e^x + 1}$　　(4) $\dfrac{6x+8}{x^2 - 8x + 12}$

(福井大 2012)　　(m20122418)

0.386　次の式を計算せよ．なお，$\alpha > 1$ とする．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^\alpha}$$

(福井大 2013)　　(m20132402)

0.387　不定積分を求めよ．

＜公式＞ 必要に応じて次の公式を使ってもよい．

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (\,a, C \text{ は定数})$$

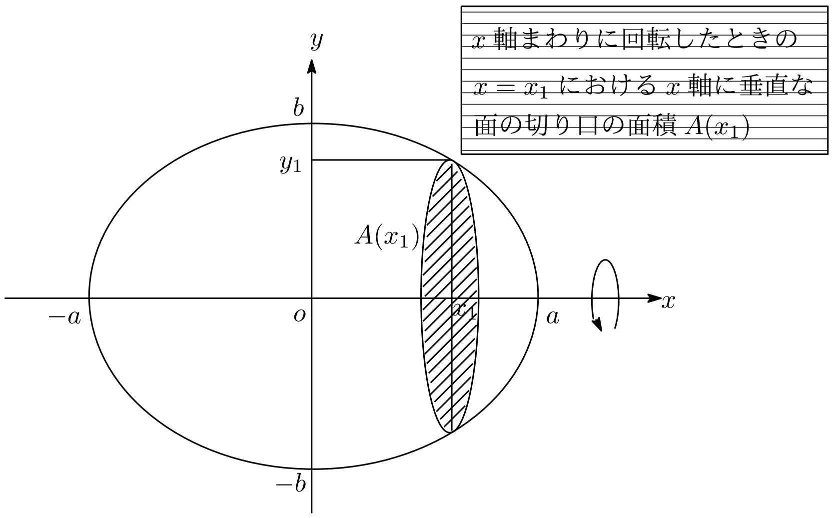
(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.388　右下図に示すように，2 次元 $x-y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ．

(1) この楕円の方程式を書け．



次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体の体積を求める．　各問いに答えよ．

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x = x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ．

(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと．

(福井大 2013)　　(m20132408)

0.389 次の設問に答えなさい.

(1) プールの水面の高さ h が，時間 t に関し $k\dfrac{h}{b}A\,dt = -a\,dh$ を満足するように変化している．ただし k, a, b, A は定数である．$t=0$ のとき $h=h_0$ ，$t=t_1$ のとき $h=h_1$ として，定数 k を求めなさい.

(2) 時間 t での位置 (x, y) が $(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$ で与えられる動点 P がある．ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ とする.

(a) $t=0$ における位置を示せ.

(b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ.

(c) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ.

(d) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132419)

0.390 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A=(1,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,1)$ からなる正方形がある．関数 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ.

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.391 次の関数を不定積分せよ.

(1) $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^3}$　　(2) $x^n\log_e x$

(福井大 2014)　　(m20142405)

0.392 $y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$ と x 軸の囲む部分を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142406)

0.393 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$　　(2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$　　(3) $\dfrac{e^{3x}}{e^x-1}$

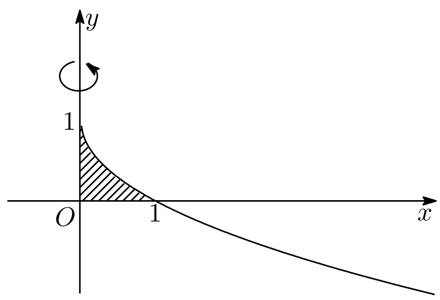
(福井大 2014)　　(m20142421)

0.394 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x\cos x dx$

(福井大 2014)　　(m20142423)

0.395 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と直線 $x=0$ および $y=0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ.



(福井大 2015)　　(m20152404)

0.396 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y = \dfrac{1-x}{x^2}$ (2) $y = \log(x+2)$

(福井大 2015) (m20152416)

0.397 関数 $y = e^{-x}\cos x,\quad 0 \leq x \leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ.

(1) この関数の概形を示せ.

(2) この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ.

(福井大 2015) (m20152417)

0.398 時間 t での位置が $(x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t)$ で与えられる動点 P がある.

(1) $t = 0$ における位置を求めよ.

(2) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ.

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ.

(4) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ.

(福井大 2015) (m20152418)

0.399 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sin 3x\right| dx$ （必要であれば，変数変換 $3x = t$ を使用せよ.）

(福井大 2016) (m20162403)

0.400 次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$ (2) $y = \sin^3 x\,\cos^3 x$ (3) $y = \dfrac{1}{e^x+1}$ (4) $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

(福井大 2016) (m20162412)

0.401 以下の積分をおこないなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(福井大 2016) (m20162421)

0.402 $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ となることを示せ．ただし C は積分定数である.

(福井大 2018) (m20182402)

0.403 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (\sin 3x + \cos x)^2 dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{5x-5}}dx$

(福井大 2018) (m20182425)

0.404 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 + x^2 + 5x + 3 + 4\pi\sin\pi x + e^{2x})dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3\cos x dx$

(福井大 2018) (m20182426)

0.405 次の定積分を求めよ．

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$　　　(2) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2020)　　(m20202403)

0.406 非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz,\quad \text{ただし，}\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)～(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz+z) = \cos nz\cos z - \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz-z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\quad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ．

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ．

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.407 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 4}{x^3}dx$　　　(2) $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)dx$

(福井大 2020)　　(m20202424)

0.408 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 2x dx$

(福井大 2020) (m20202425)

0.409 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ただし，m および n は正の整数とする.

(福井大 2021) (m20212402)

0.410 次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

(福井大 2021) (m20212415)

0.411 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x &= \theta\cos\theta \\ y &= \theta\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる.

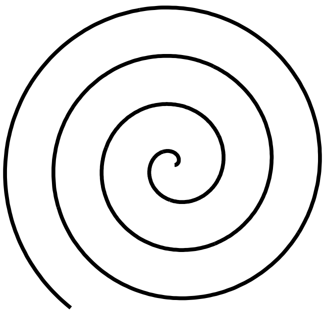


図 1 ：蚊取り線香

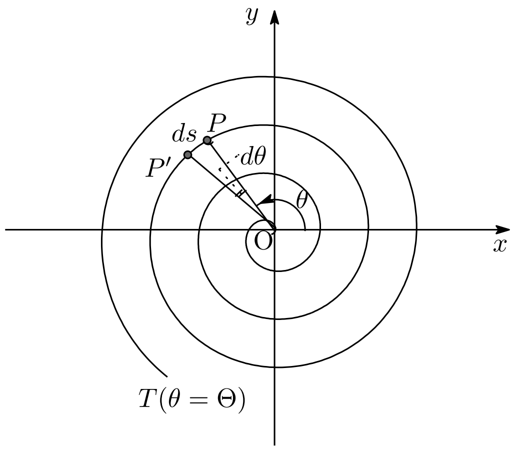


図 2 ：「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P-P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ.

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ.

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意.

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ.

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい $\left.\right)$．

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.412 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - 16}{e^x - 4} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}} dx$

(2) 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta + 1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

0.413 次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$$x = 2(t - \sin t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$
ここで，$0 \leq t \leq 2\pi$

(福井大 2021)　　(m20212422)

0.414 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{(4e^x+2)^2} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x \log 3x}$

(福井大 2022)　　(m20222402)

0.415 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.416 次の定積分を求めよ，

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \cos 2x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222414)

0.417 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること．

(1) 式 (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x) dx$ の値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x f(\sqrt{2}x) dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(\sqrt{2}x) dx$ の値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222424)

0.418　広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042501)

0.419　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin 2x\,dx$ を求めよ．　　(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062504)

0.420　次の不定積分を求めなさい．　$\displaystyle I=\int e^{2x}\sin 2x\,dx$

(静岡大 2006)　　(m20062510)

0.421　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1}2xdx$ を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072504)

0.422　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082508)

0.423　(1)　$\displaystyle\frac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x^2+1}$ を満たす，A,B,C を求めなさい．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x^3-3x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}\,dx$ を求めなさい．

(静岡大 2009)　　(m20092510)

0.424　次の積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$

(静岡大 2013)　　(m20132504)

0.425　次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

(静岡大 2016)　　(m20162501)

0.426　(1)　関数を $x=a\sin t$，$y=b\cos t$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2)　次の関数の概略図を描け．

(a) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　(b) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　(c) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(3)　ある曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012603)

0.427　２次曲線 $y=(x+3)(x-1)$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012604)

0.428　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\cos^2 x$　　(2) $\dfrac{1}{a^2-x^2}$

(岐阜大 2001)　　(m20012605)

0.429 次の不定積分，定積分，広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(岐阜大 2003)　　(m20032601)

0.430 次の積分値を求めよ. ただし, $a>0$ とする.

$$I=\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$$

(岐阜大 2005)　　(m20052602)

0.431 関数 $y=\sin 3x\cos 2x$ の不定積分を求めよ.

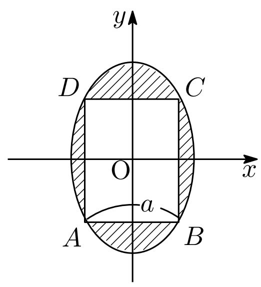
(岐阜大 2005)　　(m20052617)

0.432 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{9x^2+6}{x^3+2x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 7x\ \cos x dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062604)

0.433 図に示すような楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形 $ABCD$ を考える．$AB=a$ とし，楕円と長方形で囲まれた部分の面積を S とするとき，S を a を用いて表せ．



(岐阜大 2006)　　(m20062608)

0.434 関数 $p(x)$ が　$p(x)=\begin{cases} 0 & (x<-a) \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (-a\leqq x<0) \\ -\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & (0\leqq x\leqq a) \\ 0 & (a<x) \end{cases}$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a>0$ である．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xp(x)dx$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2p(x)dx$ を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062609)

0.435 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos(2\pi x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2(2\pi x)dx$

(岐阜大 2006)　　(m20062615)

0.436 $\dfrac{x}{x^4+1}$ の不定積分を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062617)

0.437 $f(x)=\dfrac{2x^2+15x+12}{(x+2)^2(x-3)}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(岐阜大 2007)　　(m20072608)

0.438 不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$ を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072616)

0.439 次の不定積分を以下の指示に従い計算せよ．ただし，積分定数は C とする． $\displaystyle\int \sin x \sin 3x dx$

(1) 被積分関数 $(\sin x \sin 3x)$ を加法定理を用い，積を含まない cos 関数のみの式に書き換え，不定積分を計算せよ.

(2) 部分積分をすることで不定積分を計算せよ.

(岐阜大 2007) (m20072621)

0.440 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \log x dx$

(岐阜大 2007) (m20072623)

0.441 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log_e x = 0$ となることを示しなさい. (2) $\displaystyle\int_0^1 \log_e x\,dx$ を求めなさい.

(岐阜大 2008) (m20082608)

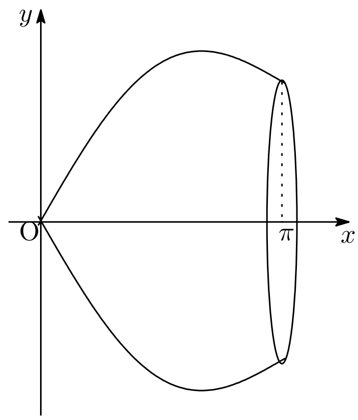
0.442 2 以上の整数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx \leqq \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2009) (m20092607)

0.443 $y = \dfrac{x}{2} + \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分の曲線を x 軸のまわりに回転してできる右図のような回転体の体積 V を求めよ.



(岐阜大 2009) (m20092617)

0.444 (1) $f(x) = \dfrac{1}{e^x-4}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) x-y 平面において，$x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$， $(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092619)

0.445 $f(x) = x\log x \ \ (x > 0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は x の自然対数である.

(1) x を未知変数とする方程式 $f(x^2) = f(x)$ を解け.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を凹凸も考慮して描け.

(3) 不等式 $2f(x) \leqq -\log 2$ を満たす x の範囲を求めよ.

(4) 関数 $y = 2f(x)$ と直線 $y = -\log 2$ のグラフで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102601)

0.446 $a, b > 0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$ が表す曲線を C とする.

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ.

(1) $x = a\cos^4 t.\ y = b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ.

(2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し，$y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a-0} y'(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} y'(x)$ を求めよ.

(3) A の概形を描け.

(4) A の面積を求めよ.

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.447 恒等式

$$\frac{x^2 + 5x + 14}{x(x^2 + 4x + 7)} = \frac{a}{x} - \frac{bx + c}{x^2 + 4x + 7}$$

が成立するような定数 a, b, c の値を求めよ．また，次の不定積分 I を求めよ.

$$I = \int \frac{x^2 + 5x + 14}{x(x^2 + 4x + 7)} dx$$

(岐阜大 2020)　　(m20202602)

0.448 e を自然対数の底とする.

(1) 次の不定積分 I を求めよ.　　$I = \displaystyle\int \frac{dx}{9e^x + 4e^{-x} + 6}$

(2) 次の広義積分 J の値を求めよ.　　$J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9e^x + 4e^{-x} + 6}$

(岐阜大 2022)　　(m20222606)

0.449 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \int_x^{\sqrt{3}x} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする.

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $F(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x}$ を求めよ.

(豊橋技科大 1996）　　(m19962705)

0.450 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I = \int_0^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2 \, dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて，$g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4) $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．
公式 $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997） (m19972705)

0.451 以下の問いに答えよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより，n が 2 以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ．

(2) 解答用紙中に記したア〜エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線
$x = a\cos^3\theta$ ，$y = a\sin^3\theta$ （ただし，$a > 0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略）

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる．

(豊橋技科大 1998） (m19982707)

0.452 $x > 0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $\log(x+1) < x$

(2) $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - 1 < \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$

(豊橋技科大 1998) (m19982708)

0.453 以下の連立不等式が表す領域の面積 S を求めよ．

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ xy \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 1999） (m19992703)

0.454 以下に示す関数について次の各問に答えよ．

$$f(x) = \cos x + x \sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) $[-2\pi,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け．

(3) $[-2\pi\,,\,0]$ および $[0\,,\,2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012706)

0.455 $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$ を計算せよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052702)

0.456 以下に示す関数について次の問いに答えよ．　$f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け.

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{q\to\infty} S(q)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062706)

0.457 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ.

(3) 接線 h と直線 $x = 0$，$x = 1$，および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする.

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ.

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 h，および直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072703)

0.458 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\, dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，積分定数は省略すること.

(1) I_0 と I_2 を求めよ.

(2) $I_4 = \dfrac{1}{4}\Big(\sin t \cos^3 t + 3I_2\Big)$ であることを示せ.

(3) $n \geq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ.

(4) 定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2008)　　(m20082703)

0.459 定積分 $I(n, a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\, dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする.

(1) $n = 0,\ a = 1$ のとき，$I(0, 1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ である.

$a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n, a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする.

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.460 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ.

$$x=\sqrt{3}\sin t$$
$$y=\sqrt{3}\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{3}$ である.

(1) $t=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102704)

0.461 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int\frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x=2(\theta-\sin\theta),\ y=1-2\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y\geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y\geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011) (m20112706)

0.462 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int\frac{2x-9}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

(2) 楕円 $9x^2+4y^2-18x-27=0$ の $x\geq 0,\ y\geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい. 以下の問いに答えなさい.

(a) 領域における x の最大値を答えよ.

(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ.

(c) 面積 S を計算せよ.

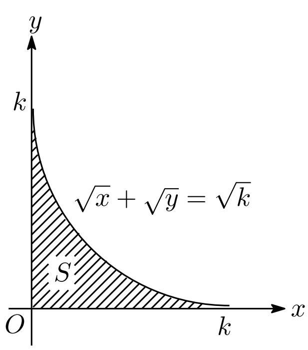
(豊橋技科大 2012) (m20122705)

0.463 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^x\cos\pi x dx$$

(豊橋技科大 2013) (m20132702)

0.464 (1) 下図に示される, 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}\quad(k\geq 0)$ と x 軸, y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け.



(2) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ.

(3) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と xy 平面, yz 平面, zx 平面で囲まれる立体 V を, z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる. この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4$ と表されることを示せ.

(4) 立体 V の体積を求めよ.

(豊橋技科大 2014) (m20142701)

0.465 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ. ただし, a は定数である.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ. ただし, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき, a の値を求めよ.

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき, $x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ.

(豊橋技科大 2015) (m20152701)

0.466 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(豊橋技科大 2017) (m20172704)

0.467 xy 平面上の曲線 $y=\cos(x-\pi)+1\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y=0$ に囲まれた図形 D について, 次の問いに答えよ.

(1) D の面積 S を求めよ.

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ.

(豊橋技科大 2017) (m20172705)

0.468 以下に示した不定積分を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ (2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ (3) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大 2018) (m20182702)

0.469 xy 平面上の二つの曲線 $y=\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y=-\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=-\sin 2x$ の交点を $0<x<\pi$ の範囲で求めよ.

(2) 領域 R を図示せよ.

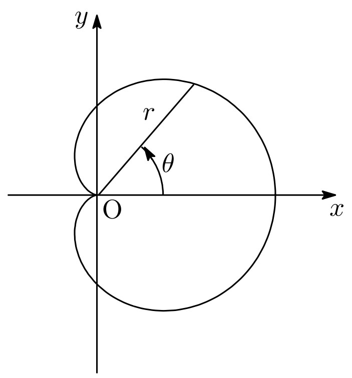
(3) 領域 R の面積 S を求めよ. .

(4) 曲線 $y=\sin x$ と 曲線 $y=|\sin 2x|$ の交点を $0<x<\pi$ の範囲で求めよ.

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2018) (m20182704)

0.470 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ．

(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ．

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ．

(4) 曲線の全長を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.471 次に示す関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 10$$

(1) 関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, 7)$ における接線 $y = g(x)$ と曲線 $y = f(x)$ が囲む領域のうち，領域 $\left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ に含まれる部分の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212704)

0.472 $f(x), g(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき，$[a, b]$ における部分積分法を $f(x), g(x)$ を用いて説明せよ．次に，$[0, 1]$ における $x\log(1 + x)$ の定積分の値を求めよ．

(名古屋大 2000)　　(m20002802)

0.473 次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ．　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その 2 点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0, y_0) で表し，$x_0 y_0 \neq 0$ とする．

(3) 曲線が囲む図形の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032801)

0.474 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^3 + x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2 + 1)\right\}\,dx$ を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062803)

0.475 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x + 1)}{x + 1}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$x > -1$ とする．

(1) $f(x)$ の x に関する一次微分および二次微分を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$ を計算せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(3) $f(x)$ の増減表を作成し，$y = f(x)$ のグラフの概略を図示せよ．

(名古屋大 2007)　　(m20072802)

0.476 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n：偶数) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n：奇数) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n：偶数) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n：奇数) \end{cases}$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.477 以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx$ （m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ （ヒント：$x = \tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ である．）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.478 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x}dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さを求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.479 (1) x の関数に関する定積分 I_1 を，次のように x を s に変換して計算する場合を考える．

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^\beta s\,ds$$

ただし，$0 < a < 1$ とする．このとき，x を s の関数として表し，積分の上限 β を求めよ．

(2) 設問 (1) の変数変換を用いて，次の定積分 I_2 の計算を考える．

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx = \int_0^\beta f(s)\,ds$$

このとき $f(s)$ を求め，$f(s)$ が $0 \leqq s \leqq \beta$ において，極大値をただ 1 つ持つことを示せ．

(名古屋大 2015)　　(m20152804)

0.480 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

(名古屋大 2016) (m20162804)

0.481 次の定積分を求めよ．ただし，$y = \tan^{-1} x$ とした場合，$x = \tan y$ であることを意味する．

$$\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$$

(名古屋大 2017) (m20172802)

0.482 $\log x$ は自然対数とし，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int x \log x dx$

(名古屋大 2018) (m20182803)

0.483 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} \, dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} \, dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n \, dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022) (m20222803)

0.484 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} \, dx$

(名古屋工業大 1999) (m19992901)

0.485 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし，$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

であることを示せ.

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ.

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000) (m20002902)

0.486 $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ をガンマ関数という.

(1) $a > 0$ のとき，$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ が成り立つことを示せ.

(2) a が自然数である時，$\Gamma(a) = (a - 1)!$ が成り立つことを示せ.

(名古屋工業大 2000) (m20002903)

0.487 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1} \, dx$ を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010) (m20102905)

0.488 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 \, dx$$

(名古屋工業大 2011) (m20112904)

0.489 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} \, dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112907)

0.490　次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2+x-1}\,dx$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122904)

0.491　次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{9x-4}{(x-2)(x^2+3)}dxdy$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132901)

0.492　次の問いに答えよ．

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2)　関数 $F(x)$ が $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt$，　$x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.493　次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142901)

0.494　不定積分 $I=\displaystyle\int \frac{-x+2}{x^3+1}dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2015)　　(m20152902)

0.495　次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(名古屋工業大 2016)　　(m20162902)

0.496　(1)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき，t を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{5+4\cos x}dx$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182902)

0.497　次の関数の不定積分を求めよ．　$f(x)=\dfrac{3x^2-2}{2x^3-x^2+2x-1}$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192902)

0.498　(1)　次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2)　次の広義積分が収束するかどうか判定せよ．　$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.499　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2022)　　(m20222902)

0.500　不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232902)

0.501 任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ および $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$ の 2 つの条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023109)

0.502 次の不定積分を計算しなさい．　　$\displaystyle\int x^2 e^x dx$

(三重大 2002)　　(m20023110)

0.503 底面の半径が a，高さが a の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と 30° の傾きをなす平面で直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さいほうの立体の体積を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023111)

0.504 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう．

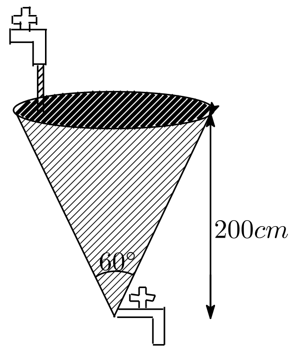
$$\int_{-\pi}^{\pi} \{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{s_2(x)\}^2 dx = 1\ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x)dx = 0$$

(1) 定積分 $f(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい．(定積分の形になる．)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - a\sin x - b\sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい．

(三重大 2002)　　(m20023112)

0.505 高さ 200cm，開き角 60° の直円錐状の容器がある．頂点を逆さにして，上からホースで，毎秒 300cc の水を入れる．最初，容器に高さ 100cm のところまで水が入っていた．容器の厚さは無視できるとして，以下の問に答えよ．



(1) 水が一杯になるには，何秒を要するか？

(2) 水を入れ始めてから t 秒後に，容器の水の高さは h cm となった．t と h の関係式を示せ．

(3) 水が一杯になったので，水を入れるのを止めた．次に底の蛇口を開いて容器内の水を流した．流出する水の量は，高さ h cm に比例して，毎秒 $20h$ cc であった．底の蛇口を開いてから s 秒後に容器の水の高さは h cm となったとして，s と h の関係式を示せ．

(4) 容器が空になるには，何秒を要するか？

(三重大 2003)　　(m20033103)

0.506 次の関数の不定積分を求めなさい．　　$y = \cos^2 x$

(三重大 2003)　　(m20033104)

0.507 曲線 $f(x) = x^3 - a^2x$ と直線 $g(x) = a^2x$ がある（a は正の定数）．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概略図を描け（x 軸との交点と極大・極小点を明示せよ）．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の交わる 3 つの交点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$ を求めよ $(x_1 < x_2 < x_3)$．

(3) 3 つの交点のうち，点 A_2 点 A_3 と曲線によって囲まれる面積 S を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033105)

0.508 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

（三重大 2004）　　(m20043105)

0.509 以下の式で表される，二つの３次関数について，(1)〜(3) のすべてに答えよ．

$$y = -2x^3 + 8x^2 - 6x \qquad ①$$

$$y = x^3 - 2x^2 + ax \qquad ②$$

(1) ①，②で表される２本の曲線は，原点 $(0, 0)$ で交差する．このほかに，ただ１点で両者が接するような，a の値を求めよ．以下の問題で，a はこの値を取るとする．

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする．

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）．

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する．

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する．

また，xy 平面上に，①, ② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ．

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ．

（三重大 2004） (m20043106)

0.510 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$ を計算せよ．

(三重大 2005) (m20053101)

0.511 次の不定積分を求めなさい．ただし，e は自然数の底，ω は実定数とする．

$$\int e^x \cos\omega x dx$$

(三重大 2005) (m20053108)

0.512 以下の (1)〜(3) の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}d\theta$ の値を求めよ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$f(x) = 2 \cdot x - \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos t \cdot dt$

(三重大 2005) (m20053112)

0.513 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\,dt$ ただし，ω，a，b は定数である．

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta\ d\theta$

(三重大 2006) (m20063101)

0.514 以下の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-5x+2}\,dx$

(三重大 2006) (m20063115)

0.515 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t = x+\sqrt{x^2+1}$ と置くことにより求めよ.

(三重大 2007) (m20073103)

0.516 以下の関数を x で微分せよ.

(1) a^x (2) xa^x (3) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (4) $\displaystyle\int_0^x (x\cos t-\sin t)dt$

(三重大 2007) (m20073107)

0.517 以下の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \log_e x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin x dx$

(三重大 2007) (m20073108)

0.518 $p(x)=2xe^{-x^2}$, $q(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ とする時, $f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\cdot q(t-x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい. グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること.

(三重大 2009) (m20093102)

0.519 以下の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5-\frac{2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2e^{-3x}dx$

(三重大 2009) (m20093108)

0.520 曲線 $y=x^3-6x^2+9x \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ がある. いま, 原点を通る直線を引いたところ, この直線は原点を含めて 3 点で曲線と交わり, 直線と曲線で囲まれた 2 つの領域ができた. この 2 つの領域の面積が等しいとき, この直線の方程式を求めなさい.

(三重大 2010) (m20103102)

0.521 次の積分の値を求めなさい. ただし, 定数 a は $a>0$, e は自然対数の底とする.

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx$$

(三重大 2010) (m20103108)

0.522 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

(三重大 2010) (m20103114)

0.523 定積分の値を求めよ. 自然対数は log で表す.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\,\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-1}{x}\,dx$

(三重大 2011) (m20113103)

0.524 次の定積分を求めなさい.

$$\int_1^4 \frac{2x+7}{x^2+7x+10}\,dx$$

(三重大 2011)　　(m20113111)

0.525 以下の (1) については不定積分を, (2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^2e^{-at}dt$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大 2012)　　(m20123102)

0.526 xy 平面上の曲線 $r=(1+\cos\theta)$ の概形を描け. またこの曲線の全長を求めよ. ただし r は動径, θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする.　(三重大 2012)　　(m20123110)

0.527 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad\qquad \int x\cos^2 x\,dx$$

(三重大 2012)　　(m20123112)

0.528 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(三重大 2012)　　(m20123117)

0.529 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$ を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133103)

0.530 変数 x に関する関数の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx$

(三重大 2013)　　(m20133111)

0.531 微分可能な関数 $f(x)$ が, $f(x) = \cos^2(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\left\{\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\right\}dt$ を満たすとき, 以下の問に答えなさい.

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい.

(2) $f''(x)$ を求めなさい.

(3) $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて, $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい.

(三重大 2014)　　(m20143101)

0.532 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\log_e(1+x^2)}{1+x^2}dx$

(三重大 2014)　　(m20143107)

0.533 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a,\ x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n,\ x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015) (m20153101)

0.534 以下の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ただし $|x|<a,\ a>0$ (4) $\displaystyle\int\sinh x\,dx$

(三重大 2015) (m20153104)

0.535 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx$ （ ここで b は $b\neq 0$ の実数であり，$|x|<|b|$ ）

(三重大 2015) (m20153106)

0.536 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (C は定数) を証明せよ．

(三重大 2016) (m20163104)

0.537 関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 範囲 $0\leqq x\leqq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y=f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し，$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい．

(2) 次の式が成り立つことを，問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい．

$$\int_0^a\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2}+\sin^{-1}a\right)$$

(三重大 2016) (m20163107)

0.538 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sin xdx$

(三重大 2016) (m20163110)

0.539 (1) 曲線 $y=\log_e x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線が曲線 $y=ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ．

(2) この接線，曲線 $y=ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(三重大 2016) (m20163112)

0.540 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016) (m20163114)

0.541 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(三重大 2016) (m20163116)

0.542 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい．

$\sin 3x \cos 2x$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい．

$y = -3x^2 + 12 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(三重大 2017) (m20173103)

0.543 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2e^x \cos x dx$ を計算しなさい．

(三重大 2017) (m20173107)

0.544 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $y = \displaystyle\int x \log_e x \ dx$ (2) $y = \displaystyle\int_1^3 \frac{2x^2+5x+4}{x^2} dx$

(三重大 2017) (m20173110)

0.545 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(三重大 2018) (m20183107)

0.546 以下の設問 (1) から (3) に答えよ．

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ とすると，$A = B$ であることを示せ．

(2) (1) の結果を利用して A の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ の値を計算せよ．

(三重大 2018) (m20183110)

0.547 星芒形 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $(a > 0)$ の概形を書け．またこの曲線の全長を求めよ．

(三重大 2018) (m20183114)

0.548 次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1} dx =$ (2) $\displaystyle\int xe^{-x} dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2) dx =$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

(三重大 2020) (m20203102)

0.549 曲線 $y = 3x^2$ を y 軸周りに回転してできる回転体を容器として考える．y 軸を鉛直上向きにとり，この容器に毎秒 c の割合で水を入れるものとする．この際，t 秒後の容器内の水面の高さを答えなさい．ただし，c は定数である．また，水面の高さは x 軸と水面との距離とする．

(三重大 2022) (m20223106)

0.550 以下の極限値を求めなさい．

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^5} \sum_{n=1}^{m} n^4$

(三重大 2022) (m20223108)

0.551 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 5^{2x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi x^3\sin x\,dx$

(三重大 2022) (m20223110)

0.552 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)dx$ （n は正の整数） (2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(奈良女子大 2001) (m20013204)

0.553 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$ に対して以下の等式を証明せよ.

(1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ (2) $\Gamma(n)=(n-1)!$ （n は正の整数）

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ （必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$ を使ってもよい）

(奈良女子大 2001) (m20013205)

0.554 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1(5x+7x^3)dx$ (2) $\displaystyle\int_{-2}^1|x|dx$

(奈良女子大 2001) (m20013206)

0.555 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1(1+x)\sqrt{1-x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin x dx$

(奈良女子大 2002) (m20023203)

0.556 $t>0$ に対して，$F(t)=\displaystyle\int_0^t(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく.

(1) $F(1)$ を求めよ. (2) 導関数 $F'(t)$ を求めよ.

(2) $G(s)=\displaystyle\int_0^{e^{-s}}(2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく. 導関数 $G'(s)$ を求めよ.

(奈良女子大 2002) (m20023204)

0.557 以下では e は自然対数の底とする.

(1) $x\geq 1$ のとき，次の不等式が成立することを証明せよ. $e^x>x^2$

(2) 上の (1) における不等式の両辺を積分することによって，$x\geq 1$ のとき次の不等式が成立することを証明せよ. $e^x>\dfrac{x^3}{3}+2$

(奈良女子大 2003) (m20033203)

0.558 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi x^2\cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi\cos^2 x dx$

（奈良女子大 2004） (m20043203)

0.559 $u(x)$ は微分可能な関数, a と b は定数とする. 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(e^{-ax}u(x))=be^{-ax}$ ならば $\dfrac{d}{dx}u(x)-a\,u(x)=b$ が成り立ち, またその逆も成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{d}{dx}(e^{-ax}u(x))=be^{-ax}$ の左辺および右辺をそれぞれ 0 から t まで積分せよ. とくに，$u(0)=0$ として，$u(t)$ を表せ.

（奈良女子大 2004）　(m20043204)

0.560 開区間 $(0,1)(=\{x\,|\,0<x<1\})$ 上の関数

$$f(x)=-x\log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0<a<1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0<a<1$ のとき $f(a^2)=2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{a\to+0} f(a^2)=0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005)　(m20053203)

0.561 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ.

(奈良女子大 2006)　(m20063203)

0.562 a を正の定数とする．$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1\ :\ y=-\frac{x^2}{2}+a\quad(-\infty<x<\infty),$$
$$C_2\ :\ y=-\log x\quad(\ x>0\ )$$

について考える．いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする．次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) 直線 $y=a$ と C_2 の交点の座標を求めよ.

(3) C_1 , C_2 と直線 $y=a$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2007)　(m20073203)

0.563 次の不定積分 I を求めよ.　$\displaystyle I=\int x\cos x\,dx$

(奈良女子大 2007)　(m20073207)

0.564 $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1\ :\ y=\sin x\qquad(0\leqq x\leqq 2\pi)$$
$$C_2\ :\ y=\sin(x-a)\qquad(0\leqq x\leqq 2\pi)$$

について考える．ただし，a は正の定数で，$0<a\leqq\pi$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，C_1, C_2 のグラフの概形を描け.

(2) $0<x\leqq 2\pi$ の範囲において，C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を，それぞれ t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ とする．t_1, t_2 を a で表わせ.

(3) $t_1\leqq x\leqq t_2$ の範囲で，C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ.

(奈良女子大 2008)　(m20083203)

0.565 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}\quad(a>0)$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$

(奈良女子大 2008)　(m20083206)

0.566 関数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ のグラフ G に関して次の問いに答えよ.

(1) 原点におけるグラフ G の接線 L の方程式を求めよ.

(2) 接線 L は，グラフ G と原点以外で交わらないことを示せ.

(3) グラフ G，接線 L および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2009)　　(m20093203)

0.567 次の不定積分と定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$　（a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$　$(a > 0)$

(奈良女子大 2009)　　(m20093205)

0.568 F_n が次のように定義されているとする.

$$F_n \equiv \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は正の整数である.

(1) F_1 を求めよ.

(2) n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ.

$$F_n = \frac{n-1}{2} F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009)　　(m20093206)

0.569 次の定積分を求めよ. ただし, a, b は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx$$

(奈良女子大 2010)　　(m20103207)

0.570 xy平面上の曲線

$$C \ :\ y = \log x \ \ (x > 0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ.

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ.

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2011)　　(m20113203)

0.571 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax}dx$　$(a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\log x\,dx$　$(\alpha > -1)$

(奈良女子大 2011)　　(m20113205)

0.572 次の積分を求めよ．ただし，a は実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax)dx$　　$(a \neq 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$　　(m, n は正の整数)

(奈良女子大 2012)　　(m20123202)

0.573　xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = e^x + x$$

に対して，次の問に答えよ．

(1)　原点を通り曲線 C に接する直線 ℓ を求めよ．

(2)　曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2012)　　(m20123208)

0.574　xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = e^x$$

と，点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である．

(1)　直線 ℓ を求めよ．

(2)　曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133203)

0.575　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(奈良女子大 2013)　　(m20133205)

0.576　次の積分を求めよ．ただし，a は正の実定数である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos x dx$

(奈良女子大 2014)　　(m20143202)

0.577　xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = xe^{-x}$$

について次の問に答えよ．

(1)　C 上の点 $(a,\ ae^{-a})$ における C の接線の方程式を求めよ．ただし a は実数とする．

(2)　C 上の点 $(1,\ e^{-1})$ における C の接線を ℓ とする．C, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3)　y 軸上の点 $(0, b)$ を通る C の接線がちょうど 2 本存在するための，b のみたすべき条件を求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143207)

0.578　次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty r^3 \exp\bigl(-ar^2\bigr)\,dr$ 2　　(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\,\cos x\,dx$

(奈良女子大 2015)　　(m20153202)

0.579　$xy-$ 平面上の曲線

$$C : y = \log(1+x^2)\ \ (x \geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) 曲線 C の概形をかけ.

(3) 曲線 C, 接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.580 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163202)

0.581 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)}dx$ を計算せよ.

(奈良女子大 2016)　　(m20163206)

0.582 $x \geq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ ついて，以下の問いに答えよ.

(1) f の増減おいび凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を書け.

(2) f の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ であることを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173203)

0.583 関数 $f(x) = x^2(1-x)^4$ と $g(x) = x^4(1-x)^2$ を，$0 \leqq x \leqq 1$ において考える．以下の問いに答えよ.

(1) f の増減を $0 \leqq x \leqq 1$ において調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．さらに，$y = g(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq f(x)$ かつ $0 \leqq y \leqq g(x)$ の表す領域の面積を求めよ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183203)

0.584 n を自然数，a を実数とし　$\displaystyle I_n = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+1)^n}$　とおく．以下の問いに答えよ.

(1) 次の等式を示せ.　$\displaystyle I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\int_0^a x\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

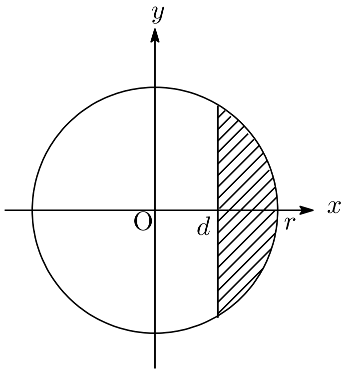
(2) 次の等式を示せ.　$\displaystyle I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left\{\frac{a}{(a^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right\}$

(3) 次の積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(奈良女子大 2019)　　(m20193203)

0.585 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax+b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする.

(2) 下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.586 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223204)

0.587 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ．

ただし，$a>b>0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする．

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ．

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.588 関数 $r=a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi\leq\theta\leq\pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ．

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.589 関数 $f(x), g(x)$ 区間 $[a,b]$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

をみたす ξ が区間 $[a,b]$ 内に存在することを示せ．

(京都大 2006)　　(m20063302)

0.590 $x>0$ に対して $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log x \qquad (m, n$ は正整数$)$

(c) $\log e = 1 \qquad \left(e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ．

(e) $\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}} \qquad (m, n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008) (m20083301)

0.591 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009) (m20093301)

0.592 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = r(t-\sin t),\ y = r(1-\cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a, 0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012) (m20123303)

0.593 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える．

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする．

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ．

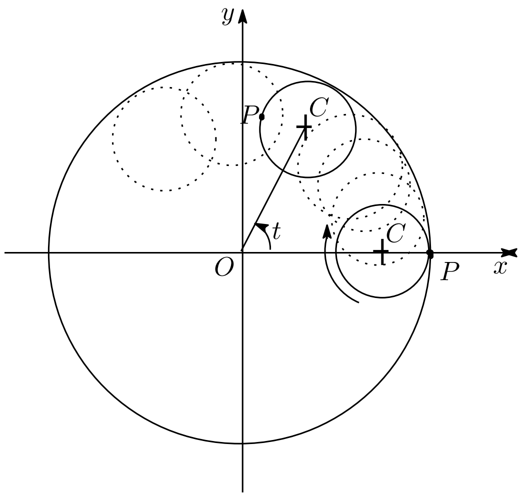
(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ．

(3) $a = 2,\ b = 1$ のとき，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.594 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり，初期状態において座標 $(a, 0)$ にある点 P で大円に内接している．　小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する．　点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする．　このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，　点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.595 次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2 - 1}{x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大 2017)　　(m20173305)

0.596 $a < b$ として，区間 $[a,\ b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x \mapsto f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)\ , \quad a < c < b$$

となる c が存在することを示せ．

(京都大 2017)　　(m20173306)

0.597 次の定積分の値を求めよ．

(イ) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3dx}{x^2+3}$

(京都大 2018)　(m20183301)

0.598 次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(イ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^3 x}{1+\sin x}dx$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7e^x}{e^x+1}dx$

(京都大 2018)　(m20183302)

0.599 (1) 次の積分の値を求めよ．

(イ) $\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x\ dx$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\ dx$　　(ハ) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1}dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ．

(イ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log_e(1+x^2)\ dx$

(京都大 2022)　(m20223303)

0.600 曲線（asteroid）

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

（a は正の定数）の長さを求めよ．

(京都工芸繊維大 1998)　(m19983402)

0.601 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 1999)　(m19993403)

0.602 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2000)　(m20003404)

0.603 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　(m20003405)

0.604 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\tan^{-1} x dx$ の値を求めよ．ただし $\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数の主値である．

(京都工芸繊維大 2001)　(m20013402)

0.605 自然数 $n \geqq 2$ に対して，　$\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

とおく．次の (1),(2) を証明せよ．

(1) $I_n = J_n$　　(2) $\displaystyle I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

(京都工芸繊維大 2001)　(m20013403)

0.606 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2002)　(m20023403)

0.607 実数 $p > 0$ について　$\displaystyle\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$　とおく．次の (1), (2) を証明せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$ （ただし，a は実数）　　(2) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023404)

0.608 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(2x^2+1)(x^2+1)}dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033404)

0.609 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033405)

0.610 (1) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく．$\sin x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sin x}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2004)　　(m20043409)

0.611 (1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right\}$

(2) 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053401)

0.612 不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x^4}{x^3+1}dx$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053409)

0.613 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063404)

0.614 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063407)

0.615 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{e^x+2e^{-x}+2}dx$

(京都工芸繊維大 2007)　　(m20073403)

0.616 (1) α を正の定数とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^\alpha\log x=0$ を示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083402)

0.617 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-e^x}{x\sin x}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^3\frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093402)

0.618 正数 R について，$I(R)=\displaystyle\int_0^R x^3e^{-x^2}dx$ とおく．

(1) 積分 $I(R)$ の値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I(R)$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103402)

0.619 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113402)

0.620 (1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)\log(\cos x)$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)\log(\cos x)dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123403)

0.621 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dx$ の値を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ の値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)^2}dx$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013) (m20133403)

0.622 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ. (2) 広義積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2016) (m20163402)

0.623 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2017) (m20173403)

0.624 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx \quad \left(0\leqq T<\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.

(2) a を正の実数とする. 広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a}dx$ が収束するような a の範囲. および a がその範囲にあるときの, この広義積分を求めよ.

(京都工芸繊維大 2019) (m20193402)

0.625 広義積分 $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2020) (m20203403)

0.626 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{6x-4}{x^3-4x}dx$ を求めよ.

(京都工芸繊維大 2021) (m20213403)

0.627 次の広義積分を求めよ. $\displaystyle\int_0^1\log x dx$

(大阪大 1995) (m19953504)

0.628 $\displaystyle I_n=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し,

(1) I_0 , I_1 を求めよ.

(2) I_n+I_{n-1} を求めて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ を示せ.

(3) (1),(2) より, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2$ を証明せよ.

(大阪大 1997) (m19973502)

0.629 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - 2x\cos y + x^2}}\,dy$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(大阪大 1999） (m19993502)

0.630 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を $\displaystyle g(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$ で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x) = \cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0) > 0$ のとき，$g(x)$ は $x = 0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003) (m20033501)

0.631 曲線 $y = \dfrac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ $(a > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線上の 2 点，$\mathrm{A}(0, \dfrac{1}{a})$，$\mathrm{B}(p, q)$ $(p > 0)$ の間の弧の長さ ℓ を a と q で表せ．

(2) $\ell = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$ のとき，点 $\mathrm{B}(p, q)$ $(p > 0)$ の座標を求めよ．

（大阪大 2004） (m20043504)

0.632 xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$

で表される．ただし, $a > 0$ とする．

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概略図を示せ． (2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ．

(大阪大 2005) (m20053502)

0.633 2 つの曲線 $(y-a)^2 = a(a+x)$, $(y-a)^2 = a(a-x)$ がある．ただし，$a > 0$ とする．

次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x - y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(大阪大 2006) (m20063504)

0.634 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する． $\displaystyle I_{n,k} = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n-1-k<0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ．　$I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n-1-k<0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して，　$\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n-1-k \geq 0$ のとき，$I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_0^L \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008)　(m20083501)

0.635 関数 $f(x) = e^{-x}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x は実数，e は自然対数の底とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．ただし，n は 0 または正の偶数とする．

(大阪大 2008)　(m20083509)

0.636 曲線 C が媒介変数表示 $x=f(s),\ y=g(s),\ s \geq 0$ で表される．ただし，$\cosh s = (e^s+e^{-s})/2$ ，$\sinh s = (e^s-e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 $b>0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x=f(s),\ y=g(s),\ 0 \leq s \leq b$ で表される．$C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ．

(2) 点 P は時刻 0 で $x=f(0),\ y=g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する．時刻 $t>0$ までに移動した経路の長さを t とする．時刻 t における P の位置を $x=f(\varphi(t))$, $y=g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　(m20143501)

0.637 実数 x に対し $y=\sinh x = (e^x-e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ． そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について　$S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　(m20153505)

0.638 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x=2\cos\theta,\quad y=2\sin 2\theta$ で表される点 (x,y) は 1 つの曲線を描く． この曲線の方程式を $y=f(x)$ とする． $y=f(x)$ の 1 点 (a,b) における接線の方程式が $y=-2(x-c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y=f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y=-2(x-c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.639 $x,\,y$ は次のような変数 θ の関数である.

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta) \qquad (a>0,\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\,y)$ において, $x,\,y$ が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(大阪府立大 2010)　　(m20103613)

0.640 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式が任意の実数 t に対して成立することを示せ.

$$\int_0^t (s^2+1)^{-\frac{3}{2}}ds = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty (s^2+1)^{-\frac{3}{2}}ds$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113601)

0.641 次の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(大阪府立大 2013)　　(m20133602)

0.642 自然数 n に対して, I_n を　$I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}dx$　とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ.

(3) I_n の値を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(I_{n+1}+I_{n+2}+\cdots+I_{2n})$ を求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163608)

0.643 非負の整数 n に対して

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

とおく. このとき, 各問に答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対して等式 $S_n = \dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ を示し, n の偶奇で場合分けをして, S_n の値を求めよ.

(2) 比 $\dfrac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ を考え, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}$ の値を求めることで, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183604)

0.644 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$　$0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi$　の長さを求めよ.

(関西大 2003)　　(m20033702)

0.645 $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ とするとき，I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(神戸大 1996) (m19963801)

0.646 積分 $\int_1^e \log x\, dx$ を計算せよ．

(神戸大 1997) (m19973803)

0.647 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$ について，積分 $\int_0^1 f(x)\, dx$ の値を求めよ．

(神戸大 1998) (m19983803)

0.648 $F(x) = \int_{-1}^x |\, t\,|\, dt \quad (x \in R)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $F(x)$ を求めよ（すなわち x の式で表せ）．そして，$y = F(x)$ のグラフを描け．

(2) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を求めよ．

(3) 実数全体 R で定義された関数 $G(x)$ で 2 次導関数 $G''(x)$ はあるが 3 回は微分可能でない点があるような関数を作れ．

(神戸大 1998) (m19983804)

0.649 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ の値を求めよ．

(神戸大 1999) (m19993801)

0.650 $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$ I_n と I_{n+2} の関係を調べ，I_{2n+1} を求めよ．

(神戸大 1999) (m19993802)

0.651 $L_n = \int \log^n x\ dx$ とする．

(1) $L_n = x\log^n x - nL_{n-1} \quad (n \geq 1)$ を示せ．

(2) L_n を求めよ．

(神戸大 2003) (m20033803)

0.652 $r : [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\,, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006) (m20063804)

0.653 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$ を示せ．

(2) $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{F(n)}=0$ を仮定する．そのとき，

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)}=1$ 　を示せ．

(神戸大 2007)　　(m20073805)

0.654 以下の積分の値を求めよ．

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ 　(m, n は自然数)　　(2) $\int_1^e x(\log x)^2dx$　　(3) $\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}x\,dx$

(神戸大 2008)　　(m20083801)

0.655 $D_0(x)\equiv 1,\ D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\ (n\geq 1)$ ，$F_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\ (n\geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2}=\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1-\cos(n+1)x\Big\}=\dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy=2\pi$ となることを示せ．

(4) $0<\delta<\pi$ なる δ に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}F_n(y)dy=0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.656 $I=\int_0^{\log 5}\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 　を求めよ．

(鳥取大 1997)　　(m19973903)

0.657 次の不定積分を計算せよ．(積分定数は省略してよい)

(1) $\int\dfrac{x+2}{x(x^2-1)}dx$　　(2) $\int\dfrac{x-2}{x^2-x+1}dx$

なお，必要であれば，公式 $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ 　$(a\neq 0)$ を用いてもよい．

(鳥取大 2000)　　(m20003901)

0.658 次の各積分を求めよ．ただし $a>0$ とする．

(1) $\int_0^1\dfrac{dx}{x^a}$　　(2) $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$

(鳥取大 2001)　　(m20013901)

0.659 自然数 n に対し，$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j=0,1,...,n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

ただし必要ならば $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\ dt=\dfrac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$

を用いてよい．

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.660 次の積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ ただし, L は正で, n, m は正の整数をとるものとする.

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax+b}dx$ ただし, a は正とする.

（鳥取大 2004） (m20043902)

0.661 次の計算をせよ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

(鳥取大 2005) (m20053902)

0.662 負でない整数 n に対し, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 および I_1 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し, $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(3) I_n を求めよ.

(鳥取大 2005) (m20053906)

0.663 $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx \ \ (a > 0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_1 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し, $I_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2}\left\{\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right\}$ が成り立つことを示せ.
（ヒント：I_{n-1} を部分積分すれば, I_n との関係が求まる.）

(3) 上の結果を用いて, I_3 を求めよ.

(鳥取大 2006) (m20063904)

0.664 次の定積分の値を求めよ. (注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.665 2 次式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ を考える. 任意の $a_2,\ a_1,\ a_0$ に対し, 以下の式が成立するように実数 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ の値を定めよ.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(\alpha) + f(\beta)$$

(鳥取大 2009) (m20093910)

0.666 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-4x+7}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

(鳥取大 2010) (m20103904)

0.667 サイクロイド：$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(a > 0\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$ の長さ L を求めよ.

(鳥取大 2010) (m20103905)

0.668 関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s>1$ に対して $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 2010) (m20103906)

0.669 次の不定積分を求めよ．ただし，log は自然対数である．

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$

(鳥取大 2011) (m20113903)

0.670 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\quad(0\leq\theta\leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y=2x^2$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2011) (m20113904)

0.671 不定積分 $\displaystyle\int e^x\sin x dx$ を求めよ.

(鳥取大 2011) (m20113906)

0.672 曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$ および直線 ℓ : $x=\dfrac{a}{2}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $x\geqq\dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) $x\geqq\dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2013) (m20133901)

0.673 (1) n を正の整数とする．このとき，

$$\sin^{2n+1}x\leqq\ \sin^{2n}x\leqq\ \sin^{2n-1}x\qquad(0\leqq\ x\leqq\pi/2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\sin^0 x=1\ \ (0\leqq\ x\leqq\pi/2)$ と定め，$n=0,1,2,\cdots$ に対して $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$ とおく.

このとき， $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\ \ (n\geqq\ 2)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ.

(岡山大 2003) (m20034001)

0.674 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$ を求めよ.

(2) 2 つの関数 $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{x}$ は各々区間 $[1,\infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005) (m20054002)

0.675 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n:r^n=\cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2(0\leq\theta\leq\pi/4)$ の長さ l は，$\displaystyle l=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006)　　(m20064002)

0.676 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 　で定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ．

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x)-F(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ．

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ は増加関数であることを示せ．

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.677 (1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$ が成り立つ理由を説明せよ．

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{1}{x^2+1}dx\right\}$ を示し，$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084002)

0.678 数直線 $(-\infty,\infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x)=x^2\log(1+x^2)\ ,\quad f(x)=F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x (tf'(t)-f(t))\,dt$ を求めよ．

(2) $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{2F(x)}{x^2}>0\quad(x\neq 0)$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094001)

0.679 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx\quad(s>0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^ne^{-sx}dx=\frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-sx}dx$ の値を求めよ．

(3) $s>1$ のとき，

$$\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty\frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.680 (1) n を整数とするとき，$\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ の原始関数を求めよ．

(2) n が 2 以上の整数のとき, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

(岡山大 2010)　　(m20104002)

0.681 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011)　　(m20114002)

0.682 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1-2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する. 次の各問いに答えよ.

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ.

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ.

(3) $x \neq 0$ のとき, $f(x) = 2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ.

(4) $|x| < 1$ のとき, $f(x)$ を求めよ.

(5) $|x| > 1$ のとき, $f(x)$ を求めよ.

(岡山大 2012)　　(m20124002)

0.683 (1) 整式 $x^4(1-x)^4$ を整式 $1+x^2$ で割った商と余りを求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ を求めよ.

(3) 不等式 $\pi < \dfrac{22}{7}$ を示せ.

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $x(1-x) \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを用いて, 不等式 $\pi > \dfrac{22}{7}\cdot\dfrac{1024}{1025}$ を示せ.

(岡山大 2014)　　(m20144002)

0.684 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n$$

で定める. ただし, c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ. 以下の問いに答えよ.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n \sin x dx$$

を求めよ.

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.685　(1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^{\lambda}xe^{-nx^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017)　　(m20174002)

0.686　(1) 次の積分を計算せよ．ただし，n, m は自然数である．

$$\int_{-1}^1 x\sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2) 次の等式を示せ．

$$\int_{-1}^1 \left\{x - \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin k\pi x\right\}^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001)　　(m20014102)

0.687　$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} (x > 0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $F(x)$ は $x > 0$ において強い意味での単調増加関数であることを示せ．

(2) $F(xy) = F(x) + F(y)$，$F(x/y) = F(x) - F(y)$ を示せ．

(3) $F(x^n) = nF(x)$（n : 有理数）を示せ．

(広島大 2001)　　(m20014103)

0.688　次の積分をせよ．　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

(広島大 2001)　　(m20014104)

0.689　$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x dx$ とおく．次に答えよ．

(1) I_2, I_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ．

(3) $n \geqq 4$ に対し，I_n を求めよ．

(広島大 2003)　　(m20034103)

0.690　次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

ただし, $y = \tan^{-1}x$ $\left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.691 次の積分を以下の手順に従って求めよ.

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$$

ここで $\alpha > -1$ は定数, ln は自然対数である.

(1) 求める積分を $I(\alpha)$ とおき,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$$

を求めよ.

(2) 上の答えを利用して $I(\alpha)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054109)

0.692 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ (ただし, a は正定数)

(広島大 2006)　　(m20064107)

0.693 2 次元直交座標系における 2 軸を x 軸, y 軸とするとき, $y = x^2$ で表される曲線がある. この曲線の, 点 $(0,0)$ から点 (a, a^2) までの長さを求めよ.

(広島大 2006)　　(m20064108)

0.694 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\, dr$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\, dr$ の値を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124105)

0.695 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\, dx$ 　（a, b はいずれも 0 でない定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(広島大 2012)　　(m20124110)

0.696 以下の問いに答えよ.

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け, （答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき, $\displaystyle\lim_{t \to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k \, dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.697 xy 平面内で $x^2+3y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を満たす領域の面積を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144102)

0.698 次の積分 I_n について以下の問いに答えよ.

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

(1) I_0 を求めよ.

(2) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ.

(3) 漸化式を利用することにより I_n を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144103)

0.699 関数 $f(x) = x^2(x-1)(4-x)$ を考える．定積分

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して，以下の問いに答えよ.

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ とするとき，x を t の関数として表し，$\dfrac{dx}{dt}$ を計算せよ.

(2) 定積分 I において，積分変数を x から t に変換せよ.

(3) 定積分 I の値を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144106)

0.700 (1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) $J = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ.

(3) 定数 $C>0$ と $R>0$ が存在して $x \geqq R$ ならば $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$ となることを示せ.

(4) 広義積分 $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$ の値を求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.701 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C \ :\ \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ.

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）.

(ii) C の長さを求めよ.

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.702 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ について，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ．

(広島大 2016)　　(m20164110)

0.703 実数 x に対し，

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)|\leq\dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x)+2f(x)\Big(1-f(x)^2\Big)=0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.704 s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ を示せ．

(広島大 2018)　　(m20184108)

0.705 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x\geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2}\leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a)=\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ．

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい．

(広島大 2021)　　(m20214103)

0.706 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx \qquad \text{ただし，} m, n \text{ は整数とする．}$$

(広島大 2021)　(m20214108)

0.707 次の関数の不定積分を求めよ．ただし，a は定数とする．

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(広島大 2022)　(m20224102)

0.708 放物線 $y = (x+2)^2$ の区間 $-3 \leqq x \leqq -2$ における曲線の長さ s を求めよ．

(広島大 2023)　(m20234102)

0.709 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t\, dt$$

(1) $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて，n が 2 以上のとき，$I_n(x)$ の漸化式を求めよ．

(広島市立大 2007)　(m20074202)

0.710 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\, |\sin x|\, dx$ を求めよ．

(広島市立大 2010)　(m20104202)

0.711 無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ， $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ の収束発散を調べ，収束する場合はその値を求めよ．

(広島市立大 2012)　(m20124201)

0.712 (1) 不定積分 $\displaystyle\int x \log x\ dx$ を求めなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ を求めなさい．

(山口大 2001)　(m20014310)

0.713 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\, dx$ を求めなさい．

(山口大 2002)　(m20024301)

0.714 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x dx$ を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x \cos ax dx$ を求めなさい．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int dx/(x^2(1-x))$ を求めなさい．

(山口大 2003)　(m20034306)

0.715 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx$ を計算しなさい．

（山口大 2004）　(m20044303)

0.716 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t\, dt$$

（山口大 2004）　(m20044304)

0.717 次の直線と円で囲まれた図形の面積を積分して求めなさい.

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

(山口大 2005) (m20054302)

0.718 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int x \cos ax dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

(山口大 2005) (m20054306)

0.719 定積分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めなさい.

(山口大 2005) (m20054309)

0.720 放物線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる体積 V_1 および y 軸のまわりに回転してできる体積 V_2 を求めなさい.

(山口大 2006) (m20064301)

0.721 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ を求めなさい.

(山口大 2006) (m20064306)

0.722 曲線 $y^3 = x^4$, $x^3 = y^4$ の原点 O 以外の交点を P とし, O より P に至る両曲線の弧で囲まれる図形の面積を求めなさい.

(山口大 2008) (m20084303)

0.723 次の定積分の値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}} \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

(山口大 2009) (m20094305)

0.724 $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における曲線 y の長さを求めなさい.

(山口大 2009) (m20094312)

0.725 次の定積分を計算しなさい．ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$$\int_0^a \tan x \, dx$$

(山口大 2009) (m20094313)

0.726 $0 \leq x \leq r$，$0 \leq y \leq r$ 区間（r：定数）で x 軸と y 軸, $x^2 + y^2 = r^2$ で囲まれる部分の面積 S が $\pi r^2/4$ であることを積分を用いて示しなさい．

(山口大 2010) (m20104303)

0.727 次の曲線と直線とで囲まれた図形の面積を求めなさい．

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

(山口大 2011) (m20114303)

0.728 曲線 $y = x^3 - 12x + 16$ を D とする．曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(山口大 2012) (m20124304)

0.729 次の不定積分を求めなさい． $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$

(山口大 2015) (m20154304)

0.730 $y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + 3$ に関する次の問いに答えなさい．

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 区間 $(4 \leq x \leq 8)$ における曲線 y の長さ L を求めなさい．

(山口大 2016) (m20164304)

0.731 曲線 $y = 1 - x^2$ について，次の問題に答えなさい．

(1) x 軸とこの曲線とで囲む図形の面積を求めなさい．

(2) この曲線の第一象限における長さを求めなさい．

(山口大 2017) (m20174304)

0.732 $0 \leq x \leq \pi$ のとき，2 つの曲線 $y = -\sin x$ と $y = \sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(山口大 2018) (m20184304)

0.733 曲線 $5x^2 + 2xy + y^2 = 4$ の囲む面積を求めなさい．

(山口大 2021) (m20214304)

0.734 自然数 n に対し，$f_n(x) = nx^n - nx^{2n}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成立することを示せ．

(徳島大 2001) (m20014401)

0.735 変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して，$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin\theta}\, d\theta$ を求めよ．

(徳島大 2010) (m20104403)

0.736 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ．

(2) $R > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^R \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ．

(3) I_α を求めよ．

(徳島大 2011) (m20114402)

0.737 広義積分 $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ おいたとき，x を t で表せ．

(2) (1) の変数変換により，I を t の積分に変換せよ．

(3) I の値を求めよ．

(徳島大 2012) (m20124403)

0.738 n は自然数とする．

(1) $\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2\cos nx \sin x$ を示せ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{\sin x}dx$ を求めよ．

(3) $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ．

(徳島大 2013) (m20134403)

0.739 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\log x}\,dx$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $0 < x < 1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ．

(2) J を I で表せ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ．

(徳島大 2014) (m20144402)

0.740 関数 $f(x)$ は，$\sin f(x) = \cos^2 x$，$0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

(1) $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2018) (m20184402)

0.741 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_N(x) = N\varphi(Nx) \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001） (m20014501)

0.742 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f,\xi(\Delta)\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0}S\left(f,\xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n)\,,\qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.743 n を自然数とし

$$f_n(x)=\max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2+\frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a,b\}$ は a と b の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$

(2) $x\in[0,\infty)$ に対して，次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$

(3) 次を示せ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx\neq\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$

(高知大 2006) (m20064502)

0.744 関数 $x = \log t$, $y = \dfrac{2t+1}{t^2}$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および $\displaystyle\int y dx$ を t で表せ.

(高知大 2006) (m20064505)

0.745 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{t-1} dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ を求めよ.

(2) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} x^t = 0$ を示せ.

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = t f(t)$ が成り立つことを示せ.

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ.

(高知大 2007) (m20074503)

0.746 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)^3}$ について．以下に設問に答えよ.

(1) 恒等式 $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{D}{(x-2)^3}$ が成り立つ様に定数 A, B, C, D の値を求めよ.

(2) $f(x)$ の原始関数で，$x = \dfrac{3}{2}$ の時の値が 0 となるものを求めよ.

(高知大 2011) (m20114506)

0.747 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) 実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{e^x - e^a}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(4) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq |x|$ を示せ.

(高知大 2012) (m20124502)

0.748 次の問いに答えよ.

(1) 微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ,

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2) $f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ.

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3) (2) を用いて次の式を示せ.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4) 次の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013) (m20134501)

0.749 $n=0,1,2,3,\cdots$ とする．関数

$$f_n(x)=\frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し，

$$a_n=\int_0^{\pi} f_n(x)\sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の式を示せ．

$$f_{n+1}(x)=\frac{x(x-\pi)}{n+1}f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ．

$$f''_{n+2}(x)=2f_{n+1}(x)+(2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ．

$$a_{n+2}=(-4n-6)a_{n+1}-\pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ．

(高知大 2013)

0.750 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt & (x\neq 0\text{ のとき}) \\ 0 & (x=0\text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x\neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)|\leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf'(x)$ を求めよ．

(高知大 2014) (m20144501)

0.751 次の問いに答えよ．

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{s+x}dx$ を求めよ．

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して $f_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t+\frac{k}{n}}$ とおく．
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ．

(高知大 2015) (m20154501)

0.752 不定積分 $\displaystyle\int\sin^3\theta d\theta$ を求めよ．

(高知大 2015) (m20154505)

0.753 $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx=1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，

数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.754 (1) 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a, b, c を求めよ．

(2) $r > 0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3) (2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to\infty} \left(r^2 I(r)\right)$ を求めよ．

(高知大 2017)　　(m20174502)

0.755 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t\ , \quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ．

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ．

(3) t の範囲を $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ．

(高知大 2018)　　(m20184505)

0.756 $0 < a < 1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \log x dx$ を求めよ．ただし，計算途中で不定形の極限ができた場合，その計算過程も明記すること．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k-\log n\right)$ を求めよ.

(愛媛大 2000)　　(m20004602)

0.757 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx$

（愛媛大 2004）　　(m20044602)

0.758 $f(x)$ を連続関数とし，　$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$　とする.

(1) 関数　$g(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} f(t)\,dt$　を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ.

(2) 関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数　$h(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} tf(t)\,dt$　の導関数 $h'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x)$, $F(x)$ を用いて表せ.

(愛媛大 2004)　　(m20044603)

0.759 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+x}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ が成り立つように定数 A, B, C を定めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054602)

0.760 定数 a, b が $a>b>0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x= & a\cos t \\ y= & b\sin t \end{cases}\qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.761 $a>0,\ x>0$ のとき, 関数 $f(x)$ は等式

$$\int_a^{\sqrt{x}} f(t)dt=-2+\log x$$

を満たす. このとき, $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054609)

0.762 次の積分 I の値を求めよ.

$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin 2x}$$

(愛媛大 2005)　　(m20054610)

0.763 (1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。 (2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+3t^2}\,dt$ を求めよ。

(愛媛大 2006) (m20064602)

0.764 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\tan^{-1}x$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 上単調減少であることを示せ．

(2) 次の定積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(愛媛大 2006) (m20064606)

0.765 n を自然数とするとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{t^n}{t^{2n}+2}dt$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $x=1$ で極値を持つように n の値を定めよ．

(2) (1) の n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を求めよ．

(愛媛大 2006) (m20064610)

0.766 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$ （a,b は定数） (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\tan(t^2)dt$

(愛媛大 2006) (m20064611)

0.767 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x dx$ を求めよ． (2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x-x^3}dx$ を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074602)

0.768 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\log x dx$ を計算せよ．

(2) $0<a<1$ とし，$f(a)=\displaystyle\int_1^e|\log x-a|dx$ とおく．

(a) $f(a)$ を計算せよ．

(b) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$f(a)$ を最小とする a の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074606)

0.769 すべての実数 x に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^3+1}{t^2+1}dt$ とする．

(1) $f(x)$ を計算せよ． (2) $x>0$ のとき $f(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ．

(愛媛大 2007) (m20074608)

0.770 次の不定積分を計算せよ． $\displaystyle\int\log x\,dx$ $(x>0)$

(愛媛大 2007) (m20074615)

0.771 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta$

(愛媛大 2007) (m20074616)

0.772 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 階導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数を求めよ.

(3) $g(x)^2 - f(x)^2$ を求めよ.

(4) $a > 0$ とする. このとき $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ を求めよ.

(愛媛大 2008) (m20084603)

0.773 (1) 次の不定積分を計算せよ. ただし, $x > 0$ で n は自然数とする. $\displaystyle\int x^n \log x\,dx$

(2) 次の定積分を計算せよ. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$

(3) 3 点 $A = (-x_1, x_2, 0)$, $B = (0, x_2, x_3)$, $C = (x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ. ただし, a は定数とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008) (m20084607)

0.774 (1) 次の広義積分を求めよ. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)\tan^{-1}x}$

(2) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$

(愛媛大 2008) (m20084609)

0.775 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

(2) $a > 0$ のとき, 次の広義積分が収束するための a の条件を求め, そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$$

(愛媛大 2009) (m20094602)

0.776 (1) $x = \sin t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおいて, 次の不定積分を求めよ. ただし, 最終的な答えは x の関数で表わすこと.

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(2) $S(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\,dt$ とする. 次の値を求めよ.

(a) $S'(e)$ (b) $S(e)$ (c) $\displaystyle\int_1^e e^{S(x)}\log x\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{S(x)}}{x^x}\,dx$

(愛媛大 2010) (m20104602)

0.777 a, b は実数で, $0 < a < 1$ を満たすとする. xy 平面において, 2 つの関数のグラフ

$$C : y = \log x\,, \quad l : y = ax + b$$

がただ一つの共有点を持ったとき, 次の問に答えよ.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) $b > 0$ となるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき, 曲線 C, および 3 直線 l, $x = 0$, $y = 0$ で囲まれた部分の面積を求め, a のみを用いて表せ.

(愛媛大 2011) (m20114606)

0.778 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおいて，次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos x}\,dx$$

(愛媛大 2011) (m20114608)

0.779 (1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_1^{e^2}(\log x)^2dx$$

(2) 次の媒介表示で表される曲線の長さを求めよ.

$$x=\frac{t^3}{3}-t\,,\qquad y=t^2\qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2)$$

(愛媛大 2013) (m20134602)

0.780 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int\frac{x^3-x-1}{x^2+1}dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}dx$$

(愛媛大 2014) (m20144602)

0.781 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2-1)}dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}x^2e^{-x^2-2x-2}dx$

(愛媛大 2015) (m20154602)

0.782 a を正の整数とし，2 曲線 $C_1\ :\ y=|x|e^{-x}$, $C_2\ :\ y=ae^{-x}$ で囲まれた図形の面積を S とする.

(1) 関数 $y=|x|e^{-x}$ の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ.

(2) S を a を用いて表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{S}{a^2}$ を求めよ.

(愛媛大 2015) (m20154608)

0.783 $a>1$ とし，$f(x)=(e^x-1)(e^x-a)$ とおく.

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値，および $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ.

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(3) S を (2) で求めた値とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to1+0}\frac{S}{(a-1)^3}$ を求めよ.

(愛媛大 2016) (m20164604)

0.784 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x\ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(愛媛大 2017) (m20174602)

0.785 $a,\ b$ は実数で，$a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{bx+1}{x^2+a}$ が $x = -1$ で極値 $\dfrac{1}{2}$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値および極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(愛媛大 2017) (m20174611)

0.786 (1) $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ． ただし，$\tan^{-1} x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数とする．

(2) $y = (x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ．

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ と定める．このとき次の漸化式を示せ．

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

(愛媛大 2017) (m20174614)

0.787 (1) 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ (b) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin 2x dx$

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

(愛媛大 2018) (m20184602)

0.788 次の不定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x} dx$ (b) $\displaystyle\int x^9 e^{-x^{10}} dx$

0.789 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right) dx$$

(愛媛大 2021) (m20214602)

0.790 変数 $a,\ b$ は各々$\{1,2,3,4,5,6\}$ に値をとる．

$$\int_{a-b}^{a+b} (x-b)\big(x-(a+b)\big) dx = 2b^3$$

となる $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

(愛媛大 2022) (m20224604)

0.791 関数

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$$

がある.

(1) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ.

(2) 直線 ℓ が以下の条件 (i), (ii) の両方をみたすとする.

(i) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ は 3 点で交わり，そのうち 1 点は (1) で求めた変曲点である.

(ii) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ の 3 つの交点の x 座標を小さい値から順に $a,\ b,\ c$ としたとき,

$$\int_a^c f(x)dx = 20$$

である.

このとき，直線 ℓ を表す方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と (2) の直線 ℓ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を求めよ.

(愛媛大 2022)　　(m20224605)

0.792 (1) 次の不定積分と定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2x^2+3}$$

(愛媛大 2022)　　(m20224607)

0.793 $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$，　$-1 \leq x \leq 1$，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$　と定義する．このとき次の問に答えよ.

(1) $P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$ を計算して求めよ.

(2) 任意の　$0 \leq k \leq n$　について　$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_{n+1}(x)\,dx = 0$　を示せ.

(3) 任意の n 次多項式 $Q(x)$ について　$\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_{n+1}(x)\,dx = 0$　を示せ.

(4) $P_n(1)$ の値を計算せよ.

(九州大 1997)　　(m19974701)

0.794 不定積分 $\displaystyle\int te^{-t^2}dt$　を求めよ.

(九州大 1998)　　(m19984702)

0.795 曲線 $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ に関して以下の問に答えよ.

(1) $y = f(x)$ の増減を調べグラフを描け.

(2) 区間 $[\alpha, \alpha+1]$ の曲線の長さ $h(\alpha)$ を求めよ.

(3) $h(\alpha)$ の最小値を求めよ.

(九州大 1999)　　(m19994702)

0.796 次の積分の計算をしなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-t}dt$

(九州大 2001)　　(m20014701)

0.797 (1) 区間 $[0,1]$ で定義された関数 g の積分（区分求積法）の定義を述べよ.

(2) 関数 $g(x)=x^3$ を区間 $[0,1]$ で, 上で与えられた定義に従って, 積分した値を求めよ.

(九州大 2005) (m20054708)

0.798 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x)=-\log(\cos x)\,,\quad g(x)=\log\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y=f(x)\quad(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006) (m20064712)

0.799 e を自然対数の底とするとき，関数 $f(x)=e^{-x^2}$ と，その n 次 (n 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x)=p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき，多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ．

(2) 任意の非負整数 k に対して， $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k f(x)=0$ となることを示せ．

(3) 次の広義積分 $I=\displaystyle\int_o^{+\infty} p_1(x)p_2(x)f(x)dx$ の値を求めよ．

(九州大 2006) (m20064713)

0.800 正の実数 $p>0$ に対して，定積分 $f_n(p)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+nx^p}\,dx\,,\quad n=1,2,\cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,f_n(2)$

(2) $0<\varepsilon<1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[\,0,\ \varepsilon\,]$ と $[\,\varepsilon,\ 1\,]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0<f_n(p)<\varepsilon+\frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(p)=0$ であることを示せ.

(九州大 2007) (m20074705)

0.801 (1) $n=0,1,2$ に対して，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ.

$$\int_1^\infty \frac{x^n}{x^2+1}dx$$

(九州大 2007) (m20074711)

0.802 $a>0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2=a^2x$ を考える.

(1) 上の曲線の概形をかけ.

(2) 上の曲線を $x=0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ.

(九州大 2008) (m20084710)

0.803 (1) 区間 $I=(0,1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x)=e^{-x^2}$ に対して $f(g(x))=x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

(九州大 2008) (m20084717)

0.804 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq t\leq 1$ に対して，等式 $\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a,b,c を定めよ．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ．

(3) 変数変換 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)\sin x}$ の値を求めよ．

(九州大 2008) (m20084718)

0.805 次の定積分を計算せよ．

(1) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos^4 x\,dx$

(2) $2^4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 x\,dx$

(九州大 2009) (m20094705)

0.806 $f(x)$, $g(x)$ を以下の関数とするとき，各問いに答えよ．

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$g(x)=1-x^2$$

(1) 曲線 $f(x)$, $g(x)$ および直線 $x=1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(2) (1) の領域の周囲の長さ L を求めよ．

(九州大 2009) (m20094706)

0.807 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし，次の条件を満たすとする．

- C は y 軸上の点 $(0,a)$ $(a>0)$ を通る．
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられ，第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられる．

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ，第二象限内では $x=a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し，C の概形を描け．

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ．

(九州大 2009) (m20094712)

0.808 図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある. この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす. このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）. 棒の左端 P から距離 $t\ (0 < t < 1)$ だけ離れた棒上の点を R とする.

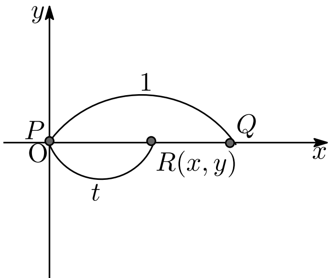


図 1

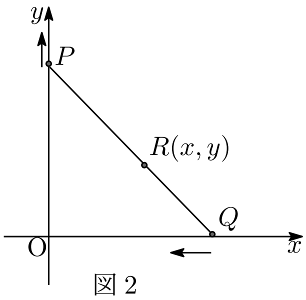


図 2

(1) 点 P が原点 O から点 $(0, 1)$ まで移動するとき, 点 R はどのような軌跡を描くか. 点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め, この軌跡の図形の名前を記せ.

(2) (1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

(3) (2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104702)

0.809 $x \neq 0$ に対して,

$$f(x) = -\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ は, $y = \tan x$ の逆関数である.

(1) $x \neq 0$ で

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[f(x)\Big]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010)　　(m20104707)

0.810 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104709)

0.811 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104710)

0.812 次の各問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.813 アステロイド $C\ :\ x^{2/3}+y^{2/3}=1$ に対し，各問いに答えよ.

(1) 曲線 C 上の点 (x,y) に対し，$x=\cos^3 t$ のとき，y を t を用いて表せ.

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ.

(九州大 2011)　　(m20114702)

0.814 直交座標を (x,y)，極座標を (r,θ) とするとき，曲線 $C\ :\ r=2(1+\cos\theta)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸，y 軸との交点の直交座標を求めて，曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r \leqq 2(1+\cos\theta)$, $y \geqq 0$, $y \leqq -\dfrac{1}{2}x+2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.815 関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\quad(-\infty<x<\infty)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の値域を求めよ.

(2) 定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ．ただし，$a=\dfrac{1}{4}\log 2$, $b=\dfrac{1}{4}\log 3$ とする.

(九州大 2012)　　(m20124706)

0.816 定積分 $I=\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$ の値を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144706)

0.817 $a \geqq 1$ とする．以下の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}\quad(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ $L(a)$ を求めよ.

(2) $a \geqq 1$ における $L(a)$ の最小値を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144707)

0.818 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ, xy 平面上にグラフをかけ. ただし, $e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.819　a は $a \geqq 0$ なる定数とする. $0 < x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する.　$f(x) = x^a \log x$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 < x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ. さらに, $f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には, それらを求めよ.

(3) 次の積分(広義積分)を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015)　　(m20154708)

0.820　a, b は $a > 1$, $b > 0$ なる定数とする. $x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する.　$f(x) = a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の積分(広義積分)を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$

(3) 次の積分(広義積分)を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty a^{-x} \cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.821　(1) 「部分分数への分解」を用いて, 任意の自然数 n に対して次の関数 $f(x)$ の n 次(n 階)導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ. ただし, $x \neq 3$, $x \neq -1$ とする.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

(2) 次の積分を求めよ.　$\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3 - 6x^2 - 16x - 5}{x^2 - 2x - 3} dx$

(九州大 2017)　　(m20174703)

0.822　$x \geqq 1$ において, 関数 $f(x)$ を次の式で定義する.

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき, 次の積分を求めよ.

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ. ただし, e は自然対数の底, π は円周率である.

(九州大 2018)　　(m20184707)

0.823　区間 $(0, \infty)$ 上の関数　$f(x) = e^{-(\log x)^2}$　について以下の問いに答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べグラフの概形を描け.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(九州大 2019) (m20194705)

0.824 (1) a を $a \neq 0$ なる実数とするとき，次の定積分を求めよ．ただし，逆正接関数 : Arctan x が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい． $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a}dx$

(2) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-2x+4}$

(九州大 2019) (m20194711)

0.825 次の定積分および広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(九州大 2021) (m20214707)

0.826 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する．

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$G_n = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+e^x}dx & for\ \ n=1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{n-1}}{1+\exp(x^n)}dx & for\ \ n=2,3,4,\cdots \end{cases}$$

(1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ．ただし積分定数を C とせよ．

(2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ．

(3) 一般の正の整数 n について，定積分 G_n を求めよ．

(九州大 2022) (m20224706)

0.827 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{|\,t-x\,|}\,dt$ について，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大・最小値を求めよ．

(九州芸術工科大 1999) (m19994802)

0.828 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　(m20004802)

0.829 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |2-x-x^2|dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int x\log x dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ．

(4) $F(x) = \displaystyle\int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき，$F'(x)$ を求めよ．

（九州芸術工科大 2000）　(m20004803)

0.830 $y=\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数（逆正接関数）を $y=\tan^{-1}x$ と書く．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $y=\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(2) $y=\tan^{-1}x$ の不定積分を部分積分法を用いて求めよ．

(九州芸術工科大 2001)　(m20014802)

0.831 (1) $x^n\log x$ を積分せよ．ただし，log は自然対数．

(2) $I_1 = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx,\quad I_2 = \int e^{ax}\cos bx dx$ を求めよ．

(3) 次を証明せよ．　$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

（九州芸術工科大 2001）　(m20014803)

0.832 (1) 次の関数 $F(x)$ を x で微分せよ．　$F(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$

(2) 次を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$

(九州芸術工科大 2003)　(m20034802)

0.833 積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は広義積分である. これを計算せよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054802)

0.834 (1) $F(x) = \displaystyle\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$ のとき $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $\sin(\pi-x)=\sin x$ を利用して
$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054807)

0.835 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-4x^2}$　(2) $\displaystyle\int e^x\sin 2x dx$　(3) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

（佐賀大 1999）　(m19994903)

0.836 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin(3x+3)dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+3}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$

(4) $\displaystyle\int x\log x dx$　(5) $\displaystyle\int e^x \sin 2x dx$

（佐賀大 2000）　(m20004904)

0.837 以下の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \sin(2x+1)dx$　(2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

(4) $\displaystyle\iint e^{(3x+2)}dxdx$　(5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

（佐賀大 2001）　(m20014903)

0.838 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(佐賀大 2003)　(m20034908)

0.839 $y=ax^2$ $(a>0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上に点 $P(x_p, y_p)$ がある．また，点 P の接線と x 軸との交点を点 A とする．

(1) 点 P を中心点として x 軸に接する円を描く．この円に対して，原点 $(0,0)$ を通る接線 $(y=kx)$ を求めよ．

(2) 交点 A の x 座標値を求めよ．

(3) $y=ax^2$，点 P の接線，x 軸で囲まれる面積 S を求めよ．

(4) 点 P と x 軸の両方に接する円の中心点 $Q(x_q, y_q)$ の座標値 x_q を求めよ．

(佐賀大 2003)　(m20034909)

0.840 二次曲線 $y=ax^2+b$ と直線 $x=-1$, $x=1$ および $y=0$ とで囲まれる部分を面 D とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．ただし，a, b は定数であり，$a>0$, $b \geqq 0$ とする．

(1) 面 D の部分に斜線を施して図示しなさい．

(2) 二次曲線の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分を，曲線が x 軸に接するまで y 軸と平行に移動したとき，この曲線の移動部分がつくる面の面積 S を求めなさい．

(3) 面 D を y 軸を中心に回転させたときの回転体の体積 V_y，および x 軸を中心に回転させたときの体積 V_x を求めなさい．ただし，$a=b=1$ とする．

(4) $b=0$ のとき，$V_y=V_x$ が成り立つ a の値を求めなさい．

(佐賀大 2003)　(m20034910)

0.841 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ が収束することを示せ．

(佐賀大 2003)　(m20034911)

0.842 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+x}dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2003)　(m20034912)

0.843 置換積分法を用いて，次の定積分を計算せよ．ただし，逆三角関数 $\tan^{-1} x = \mathrm{arctan} x$ について，$(\tan^{-1} x)' = 1/(1+x^2)$ となることに注意する．

(1) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx$

(佐賀大 2003)　(m20034913)

0.844 以下の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $1/(9x^2-4)$ (2) $1/(4x^2+1)$

(2) $x\cos(3x-1)$ (4) $\sin^2(3x+2)$

(佐賀大 2003) (m20034914)

0.845 直線上を時刻 t における速度が $v=\sin 2\pi t$ で与えられる点 P が動く. $t=0$ から $t=5$ までに点 P が移動する距離を求めよ. また実際に動いた道のりを求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034915)

0.846 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x^4e^{3x}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (3) $\displaystyle\int 2^x dx$ (4) $\displaystyle\int_1^e 4x\log x dx$

(佐賀大 2004) (m20044908)

0.847 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2004) (m20044909)

0.848 次の不定積分を求めなさい. ただし, $\exp(z)$ は $\exp(z)=e^z$ を意味する.

(1) $\displaystyle\int(3x^2+5x+2)dx$

(2) $\displaystyle\int 2/(1-2x)dx$

(3) $\displaystyle\int x\ \exp(-x^2)dx$

(佐賀大 2004) (m20044910)

0.849 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$ $\left(\text{ヒント : }\tan\frac{x}{2}=t\text{ とおく}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ (m,n : 0 以上の整数)

(佐賀大 2004) (m20044911)

0.850 $\displaystyle I=\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ.

(佐賀大 2004) (m20044912)

0.851 次の定積分を求めよ, a は正の定数である.

(1) $\displaystyle\int_1^2 dx\ \log x$ (2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-ax^2}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}dx\ \frac{\sin x}{x}$

(佐賀大 2005) (m20054910)

0.852 $\displaystyle\int_0^1 x\log x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005) (m20054914)

0.853 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(3x^2+\frac{1}{x})\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int 10^x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\log x\,dx$ (5) $\displaystyle\int x\sin(2x+1)\,dx$ (6) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$

(佐賀大 2005) (m20054922)

0.854 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする.　いま曲線が極座標 $r=f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta=\theta_1$ および $\theta=\theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

(2) 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の囲む面積を求めよ. ただし $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について, その二乗和の平方根を考慮することにより $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ の境界線の全長を求めよ. ただし $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054925)

0.855 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054931)

0.856 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y=-\log|\cos x|$, $\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054932)

0.857 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(\log x)^2dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1(\log x)^2dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1(\log x)^2dx$ の値を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064901)

0.858 次の積分を求めよ.　$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

(佐賀大 2006)　　(m20064909)

0.859 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064915)

0.860 以下の関数の不定積分を求めなさい. ただし, 記号 exp は $\exp(x)=e^x$ を意味する.

(1) x^2+4x+1　(2) $\cos(2x)$　(3) $4x\exp(x^2)$　(4) $1/(x^2-9)$　(5) $x\ln x$

(佐賀大 2006)　　(m20064926)

0.861 一つの質点が x 軸上を加速度 a で運動する. 時刻 t における加速度が $a=2\pi\cos 2\pi t$ で与えられるとき, 時刻 t における点の位置 x を求めよ. ただし, $t=0$ における位置および速度は 0 とする.

(佐賀大 2006)　　(m20064928)

0.862 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int(3x+2)\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$　($t=\sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2006)　　(m20064937)

0.863 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ を $z=2$ で切り取ったとき，$z \geq 2$ の部分の体積を求めよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064943)

0.864 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int x^{-3/7}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(4) $\displaystyle\int 2x \cdot \log x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

(佐賀大 2007)　　(m20074903)

0.865 $y=x^2-1$ と $y=-2x+2$ に囲まれた部分の面積を求めなさい．

(佐賀大 2007)　　(m20074904)

0.866 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定数 $a>0$ に対して，定積分 $I_a=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を部分積分法で求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074911)

0.867 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$　　(2) $e^{-x}\cos^2 x$

(佐賀大 2007)　　(m20074917)

0.868 次の不定積分を求めよ．但し，積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(佐賀大 2007)　　(m20074924)

0.869 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ を x 軸の周りで回転させてできる体積 V を求めよ．ただし，a, b は，正の定数である．

(佐賀大 2007)　　(m20074925)

0.870 次の不定積分を行え．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$

(佐賀大 2008)　　(m20084901)

0.871 a, b を実数とし，次の問いに答えよ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin x+b\cos x)dx=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\sin x\right)dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi}(a\sin x+b\cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009)　　(m20094901)

0.872 $0<a<b$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $[a,b]$ で連続な実関数 $f(x)$, $g(x)$ について以下の不等式を証明せよ．

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009)　　(m20094902)

0.873　$f(x) = -\dfrac{2\tan^{-1}x}{x^3}$ とおく．ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数である．

(1) $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{\tan^{-1}x}{x^2} + \frac{1}{x} + \tan^{-1}x + C$ を示せ．ただし，C は積分定数である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094907)

0.874　(1) 導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x = 3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094910)

0.875　次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(2x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(佐賀大 2009)　　(m20094916)

0.876　不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$　（a, b は定数）を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094922)

0.877　(1) 次の関数を積分しなさい．

(a) $\dfrac{1}{16x^2-9}$

(b) $\dfrac{1}{(5x+7)^5}$

(2) 次の関数を置換積分法で積分しなさい．

$-\tan x$

(3) 次の定積分を求めなさい．

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

(佐賀大 2009)　　(m20094931)

0.878　曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と両軸座標で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(佐賀大 2009)　　(m20094932)

0.879　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

(佐賀大 2010)　　(m20104903)

0.880 積分に関する, 以下の問いに答えよ. ただし, $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数とする.

(1) $\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1} x\right)' = 2\sqrt{1-x^2}$ を示せ.

(2) $f(x) = x^2 \sin^{-1} x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\,\sin^{-1} x\,dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{1/2} x\,\sin^{-1} x\,dx$ を計算せよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104910)

0.881 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$

(佐賀大 2010)　　(m20104914)

0.882 次の不定積分を求めよ. ただし積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int (x+4)\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx \qquad$ ($t=\sin x$ と置いて考えよ)

(佐賀大 2010)　　(m20104920)

0.883 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x+1/x)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int xe^x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(佐賀大 2010)　　(m20104924)

0.884 次の曲線と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

$y = -x^2+3x$

(佐賀大 2010)　　(m20104926)

0.885 次の不定積分または定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \left(2x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sec^2 x dx \quad (\sec^2 x = 1/\cos^2 x)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{7/2} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x)\,dx$

(佐賀大 2011)　　(m20114903)

0.886 $\displaystyle\int 2x\sin x\,\cos x\,dx$ を求めよ.

(佐賀大 2011)　　(m20114906)

0.887 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　ただし，$a>0$ とする．

(佐賀大 2011)　　(m20114907)

0.888　次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{3x+5}{x^2+4x+3}\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int \left(x^3 e^{-x^2}\right)dx$　　(3) $\displaystyle\int (\sin 2x\ \cos 3x)\ dx$

(佐賀大 2011)　　(m20114911)

0.889　(1) $t=\sin^{-1}x$ とおいて，置換積分法で不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{(\sin^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124902)

0.890　次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int (\log x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(3-x)(3-2x)}dx$

(佐賀大 2012)　　(m20124908)

0.891　次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x^2-1}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(\pi x)\,dx$

(佐賀大 2012)　　(m20124912)

0.892　曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれる領域の面積が πab で与えられることを定積分を用いて示せ．

(佐賀大 2013)　　(m20134902)

0.893　次の定積分を求めよ; ただし，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数である．また，(2) は $t=\cos x$ とする置換積分法を用いよ．

(1) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sin^{-1}x\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin}{2-\sin^2 x}\ dx$

(佐賀大 2013)　　(m20134912)

0.894　次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^{1/3}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+2}dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\sin x dx$　　(5) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$

(佐賀大 2013)　　(m20134925)

0.895　次の図形の面積を求めなさい．

(1) $y=2x^2$ と $y=2x+4$ で囲まれた部分

(2) $y=(4-x)\sqrt{x}$ と x 軸で囲まれた部分

(佐賀大 2013)　　(m20134927)

0.896 次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数は C とする．

(1) $\displaystyle\int e^{ax}dx \quad (a \neq 0)$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}dx \quad (a \neq 0)$

(佐賀大 2014) (m20144903)

0.897 次の $\nu(t)$ で表される正弦波交流

$$\nu(t) = V_m \sin \omega t$$

の実効値 $|V|$

$$|V| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \nu(t)^2 dt}$$

を求めよ．ここで $\omega T = 2\pi$ とする．

(佐賀大 2014) (m20144904)

0.898 (1) 曲線 $xy = 3$ と直線 $x + y = 4$ の交点の座標をすべて求めよ．

(2) 曲線 $xy = 3$ と直線 $x + y = 4$ で囲まれる図形を，x 軸まわりに回転した回転体の体積 V_x と y 軸まわりに回転した回転体の体積 V_y を求めよ．

(佐賀大 2014) (m20144910)

0.899 $n \geq 1$ について $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\log x)^n dx$ とおく．ただし，$\log x$ は自然対数とする．

(1) 部分積分法で I_1 を求めよ．

(2) 部分積分法で I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ．

(3) I_2，I_3 の値を求めよ．

(佐賀大 2014) (m20144914)

0.900 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ について，以下の積分を計算せよ．ただし，$\lambda > 0$，$x > 0$ である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 f(x)dx$

(佐賀大 2015) (m20154902)

0.901 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ (2) $\displaystyle\int x \log_e x dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}$ (4) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$

(佐賀大 2015) (m20154906)

0.902 次の関数について答えよ． $f(x) = x - 1 - \log x \quad (x > 0)$

(1) 関数の増減，凹凸，極値などを調べ，グラフの概形を描け．

(2) 極値をとる点の回りでテイラー展開をし，ゼロでない最低次の項を求めよ．

(3) 次の広義の積分を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(佐賀大 2015) (m20154910)

0.903 関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$ を満たす係数 A, B, C, D を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154916)

0.904 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154919)

0.905 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x^5-3x^2+2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164908)

0.906 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-6}{(x-1)^2(x+1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164912)

0.907 次の積分をせよ. ただし, $\lambda > 0$ である.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164922)

0.908 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \log\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr)dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\sin x dx$　　(4) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

(佐賀大 2016)　　(m20164932)

0.909 次の定積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \bigl(1+\sin^2 x\bigr)\cos x\ dx$

(佐賀大 2017)　　(m20174901)

0.910 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき, 円周上にある一点 P の軌跡に着目する. 円板の回転角を θ とし, $\theta = 0$ のとき, 点 P は原点に位置したとする.

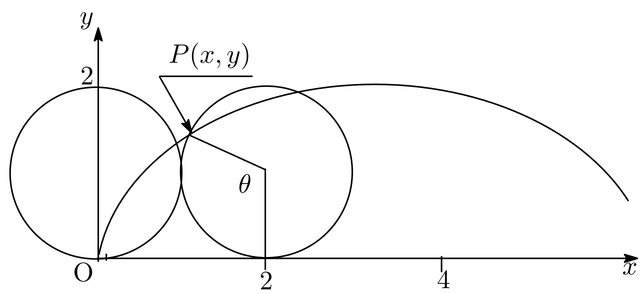
(1) 回転角が θ で与えられるとき, 点 P の x 座標と y 座標を求めよ.

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの, x 座標と y 座標の変化量を求めよ.

(3) また, このときの, 点 P が移動した弧の長さを求めよ.

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの, 点 P が移動した弧の長さを求めよ.

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの, 点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.911 次の不定積分を求めなさい.

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$　(2) $y = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$　(3) $y = e^x$　(4) $y = x\sqrt{x^2+1}$

(佐賀大 2017)　(m20174913)

0.912 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数である.

(1) この広義積分が収束することを示せ.

(2) $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示せ.

(佐賀大 2017)　(m20174918)

0.913 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

(佐賀大 2018)　(m20184910)

0.914 次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である.

(1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$　(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_1^e x\log x dx$　(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(佐賀大 2018)　(m20184917)

0.915 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int e^{-2x+2}dx$　(3) $\displaystyle\int (2x-5)^4 dx$　(4) $\displaystyle\int xe^x dx$

(佐賀大 2018)　(m20184922)

0.916 つぎの関係を示せ.

(1) n が正の奇数 $n = 1, 3, 5, \cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) n が正の偶数 $n = 2, 4, 6, \cdots$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ここで !! は 1 つ飛ばしの階乗を表す．たとえば $4!! = 4\cdot 2 = 8$, $5!! = 5\cdot 3\cdot 1 = 15$ である.

(佐賀大 2018)　(m20184927)

0.917 次の不定積分を求めなさい．ただし 積分定数を C としなさい.

(1) $x^3 - 3x + 2$　(2) $\dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$　(3) e^x　(4) $\dfrac{1}{1-x}$

(佐賀大 2021)　(m20214908)

0.918 次の積分をせよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \sin 2xe^{-x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \cos 2xe^{-x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

(佐賀大 2021)　(m20214912)

0.919 次の積分を求めよ．ただし，log は自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\,dx$

(佐賀大 2021)　(m20214916)

0.920 つぎの積分をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$

(佐賀大 2022)　(m20224902)

0.921 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x^3-4x^2+2x-5)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(1+3x)^3}\,dx$

(佐賀大 2022)　(m20224907)

0.922 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ を求めよ．

(佐賀大 2022)　(m20224915)

0.923 次の不定積分を求めなさい．積分定数を C とする．必要な計算過程も記すこと．

(1) $\displaystyle\int(\cos x+3x^3)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$　　(4) $\displaystyle\int x^3\log(x)dx$

(佐賀大 2022)　(m20224921)

0.924 次の設問 (1),(2) に答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x}\sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ．

$$y=\frac{1}{x+1}\quad,\qquad x\text{ 軸},\quad y\text{ 軸},\quad \text{直線 } x=2$$

（長崎大 2004）　(m20045004)

0.925 方程式 $y=x^2+2x+2$ について, 以下の問に答えよ．

(1) この方程式を示すグラフを図示せよ．

(2) このグラフを x 軸方向に $+3$, y 軸方向に -2 移動したグラフの方程式を示せ．

(3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれる領域を x 軸について回転させた時の体積を求めよ．

（長崎大 2004）　(m20045005)

0.926 x を $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ．

(1) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

を導きなさい．

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n = 1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n = 3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005)　　(m20055001)

0.927 $a > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J = \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2+x^2} dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005)　　(m20055003)

0.928 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \log x dx$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055011)

0.929 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

(長崎大 2005)　　(m20055016)

0.930 次の関数を x について（不定）積分せよ.

$\sin x + x^2$

(長崎大 2005)　　(m20055022)

0.931 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.

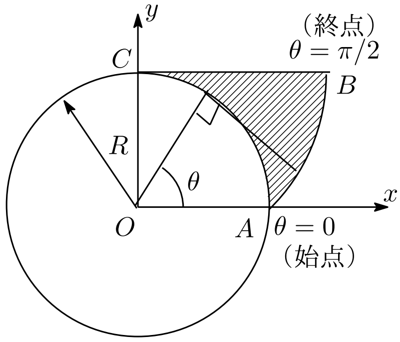
(1) 図のように $\theta=0$ の位置からはじめて $\theta=\pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか．

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ．

(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる．

$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ．



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.932 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq y\leq 1\}$ を計算せよ．

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t\end{cases}$,　$\left(0\leq t\leq \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.933 次の関数を x について不定積分せよ．

$$I=\int x\log x\,dx$$

(長崎大 2007)　　(m20075009)

0.934 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ．ただし，a, b は定数である．　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(長崎大 2007)　　(m20075011)

0.935 3 次曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ のグラフを描き，これと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085016)

0.936 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n=\int_0^n e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めなさい.

(長崎大 2009)　　(m20095003)

0.937 (1) $y = x^3 - 3x$ のグラフを描き, x 軸との交点を示せ.

(2) $y = x^3 - 3x$ の極値の位置と極値を示せ.

(3) 変曲点の位置を示せ.

(4) $f = \int_0^z y dx$ のグラフを, (f, z) 座標に描け.

(5) $y = x^3 - 3x$ の導関数を求めそのグラフを描け

(長崎大 2009)　　(m20095006)

0.938 次の定積分を求めよ.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-9)^3}\,dx \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$$

(長崎大 2010)　　(m20105004)

0.939 次の関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ に関する以下の設問に答えよ.

(1) y のグラフを描きたい. x 軸との交点を求めよ.

(2) y のグラフの概形を図示せよ. (特に極大値と極小値を求めなくてよい)

(3) $(0 \leq x \leq 2)$ の区間の面積を求めよ.

(4) 上で概形を図示した y のグラフと, $y = ax$ との交点について考える. a の値により交わる点が変化する. a の値と交点の数との関係について説明せよ.

(長崎大 2010)　　(m20105010)

0.940 (1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,, \qquad x \text{ 軸}\,, \qquad \text{直線 } x = 2$$

(長崎大 2010)　　(m20105013)

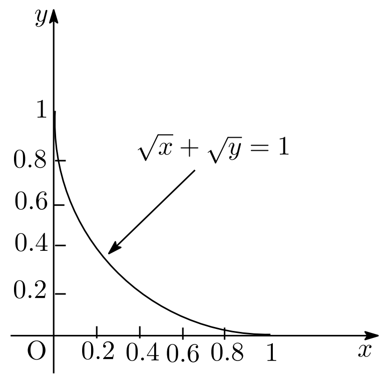
0.941 $\sinh(1-2x)$ を不定積分せよ.

(長崎大 2011)　　(m20115002)

0.942 右図に示すような曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ について, 以下の問題に答えよ.

(1) この曲線と直線 $x = 0$, $y = 0$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ.



(長崎大 2011)　　(m20115005)

0.943 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

(長崎大 2011)　　(m20115010)

0.944 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$

(長崎大 2011)　　(m20115019)

0.945 $y=x^2-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$ と $y=-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$ で示される二つの曲線がある.

(1) 二つの曲線の交点の座標を求めよ.

(2) 二つの曲線で囲まれた領域の面積を求めよ.

(大分大 2002)　　(m20025103)

0.946 次の積分を求めなさい.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad (a>0)$$

（大分大 2004）　　(m20045101)

0.947 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)dx$$

(大分大 2005)　　(m20055102)

0.948 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+6}{x^2-3x-4}dx$$

(大分大 2005)　　(m20055103)

0.949 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ.　$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

(大分大 2008)　　(m20085101)

0.950 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(大分大 2009)　　(m20095101)

0.951 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x=t-\sin t \\ y=-1+\cos t \end{cases} \qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009)　　(m20095104)

0.952 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t < +\infty)$$

で与えられている.

(1) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leqq\ t \leqq\ 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010)　　(m20105101)

0.953 次の不定積分を求めよ.

$$\int (2x-3)^{10} dx$$

(大分大 2011)　　(m20115101)

0.954 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$　　(1) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

(大分大 2011)　　(m20115104)

0.955 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sin(2x+1) dx$$

(大分大 2012)　　(m20125101)

0.956 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x} dx$$

(大分大 2012)　　(m20125104)

0.957 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x(x+1)} dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$　　(3) $\displaystyle\int xe^{2x} dx$

(大分大 2014)　　(m20145103)

0.958 $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ の値を求めよ.

（熊本大 2001）　　(m20015203)

0.959 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}} dr$ を求めよ.

(熊本大 2006)　　(m20065202)

0.960 ガンマ関数は, $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} dx \quad (s>0)$ で定義される. 次の問いに答えなさい.

(1) 部分積分法を用いて, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示しなさい. ただし, n は負でない整数である.

(熊本大 2008)　　(m20085202)

0.961 ２つの放物線 $\alpha y^2 = \beta^2 x$ および $\beta x^2 = \alpha^2 y$ に関して次の問いに答えなさい. ただし, α と β はともに正の定数である.

(1) 共有点を求め，グラフを描きなさい．

(2) ２つの放物線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095203)

0.962 関数 $y = e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 2010)　　(m20105203)

0.963 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x \quad (x \geqq 0)$ において，次の問に答えなさい．

(1) a と b を実数とし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい．

(2) n を自然数とし，区間 $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい．

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.964 $S = \displaystyle\int_0^{\pi} (x - a\cos x - b)^2 dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx,\ \ B = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ をそれぞれ求めなさい．

(2) S を最小とする a と b を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155202)

0.965 (1) t の有理関数 $\dfrac{1}{(t+1)(t+5)}$ を部分分数に分解しなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+5)}dx$ の値を計算しなさい．

(熊本大 2016)　　(m20165202)

0.966 関数 $f(x) = \dfrac{2}{x+2},\ \ g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の微分および不定積分を求めなさい．

(2) 合成関数 $h(x) = f(x)g(x)$ の不定積分を求めなさい．

(3) 合成関数 $k(x) = \dfrac{f(g(x))}{x}$ の極値，変曲点を示し，そのグラフの概形を描きなさい．

(熊本大 2017)　　(m20175202)

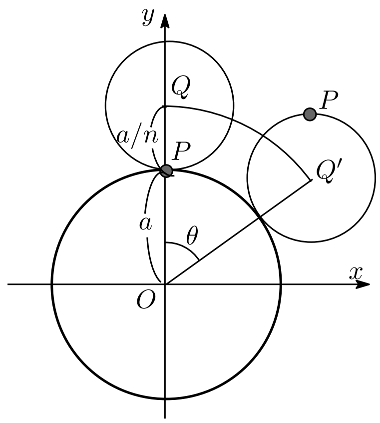
0.967 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}dx$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225201)

0.968 下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.969　置換積分法を用いて，次の不定積分を求めよ．ただし，$a \neq 0$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　$(x = a\sin\theta$ とおく$)$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$　　$(x = a\sin\theta$ とおく$)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$　　$\left(t = \tan\frac{x}{2}\right.$ とおく$\left.\right)$

（鹿児島大 2001）　　(m20015407)

0.970　次の関数を積分せよ（不定積分を求めよ）．

(1) $7x^2 + 5x - 1$　　(2) $e^x - 5/x$

（鹿児島大 2001）　　(m20015408)

0.971　定積分　$\displaystyle\int_0^2 |e^x - e|dx$　を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015409)

0.972　積分 $\displaystyle\int t^2 \cos t dt$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015410)

0.973　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置くとき，積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$ を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015411)

0.974　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx$　$(n \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$　$(a \neq b)$

(3) $\displaystyle\int \sin^2 dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2005)　　(m20055401)

0.975　次の微分, 積分を求めなさい．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(2) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sin^3 x\right)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^4-2\sin x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055405)

0.976 曲線 $f(x)=-2x^2+3x+5$ と直線 $g(x)=-x+c$　(c は定数) が第 1 象限で接しているとき定数 c の値を求め, さらに $f(x),\ g(x)$ と縦軸 y で囲まれる面積 S_1 および $f(x),\ g(x)$ と横軸 x で囲まれる面積 S_2 を求めなさい.

(鹿児島大 2005)　　(m20055406)

0.977 次の定積分を実施しなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(4x^3-6x^2+1\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$

(鹿児島大 2005)　　(m20055410)

0.978 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{(x+c)dx}{(x+a)(x+b)}\quad(a\neq b)$　　(3) $\displaystyle\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(-a<x<a,\ a>0)$

(鹿児島大 2006)　　(m20065401)

0.979 2 曲線 $y=(x-2)^2$ と $y=-x^2+4x-2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2006)　　(m20065406)

0.980 高さ h, 底面の半径 r, 母線の長さ l の円錐の体積 V 及び表面積 S を求めよ.

(鹿児島大 2006)　　(m20065409)

0.981 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}$

(鹿児島大 2006)　　(m20065412)

0.982 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos x dx$

(鹿児島大 2006)　　(m20065414)

0.983 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^2+2x+3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}\quad (a>0)$

(鹿児島大 2007) (m20075401)

0.984 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のグラフを描きなさい．また，この曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2007) (m20075407)

0.985 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{3(x+2)^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^2(\theta)\,d\theta$

(鹿児島大 2007) (m20075410)

0.986 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+6x+3}$ を求めよ. (鹿児島大 2007) (m20075414)

0.987 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad (a>0,\ -a<x<a)$

(鹿児島大 2008) (m20085401)

0.988 次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|\right)$ (2) $\displaystyle\int e^x\cdot\sin x\,dx$

(鹿児島大 2008) (m20085405)

0.989 (1) 曲線 $y=x^2$ 上の点 $P(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい．また，そのグラフも描きなさい.

(2) 曲線 $y=x^2$ と (1) で求めた点 P での接線と x 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2008) (m20085406)

0.990 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle I=\int_0^1 xe^x\,dx$ (2) $\displaystyle I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(鹿児島大 2008) (m20085410)

0.991 (1) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を x で微分せよ. (2) x^x を x で微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ. (4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2008) (m20085414)

0.992 微積分に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan(x))$ (b) $\dfrac{d}{dx}(\sin 2x\cdot\tan 2x)$

(2) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-x-3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$

(鹿児島大 2009)　　(m20095401)

0.993　次の微分・積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan\dfrac{1}{x}\right)$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095405)

0.994　曲線：$y = a\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$（a：定数）と x軸によって囲まれた部分を　x軸のまわりに　1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095408)

0.995　(1)　x^x を x で微分せよ.

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$ を求めよ.

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095410)

0.996　(1)　$\displaystyle\int (2x^2-1/x)^2 dx$ を求めなさい.

(2)　$\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい.

(3)　楕円（長軸 a, 短軸 b, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095412)

0.997　微積分に関する以下の問に答えよ.

(1)　次の微分を計算し，簡単な式で表せ.

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin(\tan x)$　　(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\log 2x \cdot \tan x^2\right)$

(2)　次の不定積分を求めよ．ただし，a, b は任意定数とする.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+(a-b)x-ab}\,dx$　　(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(鹿児島大 2009)　　(m20095413)

0.998　次の微分・定積分を求めなさい.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\log|\cos x|)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} dx$

(鹿児島大 2009)　　(m20095417)

0.999　曲線：$y = x^2$ と直線：$y = 2x$ によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095420)

0.1000　次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+5x+6}dx$

(鹿児島大 2010)　　(m20105402)

0.1001　次の定積分を求めなさい.

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

(鹿児島大 2010)　　(m20105407)

0.1002 曲線 : $y = x^2$ と, 曲線 : $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ とによって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105410)

0.1003 以下の問に答えよ.

(1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ について，以下の部分積分法の公式
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
が成り立つことを示せ.

(2) 上記の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \log x\, dx$ を求めよ.

(3) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とする．このとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ であることを示せ.

(4) 前問の結果を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ を求めよ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115401)

0.1004 次の不定積分を求めなさい.
$$\int x(x-2)^9 dx$$

(鹿児島大 2011)　　(m20115410)

0.1005 曲線 : $y = 2x^2$ と，その曲線上の点 $P(1, 2)$ での接線と，x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2011)　　(m20115413)

0.1006 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\, dx$

(鹿児島大 2012)　　(m20125402)

0.1007 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-2}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$

(鹿児島大 2012)　　(m20125407)

0.1008 次の不定積分を求めなさい.
$$\int x^2 \cos x\, dx$$

(鹿児島大 2012)　　(m20125412)

0.1009 曲線 : $y = x^3$ を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転面と，$y = 1$, $y = 8$ を通って y 軸に垂直な 2 平面とで囲まれた領域の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125415)

0.1010 次の定積分を求めなさい.
$$\int_0^2 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\, dx$$

(鹿児島大 2012)　　(m20125417)

0.1011 曲線 : $y = x^2$ と曲線 : $x = y^2$ で囲まれる領域の面積を求めなさい．また，その領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125420)

0.1012 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $y = \cos x \quad (-\pi/2 \leqq \ x \leqq \pi/2)$ と x 軸で囲まれた面積を求めなさい.

(2) t の関数 $F(t) = \int_0^{10} z(x)\cos(t-x)dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{\int_0^{10} z(x)\cos x dx\right\}^2 + \left\{\int_0^{10} z(x)\sin x dx\right\}^2}$ となることを示しなさい. ただし, $z(x)$ は, x に関する任意の関数である.

(鹿児島大 2012) (m20125422)

0.1013 以下の問題に答えなさい.

(1) 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ を用いて $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ が成立することを示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ を, $x = a\sin t$ とおくことにより計算しなさい. ただし, $a > 0$ とする.

(鹿児島大 2012) (m20125426)

0.1014 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

(鹿児島大 2013) (m20135402)

0.1015 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1 + x + x\sqrt{x} + x^3}{x^2}\, dx$$

(鹿児島大 2013) (m20135407)

0.1016 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) この曲線と, 直線 $x = 0$, 直線 $x = 1$ 及び x 軸とで囲まれた領域の面積 S を求めなさい.

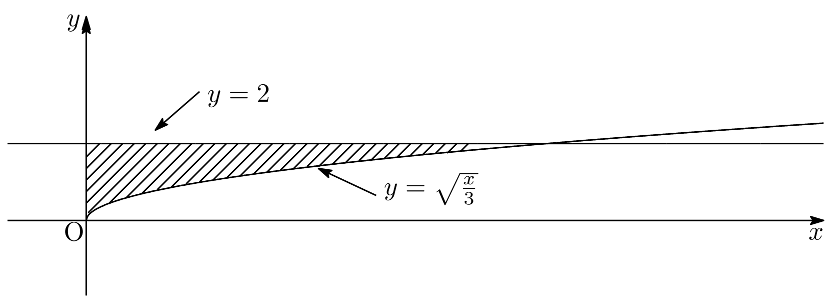
(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲のこの曲線の長さ ℓ を求めなさい.

(鹿児島大 2013) (m20135410)

0.1017 直線 $y = 2$ と曲線 $y = \sqrt{x/3}$ と y 軸によって囲まれる図形（下図の斜線部）の面積を求めたい. 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) 斜線部の面積を求めるための手順を簡潔に説明せよ.

(2) 斜線部の面積を求めよ.



(鹿児島大 2014) (m20145401)

0.1018 関数 $(\sin ax)(\sin bx)$ を x で積分しなさい. ただし, a, b は $a \neq b$ で, 0 でない定数とする.

(鹿児島大 2014) (m20145405)

0.1019 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{3x^2+4x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$

(鹿児島大 2014)　(m20145407)

0.1020 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1}{x^2-6x+5}dx$$

(鹿児島大 2014)　(m20145412)

0.1021 曲線 $y = \sin^{-1} x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = \dfrac{\pi}{2}x$ について，以下の問いに答えなさい． ただし，$\sin^{-1}$ はアークサインとする.

(1) 上の曲線と直線が囲む領域を図示しなさい.

(2) 曲線と直線の囲む領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2014)　(m20145415)

0.1022 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(鹿児島大 2015)　(m20155402)

0.1023 次の不定積分を求めなさい.

$$\int x^2 \log x dx$$

(鹿児島大 2015)　(m20155407)

0.1024 曲線 $y^2 = -x$ と $\dfrac{y^2}{2} = -x - a$ とについて，以下の問いに答えなさい．ただし，$a > 0$ であり，かつ，a は実数であるとする.

(1) 手書きでグラフを描きなさい.

(2) 2 本の曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2015)　(m20155411)

0.1025 次の定積分を求めなさい．ただし，$m.n$ は自然数とする.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$$

(鹿児島大 2015)　(m20155418)

0.1026 以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx$

(鹿児島大 2016)　(m20165402)

0.1027 次の不定積分を求めなさい.　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-21}$

(鹿児島大 2016)　(m20165407)

0.1028 曲線 $y = |x^2 - 2|$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 手書きでグラフを描きなさい.

(2) 曲線と直線 $y = 3$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2016)　　(m20165410)

0.1029 以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

(鹿児島大 2017)　　(m20175402)

0.1030 次の不定積分を求めなさい．　$\displaystyle\int x\sin x dx$

(鹿児島大 2017)　　(m20175407)

0.1031 曲線 $x=y^2+1$ と直線 $x=-y+3$ とについて以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線のグラフを描きなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2017)　　(m20175411)

0.1032 x 軸上を運動する質点 Q を考える．質点 Q の加速度 a は，任意の時刻 t において $a=\dfrac{t}{t^2+3t+2}$ と表されるものとする．この時，時刻 t における質点 Q の速度 v を表す式を求めよ．なお，$t \geqq 0$ であり，$t=0$ のときの速度 v は 0 とする．

(鹿児島大 2017)　　(m20175413)

0.1033 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 (9x^2+4x)\log x dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185402)

0.1034 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185407)

0.1035 曲線 $y=\sin^2 x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で描きなさい．

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において，曲線と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185411)

0.1036 $\displaystyle\int \log x dx$ $(x>0)$ の不定積分を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185413)

0.1037 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4+x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(5x+4)^3}dx$

(鹿児島大 2018)　　(m20185421)

0.1038 以下の不定積分を求めなさい．

$$\int x\cos 2x dx$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185426)

0.1039 曲線 $y=\sin x\cos x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲でかきなさい.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において，曲線と直線 $y = \dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185429)

0.1040 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x) = 4x^2 \cdot \cos 2x$$

(鹿児島大 2018) (m20185432)

0.1041 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である.

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 \{t \cdot f(t)\}\, dt$$

(鹿児島大 2018) (m20185437)

0.1042 以下の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\, dx$

(鹿児島大 2021) (m20215402)

0.1043 不定積分 $\displaystyle\int x \sin 2x \cos 2x\, dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215407)

0.1044 曲線 $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$ と直線 $y = 4$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線と直線を 1 つのグラフに描きなさい.

(2) 曲線と直線で囲まれる部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215411)

0.1045 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$ の定積分を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215414)

0.1046 以下の不定積分，定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

(鹿児島大 2022) (m20225402)

0.1047 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+1}{x+2}\, dx$ を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225407)

0.1048 c を正の実数とする． xy 平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{1}{c}x^2$ と $y^2 = cx$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を 1 つのグラフに描きなさい.

(2) 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225410)

0.1049 $y = \sin x \ (0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055501)

0.1050 次の不定積分を求めよ.

$$\int x\sin x dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055504)

0.1051 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ (2) $\int \frac{1}{\cos x}dx$

(室蘭工業大 2005) (m20055509)

0.1052 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2e^x+\cos x\right)dx$$

(室蘭工業大 2005) (m20055514)

0.1053 次の不定積分を求めなさい. $\int x(ax^2+1)^n dx$ (ただし, $a\neq 0$, $n\neq -1$)

(室蘭工業大 2006) (m20065506)

0.1054 次の定積分を計算せよ. $\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}dx$

(室蘭工業大 2006) (m20065511)

0.1055 以下の定積分の値を求めよ.

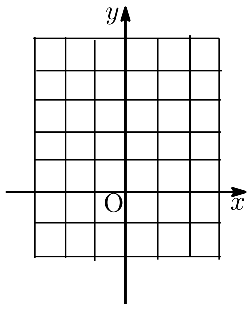
(1) $\int_0^1 x^n(1-x)dx$ (2) $\int_a^b (x-a)(b-x)dx$

(室蘭工業大 2006) (m20065514)

0.1056 次の定積分の値 I を求めなさい. $I=\int_0^t e^x\sin\omega x\, dx$ $(t>0)$

(室蘭工業大 2008) (m20085505)

0.1057 定積分 $\int_0^a |x^2-1|\, dx$, $(a>0)$ を以下の手順で求めよ.



(1) 関数 $f(x)=|x^2-1|$ の, $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ における値を求めよ.

$f(-2)=$ $f(-1)=$ $f(0)=$ $f(1)=$ $f(2)=$

(2) 関数 $f(x)=|x^2-1|$ を $-2\leq x\leq 2$ の範囲で, 右のグラフにかけ.

$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の時の $f(x)$ の値がわかるように書く事.

(3) 積分 $\int_0^1 |x^2-1|\, dx$ を求めよ.

(4) $a>1$ のときの定積分の値を求めよ.

(室蘭工業大 2008) (m20085512)

0.1058 次の微分, 不定積分を計算せよ.

(1) $\frac{d}{dx}\left(xe^{-2x}\right)$

(2) $\int (\log x)^2\, dx$

(3) $\int \frac{x(x^2+12)}{x^4-16}\, dx$

(室蘭工業大 2009) (m20095501)

0.1059 (1) 次の不定積分を計算せよ．

$$\int 2x\ \ln(x)\,dx$$

(2) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$$

(室蘭工業大 2010) (m20105506)

0.1060 次の不定積分を計算せよ．

$$\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,dx$$

(室蘭工業大 2011) (m20115506)

0.1061 置換積分法を用いて，関数 $f(x)=x^3\sqrt{1+x^2}$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2011) (m20115513)

0.1062 次の不定積分を求めよ．

$$\int x^2\cos x dx$$

(室蘭工業大 2014) (m20145503)

0.1063 $y=\cos x \quad \left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(室蘭工業大 2015) (m20155503)

0.1064 不定積分 $I=\displaystyle\int e^{-px}\cos(kx)dx$ を求めよ．ただし，p と k はゼロでない定数とする．

(室蘭工業大 2015) (m20155506)

0.1065 以下の不定積分を求めよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+x-2}$ (2) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(室蘭工業大 2015) (m20155511)

0.1066 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016) (m20165501)

0.1067 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx$ を計算しなさい．

(室蘭工業大 2016) (m20165505)

0.1068 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

$$\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$$

(室蘭工業大 2016) (m20165510)

0.1069 以下の不定積分を計算せよ．なお，積分定数は省略してよい．

(1) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(4x)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

(室蘭工業大 2017) (m20175508)

0.1070 次の不定積分を求めよ．

$$\int (\log x)^2 dx$$

(室蘭工業大 2018) (m20185502)

0.1071 積分に関する以下の問いに答えよ．ただし，不定積分では積分定数は省略してよい．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-8}dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 4x dx$ を計算せよ．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185508)

0.1072 つぎの微分，積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\dfrac{d(e^{-2x^2})}{dx}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215501)

0.1073 次の不定積分を求めよ．

$$\int x\cos(4x)dx$$

(室蘭工業大 2021)　　(m20215506)

0.1074 次の不定積分を求めよ．

$\displaystyle\int xe^x dx$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225502)

0.1075 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$ を計算しなさい．積分定数は省略してよい．

(室蘭工業大 2022)　　(m20225505)

0.1076 つぎの積分を計算せよ．なお，不定積分では積分定数を省略してよい．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225509)

0.1077 次の各問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ．

(2) $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2005)　　(m20055601)

0.1078 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$ を求めよ．　　(2) $f(x)=e^{\sin^{-1}x}$ を微分せよ．

(3) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2006)　　(m20065601)

0.1079 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2007)　　(m20075602)

0.1080 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{\sin x}$ を求めよ．　(2) $f(x)=\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ を微分せよ．　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ．

(岡山県立大 2008)　　(m20085601)

0.1081 $I_n = \displaystyle\int (\log x)^n dx \quad (n \geqq 0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) I_0 , I_1 および I_2 を計算せよ．

(2) (1) を参考にして，$n \geqq 1$ における I_n と I_{n-1} の関係を類推し，それが正しいことを示せ．

(香川大 2006) (m20065701)

0.1082 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ (3) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(香川大 2010) (m20105701)

0.1083 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$ (3) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(香川大 2011) (m20115701)

0.1084 以下の問いに答えよ．

(1) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ を示せ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ とおくとき，$n > 1$ に対して I_n と I_{n-2} の関係式を求めよ．

(香川大 2012) (m20125701)

0.1085 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx$$

(香川大 2013) (m20135701)

0.1086 下記の関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は 0 でない定数であるとする．

$$f(x) = \frac{2}{4a^2 - x^2}$$

(1) 関数 $f(x)$ を部分分数に分解した式を導出せよ．

(2) 関数 $f(x)$ の不定積分を導出せよ．

(香川大 2014) (m20145702)

0.1087 $y = x^2$, $y = 2x + 8$ で囲まれる閉領域のうち，$x \geqq 2$ の領域の面積を求めよ．

(香川大 2019) (m20195703)

0.1088 次の積分を求めよ．

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 2}{x^2 + 2x}\, dx$$

(香川大 2021) (m20215703)

0.1089 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ．

(1) 次の値を求めよ．

(i) $\sin^{-1}(-1)$, (ii) $\cos^{-1} 0$, (iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.1090 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

(2) $n \geqq 3$ の整数 n に対し,　$\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$　の関係を用いて, 部分積分を行うことにより, 次の等式が成立することを示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

(3) 設問 (1) および (2) の結果を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

(島根大 2005)　　(m20055814)

0.1091 f を微分可能な関数とする．このとき，x の関数　$G(x) = \displaystyle\int_a^x (x-u)\{f'(u)+f(u)\}du$　を微分せよ．

(島根大 2006)　　(m20065808)

0.1092 次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

(島根大 2006)　　(m20065809)

0.1093 $e^x \cos x$ の不定積分を求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065816)

0.1094 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.　　(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ.

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ.　　(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を証明せよ.

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である.

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.1095 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.1096 次の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\, x$ は $\tan x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ の逆関数とする.

(1) $\mathrm{Arctan}\,x$ の導関数と不定積分を求めよ.

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

とおくとき, $I(n+1)$ を $I(n)$ を用いて表し, さらに $I(3)$ を計算せよ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を計算せよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\,x)^2\,dx$ を計算せよ.

(島根大 2012)　　(m20125807)

0.1097 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n\ dx\ (n \geqq\ 0)$ とおく. $t = \arcsin x$ とおいて I_n を t の積分で表わせ.

(2) $n \geqq\ 2$ のとき, I_n と I_{n-2} の関係を求めよ. さらに, I_2 を求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145804)

0.1098 平面座標系 $(o - xy)$ において, 曲線 C を $y = x^2 - 4x + 3$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 $x_1,\ x_2\ \ (x_1 > x_2)$ を求めよ.

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(3) 曲線 C の概形を描き, 頂点及び x 軸との交点を図示せよ.

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ.

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.1099 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める. 次の問いに答えよ.

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ.

(3) $0 < x \leq 1$ を満たす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ. さらに $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき, 次の等式が成り立つかどうかを調べよ.

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.1100 以下の設問に答えよ. ただし, $T\ (T > 0)$ および ϕ は定数である.

(1) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

(2) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ.　$\displaystyle\int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017) (m20175801)

0.1101 xy 座標平面において放物線を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y=x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2>x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018) (m20185801)

0.1102 $f(x)=-\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

(3) $-\pi/2<x<\pi/2$ のとき，$f(x)\geq x^2/2$ であることを示せ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ の，$0\leq x\leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ．

(島根大 2018) (m20185806)

0.1103 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y=x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である．残りの 2 つの点を $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ とするとき，点 $A(x_1,y_1)$ および点 $B(x_2,y_2)$ の座標を求めよ．ただし．$x_1<x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある．この 2 本の接線を ℓ_1，ℓ_2 とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3,y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4,y_4)$ とする．ただし，$x_3<x_4$ とする．このとき，接線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式および接点 $Q(x_3,y_3)$，$R(x_4,y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5,y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019) (m20195801)

0.1104 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x>0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0)\leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019) (m20195806)

0.1105 $\mathrm{Sin}^{-1}x\ \ (-1<x<1)$ を $\sin x$ の逆関数とし，$f(x)=\sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ.

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=0$$

(2) $y=f(x)$ に対して，$(1-x^2)^2y'''+p(x)y'+q(x)y=0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$, $q(x)$ を 1 組求めよ.

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ.

(4) 次の定積分を計算せよ.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.1106 次の関数を積分せよ.

(1) $x\bigl(x^2+1\bigr)^{\alpha}$

(2) $\bigl(\cos x\bigr)^{\alpha}\sin x$

(首都大 2003)　　(m20035905)

0.1107 デカルト座標系 (x,y) で，$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ.

(1) 極座標系 (r,θ) での関係式に変換せよ $(r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta=y/x)$.

(2) グラフの概形を図示せよ.

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ.

(首都大 2004)　　(m20045905)

0.1108 次の関数の不定積分を求めよ.

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

(首都大 2005)　　(m20055906)

0.1109 次の関数を積分せよ.

(1) $x\log x$　　(2) $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(x-2)^2}$

(首都大 2007)　　(m20075904)

0.1110 次の不定積分を計算せよ.　$\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}\,dx$　　(首都大 2008)　　(m20085905)

0.1111 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\sin 2x\,\sin 4x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^3e^{2x}\,dx$

(首都大 2010)　　(m20105907)

0.1112 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

(首都大 2011)　　(m20115907)

0.1113 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\bigl(\log x\bigr)^2}{x}\,dx$

(首都大 2012)　　(m20125907)

0.1114 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\, dx$

(首都大 2013) (m20135907)

0.1115 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$ (2) $\displaystyle\int x\, (\log x)^2\, dx$

(首都大 2014) (m20145907)

0.1116 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x \log x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015) (m20155908)

0.1117 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int 8x\left(4x^2-1\right)^{10} dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$

(首都大 2016) (m20165908)

0.1118 無限積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{-1}{x(1+x^2)} dx$ を求めなさい.

(首都大 2017) (m20175904)

0.1119 次の不定積分を求めなさい. $\displaystyle f(x) = \int \cos^2 x\ dx$

(首都大 2017) (m20175905)

0.1120 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^5 x\ dx$

(首都大 2018) (m20185908)

0.1121 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx$

(首都大 2019) (m20195907)

0.1122 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\ dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{x} \log x\ dx$

(東京都立大 2020) (m20205907)

0.1123 $-\infty < x < \infty$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $-\infty < x < \infty$ に対して, $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$ を求めよ.

(2) $-\infty < x < \infty$ に対して, $\displaystyle g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)f(x-t) dt$ を求めよ.

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して, (2) で求めた $g(x)$ を用いて $\displaystyle G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t) dt$ を求めよ.

(東京都立大 2020) (m20205911)

0.1124 0 以上の整数 n に対し，C_n，S_n を

$$C_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$$
$$S_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) C_0，S_0 を求めよ．

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ．

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ．

(4) 前問 (1)〜(3) の答えを用いて S_3 を求めよ．

(東京都立大 2021) (m20215904)

0.1125 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 I を求めよ．なお，解は $\tan\dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022) (m20225905)

0.1126 $x^2 + (y-2)^2 = k^2$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし $0 < k < 2$ とする．

(東京都立大 2022) (m20225906)

0.1127 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) と点 $(x+dx, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.1128 曲線 $C: y=f(x)$ に沿って $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる．

$$L(C)=\int_0^a \sqrt{1+\Big(f'(x)\Big)^2}\,dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする．

$$C\ :\ y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq x \leqq a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2013)　　(m20136001)

0.1129 パラメータ t で表された曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2)$$

の長さ $L(C)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146001)

0.1130 $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.1131 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-3x}dx$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216003)

0.1132 以下の問に答えよ．

(1) $x>0$ における次の関数の極値とそのときの x の値を求めよ．

$$f(x)=e^{-ax}-e^{-bx} \qquad \text{ただし，} b>a>0 \text{ とする．}$$

(2) 次の定積分の大きさを求めよ。

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

(宇都宮大 2004)　　(m20046103)

0.1133 関数 $F_n(x)=x^ne^{-x}$ について，以下の問に答えよ．ただし，$n \geq 2$ とする．

(1) $x \geq 0$ において $F_n(x)$ が最大・最小となる x の値をそれぞれ求めよ．

(2) $x>0$ において $F_n(x)$ の変曲点となる x の値を求めよ．

(3) $x \geq 0$ における $y=F_n(x)$ のグラフの概形を描け．

(4) $n=3$ の場合について，

$$I_n=\int_0^\infty F_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056102)

0.1134 (1) 次の関数を微分せよ．ただし $a>0$ とする．

$$y=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\ \right|$$

(2) m と n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \ dx$$

(宇都宮大 2005)　　(m20056103)

0.1135 以下の定積分および不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x+2)(x-1)dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}dx$

(宇都宮大 2007)　　(m20076101)

0.1136 (1) 3 次曲線 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ のグラフの概形を描け.

(2) 設問 (1) の曲線と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

(宇都宮大 2007)　　(m20076103)

0.1137 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}dx$ を求めよ.

(宇都宮大 2007)　　(m20076109)

0.1138 区間 $[0, 1]$ を 4 等分し，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の近似値を台形公式を使って小数第 3 位まで求めよ.

(宇都宮大 2007)　　(m20076113)

0.1139 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx$ を求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. ただし, a は正の定数である.　$\displaystyle\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\ dx$

(宇都宮大 2010)　　(m20106106)

0.1140 $\displaystyle\int e^{mx}dx$ を求めよ．なお，m は定数である.

(宇都宮大 2014)　　(m20146105)

0.1141 平面上の，曲線 $y^2 = x - 1$，および，直線 $y = x - 3$，について下の問いに答えよ.

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ．計算経過も記入せよ.

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015)　　(m20156103)

0.1142 方程式 $(x^2-1)^2 + y^2 = 1$ の表す曲線 C について，下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，円周率は π と表記し，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2016)　　(m20166103)

0.1143 曲線 $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y = x$，$x = 1$，$x = 4$ で囲まれた図形を A とする.
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019)　　(m20196103)

0.1144　x–y 平面上の曲線 $4x^2+y^2=4$ に囲まれた図形を x 軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい.

(宇都宮大 2019)　　(m20196106)

0.1145　実数 $a>1$ として下の問いに答えよ.

(1)　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ.

(2)　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ.

(3)　(1) と (2) で求めた $V(a)$, $S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206103)

0.1146　$\displaystyle\int_0^a e^{x^2}\cdot x^3\,dx$ のとき，実数 a を求めよ.

(工学院大 2003)　　(m20036203)

0.1147　(1)　曲線 $y=\cos 2\pi x$ に $x=\dfrac{1}{6}$ で接する直線の傾き（勾配）を求めなさい.（図 2 参照）

(2)　x,y 軸と曲線 $y=\cos 2\pi x$，直線 $x=\dfrac{1}{6}$ に囲まれる図形の面積を求めよ.

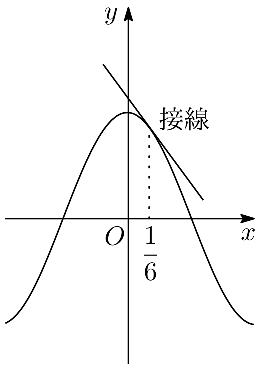


図 2:曲線 $y=\cos 2\pi x$

(工学院大 2003)　　(m20036208)

0.1148　$\displaystyle\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx$　を解け.

(工学院大 2004)　　(m20046203)

0.1149　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　を解け.

(工学院大 2005)　　(m20056204)

0.1150　次の不定積分を求めよ.

(1)　$y=\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

(2)　$y=\displaystyle\int\frac{2x^2+3x+4}{x}\,dx$

(工学院大 2005)　　(m20056210)

0.1151　$I=\displaystyle\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx(a>0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}(t+a)\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ.

(2) $I=a\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}dt$ となることを示せ. (3) I の値を求めよ.

(はこだて未来大 2007) (m20076304)

0.1152 a を正定数，n を自然数とし，定積分 $I_n(a)=\displaystyle\int_0^a xe^{-nx}\,dx$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) $I_n(a)$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(a)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2008) (m20086304)

0.1153 次式で与えられる関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(2-x)} \qquad (1\leqq x\leqq 2)$$

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2009) (m20096304)

0.1154 自然数 n に対して

$$I(n)=\int_1^e \frac{1}{x^n}\log x\,dx$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分積分法を用いて, $f(2)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I(n)$ を求めよ.

(はこだて未来大 2010) (m20106304)

0.1155 曲線 $y=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) この曲線と 2 つの直線 $x=1,\ y=0$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) この曲線の長さを求めよ.

(はこだて未来大 2011) (m20116304)

0.1156 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

(はこだて未来大 2012) (m20126303)

0.1157 n を自然数とし，定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}dx$ を考える．以下の問いに答えよ.

(1) I_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2I_n$ を求めよ.

(はこだて未来大 2013) (m20136306)

0.1158 $f(x)=e^x\sin x$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146303)

0.1159 t を媒介変数として，方程式

$$x = \cos^3 t\,, \qquad y = \sin^3 t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 D の接線のうち，接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 D の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146304)

0.1160 (1) $0 < x < \pi$ において，$\displaystyle\int (\sin x)\log(\sin x)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156303)

0.1161 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ を求めよ．　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186302)

0.1162 $-1 \leq x \leq 1$ において，$f(x) = x\,\mathrm{Cos}^{-1}x$ とする．ここで，$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は逆余弦関数で，$\arccos x$ と書くこともある．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}x}{x^2}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216302)

0.1163 $\displaystyle\int_0^1 x\tanh(1-x^2)dx$ を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226303)

0.1164 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2-x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x \sin x}$　$(\tan x = t$ とおく$)$

(東京海洋大 2007)　　(m20076404)

0.1165 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2008)　　(m20086403)

0.1166 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x-1}{x^2+1}\,dx$ を計算せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^x \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2009) (m20096403)

0.1167 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\, dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3 \log x\, dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2010) (m20106403)

0.1168 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x}{x^3+x^2+x+1}\, dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116403)

0.1169 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-3}{x^4-1}\, dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\log x}}\, dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012) (m20126404)

0.1170 次の関数の不定積分を求めなさい.

(1) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-1}{x}$　　(2) $f(x) = x^3 \sin x$

(東京海洋大 2012) (m20126408)

0.1171 次の定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2+2x+1)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$

(東京海洋大 2012) (m20126409)

0.1172 次の曲線および直線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

$$y = \sqrt{x}\,, \qquad x = 4\,, \qquad y = 0$$

(東京海洋大 2012) (m20126410)

0.1173 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3+4x^2-2)dx$　　(2) $\displaystyle\int (\cos 2x + \sin 3x)dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\cos(1+x^2)dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(東京海洋大 2013) (m20136402)

0.1174 下記の定積分, または不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{2x-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int 2^{3x}dx$　　(3) $\displaystyle\int x\cos x dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$

(東京海洋大 2014) (m20146402)

0.1175 直線 $y = e$ と $y = (1-e)x+1$ および曲線 $y = e^x$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(東京海洋大 2014) (m20146403)

0.1176 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$

(東京海洋大 2015)　　(m20156402)

0.1177 (1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $x=2,\ x=5,\ y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(2) 曲線 $y=\cos x$ の $-\dfrac{3}{4}\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi$ の範囲と，直線 $y=0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(東京海洋大 2015)　　(m20156403)

0.1178 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\ dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$　　(4) $\displaystyle\int x(2x+1)^2dx$　　(5) $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx$

(東京海洋大 2016)　　(m20166402)

0.1179 次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

$$y=\sqrt{2x}\,,\quad x=9\,,\quad y=0$$

(1) この図形の面積を求めなさい．

(2) この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166403)

0.1180 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2-2}$ を計算せよ．

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016)　　(m20166407)

0.1181 次の定積分，または不定積分を求めなさい．

(1)$\displaystyle\int(7x^3+3x^2+2x+5)dx$　　(2)$\displaystyle\int x^5\log x\ dx$　　(3)$\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2+3x-10}$　　(4)$\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(東京海洋大 2017)　　(m20176402)

0.1182 次の不定積分，または定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int(2\cos^2 x-1)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 3x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-28}$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

(東京海洋大 2021)　　(m20216402)

0.1183 次の式で表されるる 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ について次の問いに答えよ．ただし，a は負の定数である．

$f(x)=x^3-5x$　　　$g(x)=-x^2+a$

(1) $a=-4$ の時，2 曲線のグラフの概形を描け．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を微分せよ，

(3) 2 曲線が接する時の接点の x 座標と a の値を求めよ．

(4) 2 曲線が接する時，接点とは別に存在する交点の x 座標を求めよ．

(5) 2 曲線が接する時，この 2 曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216403)

0.1184 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{\sin(\pi \log x)}{x}dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216408)

0.1185 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ を計算せよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\left(3\sqrt{x}\,\right)dx$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2022) (m20226403)

0.1186 次の不定積分，または定積分を求めなさい.

1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 2) $\displaystyle\int 2\sin x\cos x dx$

3) $\displaystyle\int_1^4 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log x\, dx$

(東京海洋大 2022) (m20226407)

0.1187 直線 $y=e$ と $y=x+1$ および曲線 $y=e^{-x}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(東京海洋大 2022) (m20226408)

0.1188 次の不定積分を求めなさい.

$$\int xe^x dx$$

(和歌山大 2014) (m20146505)

0.1189 関数 $f(x)=x^n\log x$ を積分しなさい．ただし, n は整数である.

(和歌山大 2016) (m20166502)

0.1190 a が 0 でない実数のとき，次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

なお，解答に際して,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

を用いてよい.

(和歌山大 2017) (m20176501)

0.1191 (1) 次式を満たす a, b, c の値を求めなさい.

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(2) 次の不定積分を求めなさい.

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

(和歌山大 2017) (m20176502)

0.1192 次の定積分を求めなさい．ただし，e は自然対数の基底である．

$$\int_0^2 x^2 e^x dx$$

なお，解答に際して，$f'(x)$，$g'(x)$ を，それぞれ，$f(x)$，$g(x)$ の一階導関数とするとき，

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

を用いてよい．

(和歌山大 2017)　　(m20176503)

0.1193 (1) $y = x^x \quad (x > 0)$ のとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = 2x - \dfrac{x^2}{2}$ と直線 $y = \dfrac{x}{2} - 2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(琉球大 2009)　　(m20096801)

0.1194 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ を計算せよ．　(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を計算せよ．

(東京工科大 2010)　　(m20106905)

0.1195 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，条件 $f(0) = -3$，$f(1) = -\dfrac{9}{4}$，$f'(2) = 10$，$f'(3) = 20$ をすべて満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ．

(3) $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(富山県立大 2017)　　(m20177103)