[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：4 級数

0.1 $e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(北海道大 2017)　(m20170101)

0.2 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　(m20180104)

0.3 次式をマクローリン展開したとき，x の 0，1，2，n 次の項を求めなさい．

$$\sqrt{e^{3x}}$$

(北海道大 2020)　(m20200104)

0.4 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ．

(北見工業大 2017)　(m20170201)

0.5 関数 $f(x)=\cos x$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ．

(北見工業大 2019)　(m20190207)

0.6 関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ．

(北見工業大 2022)　(m20220201)

0.7 次の和を求めよ． $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(岩手大 1998)　(m19980307)

0.8 次の問いに答えよ．

(1) $f(\theta)=\sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ．

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0<\theta<1$）

(2) $f(i\theta)=e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ．ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta)=\cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を証明せよ．

(4) $f(t)=5+0.4\sin\omega t+0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t+0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ．

$$f(t)=\sum_{n=-3}^{3}C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t)=0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ．

$$f(t)=A\sin(2\omega t+\phi)$$

（岩手大 2004）　(m20040303)

0.9 $y=\log(1-x)$, $-1<x\leq 1$ の原点 $x=0$ における 3 次の Taylor 展開

$$\log(1-x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+R_4x^4$$

の係数 $a_0,\cdots,a_3$ を求めよ．R_4 は求めなくてもよい．

(秋田大 2001)　(m20010405)

0.10 次の関数の原点におけるテイラー展開を，２次の項まで示しなさい．　$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(秋田大 2001)　(m20010406)

0.11 関数 $f(x)=\log(1+x)$ を $x=0$ で Taylor(テイラー) 展開したとき，

$f(x)=$“３次式”+剰余項 $(-1<x\leqq 1)$ となる３次式を求めよ．剰余項は求めなくてよい．

(秋田大 2005)　(m20050404)

0.12 関数 $f(x)=e^x$ の原点におけるテーラー展開の式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+R_4$$

について以下の設問 (1),(2) に答えよ．ただし，a_0，a_1，a_2，a_3 は定数で，R_4 は剰余項である．

(1) 定数 a_0，a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) 設問 (1) の結果を用いて，このテーラー展開の式から e の値の範囲を求めよ．ただし，$|R_4|<\dfrac{1}{6}$ を用いてよい．

(秋田大 2011)　(m20110404)

0.13 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x)$$

とおくとき，$|x|<1$ の範囲で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ となることを示せ．

(2) (1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x|<1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x|<\frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996)　(m19960501)

0.14 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第２次導関数を示す．

(1) 関数　$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y=\tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数　$F(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty<x<\infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y=F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　(m20030501)

0.15 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる．

$$f(x)\sim f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x = 0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad , \qquad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　　(m20040502)

0.16 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\sin x}$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ.

(東北大 2007)　　(m20070503)

0.17 $f(x) = \sin^2 x$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ.

(東北大 2008)　　(m20080506)

0.18 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090506)

0.19 関数 $f(x) = x^{1/5}$ のテーラー展開を用い，$30^{1/5}$ の小数展開を誤差 (剰余項 R_n) < 0.0001 の範囲で求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090507)

0.20 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011)　　(m20110506)

0.21 以下の問いに答えよ.

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 7, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ.

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(3) 次の条件を満たす c_2, c_3 および c_4 を求め，数列 $\{c_n\}$ を推定せよ．また，その推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ.

$$c_1 = 2, \qquad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(東北大 2014)　　(m20140503)

0.22 $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，$a_n \neq 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015)　　(m20150508)

0.23 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) において，「 $a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right| < \dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ.

(東北大 2016)　　(m20160508)

0.24 (1) 0 以上の整数 n に対して，

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170508)

0.25 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

0.26 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ.

(東北大 2018)　　(m20180509)

0.27 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき,

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left|b_n - 1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\left|f(x)\right|dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 $\alpha,\ \beta$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n = e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.28 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ.

(東北大 2019)　　(m20190508)

0.29 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0,\infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

と定める．I 上の関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$(*) \qquad f_0(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \{f(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \quad (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と帰納的に定める．以下の問いに答えよ.

(1) f の I における最大値を求めよ.

(2) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x)\{1 - f(x)\}^n$$

が成り立つことを示せ.

(4) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に I 上で一様収束することを示せ.

(東北大 2021) (m20210509)

0.30 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ ならば収束し，$p\leq 1$ ならば発散することを証明せよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970604)

0.31 (1) 次の級数の収束・発散を言え.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x=0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ.

(例) $\displaystyle\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots(\rho=0)$

(i) $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}$ (ii) e^x (iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990607)

0.32 (1) 関数 $\sin x$, $\sin^2 x$ および $x^2-\sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ．ただし，$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である.

(2) 必要なら上の計算を利用して，不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ を計算せよ.

（お茶の水女子大 2000） (m20000606)

0.33 (1) 次の展開式を簡単に示せ.

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

（お茶の水女子大 2000） (m20000607)

0.34 $\operatorname{Arctan} x$ は $\tan x$ の逆関数で，$x=0$ のとき値が 0 となるものを表すとする.

(1) $\operatorname{Arctan} x$ の原点を中心とする Taylor 展開を 5 次の項まで記せ.

(2) $x\operatorname{Arctan}(x^2)$ の原点を中心とする Taylor 展開を 11 次の項まで記せ.

（お茶の水女子大 2001） (m20010605)

0.35 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，log は自然対数であり，ln とも書く.

(1) $\log(1-x)$ (2) $\displaystyle\log\frac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003) (m20030605)

0.36 指数関数 $f(x)=e^x$ を考える.

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k+\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

となることを示せ.

(2) $\displaystyle R_n(x)=\int_0^x\frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt \quad (|x|<+\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a,b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ.

(お茶の水女子大 2003) (m20030606)

0.37 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2 級関数とする．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1 級関数とする．$h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.38 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，3 次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.39 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する．

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ , \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す．

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ．

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ．

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ．

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.40 実数列 $\{x_n\}$，$n = 0,1,\cdots$，を次の漸化式で定義する．

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0,1,\cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ．また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.41 (1) $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ.

(2) $\sin 1$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130607)

0.42 逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(a - x) = \frac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ.

(2) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$ を示せ.

(3) $\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ.

(4) $\tan^{-1} x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.43 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ (ただし, $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について, 以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x で微分せよ.

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(5) $y = f(x)$ として $y''(1 - x^2) = y'x$ がり立つことを示せ.

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.44 逆正接関数（$\tan x$ の逆関数）Arctan x の Taylor 展開をもとに, 以下のようにして $\frac{\pi}{4}$ の近似を与えよ. ただし, Arctan $0 = 0$ とする.

(1) $|x| < 1$ のとき

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

となることをもとに, $x = 0$ における Arctan x の Taylor 展開を求めよ.

(2) 上で求めた Taylor 展開の部分和に $x = 1$ を代入することで Arctan $1 = \frac{\pi}{4}$ を近似することを考える. 近似の誤差を 0.1 や 0.01 以下にするためには第何項までの和を考える必要があるかを論じよ. また, 誤差を 0.1 以下とする場合にはどのような近似値が得られるかを実際に述べよ.

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190604)

0.45 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する.

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで, $f(x)$ は何回でも微分可能であるとする. このとき, $g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.46 以下の各問いに答えよ. ただし, log はすべて自然対数とする.

(1) $f(x) = \log(1 - x)$ $(|x| < 1)$ のマクローリン展開を求めよ. ただし, 剰余項の評価はしなくてもよい.

(2) $0 < x < 1$ において $\dfrac{x}{x-1} < \log(1-x)$ であることを示せ.

(3) $\log 2019$ の値の 10 進小数第 2 位を四捨五入することにより小数第 1 位まで求めよ．ただし，必要ならば $\log 2 = 0.693147$ の近似値を用いてよい.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200610)

0.47 関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し, 0 でない最初の 3 項を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210606)

0.48 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it}, e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2nu) \tag{1}$$

が与えられたとき,

$$a_n = \frac{1}{2N+1} \tag{2}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）とすると,

$$f(u) = \frac{A}{B} \tag{3}$$

の形に変形することができる. A と B とを求めよ. 途中の計算式も示すこと.

(3) 関数

$$g(u) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\{(2n-1)u\} \tag{4}$$

が与えられている.

$$a_n = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）としたとき，関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか. できるだけ簡単な形で記せ. 途中の計算も示すこと.

(東京大 2002)　　(m20020703)

0.49 関数 $y(x)$ は, $x = 1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x = 1$ で極値をとり, $y^3 + 3xy^2 + x^3 y = 1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ の $x = 1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x = 1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005)　　(m20050702)

0.50 実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ となることを示せ.

(東京工業大 1997)　　(m19970802)

0.51 (1) 関数 $x\cos x$, $\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項まで Maclaurin 展開せよ.

(2) 次の極限を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$

(東京工業大 2001)　　(m20010801)

0.52 (1) 次の関数をマクローリン展開し，ゼロでない最初の 3 項を示せ.　$\tan^{-1} x$

(2) 次の級数の収束域を求めよ． $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{3x}{2\cdot 4}+\dfrac{4x^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots$

(東京工業大 2002) (m20020802)

0.53 関数 $\sqrt{1+x}\,\cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ．

(東京工業大 2008) (m20080801)

0.54 (1) 関数 $f(x)=x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(2) 関数 $g(x)=\log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x\sin x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{e^{x^2}-1}$

(電気通信大 2007) (m20071003)

0.55 次の関数について，0 でない最初の 4 項までマクローリン展開せよ．

$x\sin 2x$

(横浜国立大 2016) (m20161107)

0.56 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994) (m19941201)

0.57 (1) 次の等式を証明せよ．

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，n は自然数とする．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

(千葉大 1998) (m19981201)

0.58 級数 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots$ について次の設問に答えよ．

(1) 第 n 部分和 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+2)}$ を求めよ．

(2) S_n の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

(千葉大 1999) (m19991201)

0.59 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると，

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

となる．ただし，

$$f^{(n)}(a)=\left[\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい．

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし， i は虚数単位で， $i^2 = -1$ である．

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

（千葉大 2000） (m20001201)

0.60 (1) $x = 0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i = 0.1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

$\cos(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016) (m20161201)

0.61 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x \cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x \cos x} \right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}} \right)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0+0} (1 - \tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017) (m20171201)

0.62 テーラー展開を用い， $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ の関係があることを示せ．

（筑波大 2000） (m20001302)

0.63 $f(x) = \log(a^2 + x^2)$ のマクローリン展開の一般項を求め，収束半径を計算せよ．ただし，$a > 0$ とする．

（筑波大 2001） (m20011304)

0.64 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ を計算したい．誤差を 0.002 以下にするには，何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ．

(筑波大 2003) (m20031308)

0.65 $e^{kx} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ と表したときの a_n を求めなさい．

(筑波大 2003) (m20031309)

0.66 数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ は

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という漸化式によって生成される．k が十分大きな値になると， $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか．

(筑波大 2003) (m20031310)

0.67 $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2\cdot 1}x^2 + \dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$ 　　(式 1)

について, 次の問に答えなさい.

(1) 項別微分を行ない導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 微分方程式 $f(x) = f'(x)$ 満たす関数を $f(x) = \exp(x)$ と定義するとき (式 1) はこの定義を満足することを説明しなさい.

(3) 新しい関数 $ch(x)$, $sh(x)$ を

$$ch(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$
$$sh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

で定義するとき, $ch(x)$ および $sh(x)$ の間には

$$sh'(x) = ch(x)$$
$$ch'(x) = sh(x)$$
$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

なる関係があることを示しなさい.

（筑波大 2004）　　(m20041312)

0.68 $f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^\alpha$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.69 (1) $f(x) = \ln(1+x)$, $(-1 < x \leq 1)$ のテイラー展開を x^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）. $\ln x$ は x の自然対数を示す。

(2) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $(|x| < 1)$ のテイラー展開を x^n の項まで求めよ（剰余項は含まない）.

(3) $\ln 2$ を近似する場合，少ない数の展開項で誤差をより小さくするには，上記のテイラー展開の内、どちらを用いればよいか．理由を記して答えよ.

(筑波大 2006)　　(m20061316)

0.70 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ の値を求めよ.

ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）.

(筑波大 2007)　　(m20071335)

0.71 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

のように，定数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0) = a_0$，$f'(0) = a_1$，$f''(0) = 2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $f(x) = \dfrac{f(0)}{0!} + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.72 関数 $f(x) = (2e^x + a)^4$ が与えられている．$f(x)$ を x についてマクローリン展開（$x = 0$ の周りでのテイラー展開）をして x^2 の項まで求めよ．ただし，a は定数である．

(筑波大 2008)　　(m20081322)

0.73 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.74 関数 $f(x) = \sin 2x$ の $x = \pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ.

(1) $(x - \pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい.

(2) $\pi/2 < x < \pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5| < \dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ.

ただし，(1),(2) において $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開は，正の整数 n に対して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}$$

と表される．ここで，剰余項 R_{n+1} は，$a < p < x$ である p が存在して，

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される.

(筑波大 2011)　　(m20111314)

0.75 方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\right]\left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている.

ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x = 0$ のまわりでのベキ級数展開

$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である.

(1) $\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

(3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する.
このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.76 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (n は自然数）について以下の問いに答えよ.

(1) $\log(n+1) < S_n \leq 1 + \log n$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$ を示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121319)

0.77 実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは，標準的な論理式で書くと

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}\ \big(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqq\ n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\big) \qquad (*)$$

が成り立つということである．次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを，$(*)$ にならって理論式で書け.

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け．ただし，その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない.

(3) (2) の内容から，ある正の実数 ε が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ.

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ．また，実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ.

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに，実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら，f は連続であることを証明せよ．

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.78 関数 $f(x)$ が，$X = a$ の近傍で C^2 級の関数であり，$f''(a) \neq 0$ を満たすとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(a+h)$ に，Taylor の定理を適用して展開しなさい．条件下において，できるだけ高い次数の項まで展開すること．また，剰余項の表記には θ_1 $(0 < \theta_1 < 1)$ を用いること．

(2) $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$ において，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{2}$ となることを示しなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161306)

0.79 (1) 関数 $f(x) = e^x$ をマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!} + \frac{n-1}{2!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.80 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.81 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx} f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$, $n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.82 $f(x)=\log(1+\sin x)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)(x\to 0)$ を満たす $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．但し，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)-x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）．

(筑波大 2018)　　(m20181319)

0.83 $x+2y+z+e^{2z}-1=0$ から定まる陰関数 $z=f(x,y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が表す曲面上の点 $(x,y,z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x,y)$ の原点 $(x,y)=(0,0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.84 (1) $x>0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x)\equiv\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1)=n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u=-(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x=e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}\quad\left\{=\lim_{n\to\infty}(1+2^{-2}+3^{-3}+\cdots+n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x}=e^{(-x\log x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.85 $F(x,y) = xy\tan y + \pi\tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．
ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0 \qquad (x \in I), \qquad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (n \to \infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.86 実数 θ に対して　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$　とおく．

(1) 右辺の級数は　$|x| < 1$　で収束することを示せ．

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ．　　$\left[\text{ヒント}：\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002)　　(m20021401)

0.87 $\cos 46^\circ$ の近似値を有効数字 3 桁の範囲において求めなさい．ただし，$\dfrac{\pi}{180} = 0.01745\cdots$，$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(埼玉大 2003)　　(m20031405)

0.88 次の数列 $\{a_n\}$ は, ある有限の値に収束することを示せ.

$$a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

(埼玉大 2005)　　(m20051401)

0.89 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

すべての自然数 n に対して $a_n \geqq 0$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ である.

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0,\infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.90 (1) 関数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ．

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{i=1}^{\infty} {}_\alpha\mathrm{C}_i x^i \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_\alpha\mathrm{C}_i$ は次式で表される． ${}_\alpha\mathrm{C}_i = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \qquad (i \geq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ． $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007) (m20071401)

0.91 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq -1)$$

(2) 上式を利用して，次の式を示せ．

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x) \qquad (x>-1)$$

ただし, $R_n(x)=(-1)^n\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ とする．

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n\to\infty)$ を示せ．

(4) $-1<x<0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n\to\infty)$ を示せ．

(埼玉大 2007) (m20071410)

0.92 $\alpha>0$ とする． $x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において } \quad f_\alpha(x)=\frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ．

(1) $\alpha>1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ．

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ．

(埼玉大 2011) (m20111410)

0.93 (1) 関数 $x\cos x$，$\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ．

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\Rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)}-\frac{1}{3x\cos x}\right\}$ を求めよ．

(埼玉大 2018) (m20181404)

0.94 関数 $g(x)=xe^{-\frac{x}{2}}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$〜$\boxed{ク}$にあてはまる値を求めよ．

(1) $g(x)=0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ である．

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$である．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx = \boxed{オ}$ である．

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第3次までの項は

$$g(x) \approx \boxed{\text{カ}}\, x + \boxed{\text{キ}}\, x^2 + \boxed{\text{ク}}\, x^3$$

となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

である．

(図書館情報大 2002)　　(m20021607)

0.95 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(茨城大 1999)　　(m19991704)

0.96 集合 S を　$S = \left\{ a \;\middle|\; a = \dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は } 1 \text{ 以上の整数},\ p \text{ は } 1 \leq p < 10^k \text{である整数} \right\}$

と定義するとき，次の各問に答えよ．

(1) $a \in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ．

(2) S は無限集合であることを示せ．

(3) 任意の $a \in S$ に対して，$x_n \notin S$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ．

(茨城大 2001)　　(m20011703)

0.97 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.98 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 1$　$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$　$(n = 1, 2, \cdots)$　で定義する．次の各問に答えよ．

(1) ${a_n}^2 < 2$　$(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ．

(3) 数列 $\{{a_n}^2\}$ は収束することを示せ．また，その極限値を求めよ．

(茨城大 2006)　　(m20061705)

0.99 以下の関数に対して, $x = 0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい.

$$f(x) = \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(山梨大 2010)　　(m20101807)

0.100 関数 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111805)

0.101 (1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ.

$f(x) = (1 + x)^k$　(k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい.

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい.

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.102　$g(x)=x^2\sin x$ の $x=0$ の周りのテイラー展開を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191909)

0.103　関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ において,

$$f(x)=\log\cos x$$

で定義されているとする. このとき, 次に問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数である.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ. また, 剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.104　(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は収束することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k}$ は $a\in[0,1)$ のとき収束することを示せ.

(新潟大 1998)　　(m19982004)

0.105　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めるとともに, その値が極限値になることを証明せよ.

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\dfrac{10^n}{n!}$

(3) $\sqrt[n]{a}$,　(a は正の定数)

(新潟大 1999)　　(m19992002)

0.106　$y=\sin^2 x$ を $x=0$ のまわりでテーラー展開して, x の 4 次の項まで求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012003)

0.107　数列 $\{a_n\}$ に対して, $a_n\to\alpha\ \ (n\to\infty)$ の定義は,「任意の $\varepsilon>0$ に対してある番号 n_0 があって, $n\geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ」である.

$a_n\to\alpha\ \ (n\to\infty)$, $a_n\to\beta\ \ (n\to\infty)$ であるとき, $a_n+b_n\to\alpha+\beta\ \ (n\to\infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ. ただし, α,β は実数とする.

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.108　$a>0$ とする. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=a$ とし, $n\geqq 1$ に対して,　　$a_{n+1}=a+\dfrac{1}{a_n}$

と定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $a_1<a_3<a_4<a_2$ を示せ.

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調増加, 単調減少であることを示せ.

(3) $n \geqq 2$ に対して， $|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{1+a^2}|a_n - a_{n-1}|$ が成立することを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ.

(新潟大 2003) (m20032001)

0.109 次の級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \quad (a>0)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3^n}$

(新潟大 2005) (m20052001)

0.110 次の級数が収束するときはその和を求めよ．発散するときはその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006) (m20062001)

0.111 n を 2 以上の自然数とする．閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{-nx}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\ , \qquad g_n(x) = e^{-(n-1)x} - e^{-nx}$$

により定める．このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $f_n(x) \leqq g_n(x)$ が成立することを示せ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式 $g_n(x) \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立することを示せ.

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x^2)dx \leqq \frac{1}{n}$ が成立することを示せ.

(新潟大 2006) (m20062005)

0.112 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ここで，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は，指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である．この公式を使って，次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (2) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007) (m20072003)

0.113 関数 $F(x)$ は $\displaystyle F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ で与えられるものとする.

また, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることがわかっている.

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ. (2) $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ. (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a^2t^2}dt$ （a は正の定数とする） (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008) (m20082001)

0.114 等比数列 $\{a_n\}$ が $a_3 = \dfrac{4}{3}$ および $a_5 = \dfrac{16}{27}$ であるとき， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

(新潟大 2012) (m20122004)

0.115 次の関数のマクローリン展開を計算し，3 次の項まで示せ．

$$e^x + e^{-x}$$

(新潟大 2012) (m20122011)

0.116 次の各問いに答えよ．

(1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\lim_{n \to \infty} na^n = 0$ を示せ．

(2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して， 次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

(新潟大 2012) (m20122014)

0.117 $a_1 = e,\ a_{n+1} = \dfrac{e}{n+1} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定義される数列 a_n について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a_n を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(新潟大 2015) (m20152009)

0.118 等式 $\tan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で成り立つような定数 a_n のうち a_0 から a_5 までを求めよ．

(新潟大 2015) (m20152017)

0.119 三角関数に関する以下の問いに答えよ．

(1) e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ．

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを，問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ．

(3) 任意の正の整数 n について，次の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ．

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta \\
\sin(3\theta) &= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta
\end{aligned}$$

(新潟大 2016) (m20162010)

0.120 $f(x) = \sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ．解答は x の 5 次の項まで示せ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192001)

0.121　次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots$$

(長岡技科大 1992)　　(m19922102)

0.122　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}$ を求めよ.

(長岡技科大 2001)　　(m20012103)

0.123　(1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$ に対して， $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\cdots$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して， $g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の形で表せ.

(金沢大 1999)　　(m19992203)

0.124　(1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

の係数 a_0,a_1,a_2,a_3 を求めよ.

(2) $\sqrt{1-x}\fallingdotseq a_0+a_1x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c\sin^2\theta}\,d\theta\quad(0<c<1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ.

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.125　関数 $f(x)=\log(1+x)$, $x>-1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ.

$$\Bigl|\log 1.1-0.095\Bigr|<\frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002)　　(m20022201)

0.126　$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}<f(x)<1+x-\dfrac{x^2}{2!}\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ.

(2) (1) を利用して $\cos(0.1)+\sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052202)

0.127　(1) 関数 $\sin x$ を $x=0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい.

(2) (1) の結果を使い, 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

(3) 次の関数 $g(x)$ を $x=-\pi/2$ から $x=1$ まで定積分しなさい.

$$g(x)=\begin{cases}\cos^2 x & (x<0)\\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 0)\end{cases}$$

(金沢大 2005) (m20052208)

0.128 (1) 関数 e^{-x} にマクローリンの定理をあてはめた式を書け.

(2) 上を用いて, m を 2 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0<e^{-1}-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{(2m-1)!}\right)<\frac{1}{(2m)!}$$

が成立することを示せ.

(3) m を 3 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0<e^{-1}-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{(2m-1)!}\right)<\frac{1}{500}$$

が成立することを示せ.

(金沢大 2006) (m20062202)

0.129 $f(x)$ を $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(e^{-x}f(x))'=0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ．

(金沢大 2007) (m20072202)

0.130 (1) ある定数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ と正の定数 M が存在して

$\displaystyle\left|\ \log(1+x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \right|\leqq\ Mx^{n+1}\quad(0\leqq\ x\leqq\ 1)$ が成り立つとき，$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2$ を示せ.

(金沢大 2007) (m20072208)

0.131 $f(x)=\sqrt{1+x}\ (x>-1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ．

(3) (2) で得られた結果を $n=2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ．

(金沢大 2008) (m20082202)

0.132 実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ．

(1) $1-t^2+t^4-\cdots+(-t^2)^{n-1}=\dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ.

(2) $|x|\leq 1$ のとき $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$ となることを示せ.

(金沢大 2008)　　(m20082208)

0.133 (1) $n=1,2,3,\cdots$ に対して,

$$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ で定めるとき，$a_n>0$ かつ $a_n>a_{n+1}$ となることを示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092206)

0.134 $0<x<\pi$ のとき

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

となることを示せ.

(金沢大 2010)　　(m20102206)

0.135 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい.

(金沢大 2011)　　(m20112209)

0.136 関数 $f(x)$ が $f(0)=0,\ f'(0)=1$ および微分方程式

$$(1-x^2)f''(x)=xf'(x)\qquad(-1<x<1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m=1,2,3,\cdots$ について

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x)-2mxf^{(m+1)}(x)-m(m-1)f^{(m)}(x)=xf^{(m+1)}(x)+mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m=2,3,4,\cdots$ について

$$f^n(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(0)}(x)=f(x)$ とする.

(3) $f(x)$ は区間 $-1<x<1$ でマクローリン級数に展開できるとする．その級数が

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

となることを示せ．ただし，$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)$，$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)$ である.

(金沢大 2012)　　(m20122202)

0.137 $x>0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)<0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N\geqq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^{N}f(n)<\int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．ただし必要ならば，$e<3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122206)

0.138 関数 $\varphi(x) = x\log x\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$ を求めよ.

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x=1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ.

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x>0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数 $[0,1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.139 関数の列 $\{\varphi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\cdots)$ をそれぞれ関係式

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1\ ,\qquad \varphi_0(0) = 1\ ,$$

$$\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = \varphi_{n-1}'(x)\ ,\qquad \varphi_n(0) = e^{\varphi_{n-1}(0)}\ ,\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ.

(1) $\varphi_0(x) = e^x$，$\varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}\ (n=1,2,3,\cdots)$ であることを示せ.

(2) $\ell = e^{\ell}$ を満たす実数 ℓ は存在しないことを示せ.

(3) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\cdots)$ において，どんな実数 c に対しても数列 $\{\varphi_n(c)\}$ は収束しないことを示せ

(金沢大 2016)　　(m20162207)

0.140 (1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x\quad (x>-1)$ を示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ.

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする．もし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束することを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.141 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x-p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$，$f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182204)

0.142　$\boldsymbol{R}$ 上の 3 回微分可能な関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x > a$ に対して，

$$\frac{|f''(a)|}{2}(x-a)^2 \leqq |f(x)| + |f(a)| + |f'(a)|(x-a) + \frac{|f'''(c)|}{6}(x-a)^3$$

を満たす c $(a < c < x)$ が存在することを，テイラーの定理を用いて示せ．

(2)　$f(x)$ および $a \in \boldsymbol{R}$ は，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとする．

(i)　$|f(x)| \leqq 1 \qquad (x \in \boldsymbol{R})$

(ii)　$|f'''(x)| \leqq 3 \quad (x \in \boldsymbol{R})$

(iii)　$f'(a) = 0$

このとき，$|f''(a)| \leqq 3$ を示せ．

(金沢大 2020)　　(m20202205)

0.143　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_n \to 2$ $(n \to \infty)$ と $b_n \to 1$ $(n \to \infty)$ を満たすとき，

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\, b_n \to 2 \qquad (n \to \infty)$$

を示せ．

(富山大 2003)　　(m20032308)

0.144　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において, 部分列 $\{a_{2n}\}$，$\{a_{2n-1}\}$ がともに α に収束するならば $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ．

(富山大 2004)　　(m20042315)

0.145　収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを証明せよ．

(富山大 2009)　　(m20092308)

0.146　数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき, 数列 $\left\{\dfrac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right\}$ も a に収束することを示せ．

(富山大 2010)　　(m20102308)

0.147　$-1 < a < 1$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ．ただし，i は虚数単位を表す．

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$ $(x \in R)$ の和を求めよ．

(富山大 2011)　　(m20112303)

0.148　次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しければ証明を与え，正しくなければ反例をあげよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する．

(富山大 2012)　　(m20122309)

0.149 次の問いに答えよ.

(1) $1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}$ を循環小数で表せ.

(2) マクローリンの定理を用いて, $\left|\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\right)\right| \leqq \dfrac{|x|^7}{7!}$ $(x \in R)$ を示せ.

(3) $\dfrac{n}{1000} \leqq \sin 1 < \dfrac{n+1}{1000}$ を満たす自然数 n を求めよ.

(富山大 2014)　　(m20142310)

0.150 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とするとき,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば, $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

ただし, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限, 下極限を表す.

(富山大 2016)　　(m20162303)

0.151 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする. $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とし, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする.

このとき, 全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ.

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.152 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある. この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ.

(富山大 2021)　　(m20212303)

0.153 マクローリン展開を用いて 次の式の値を求めよ. ただし, 計算の概略も示すこと.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-6(x-\sin x)}{x^5}$$

(富山大 2022)　　(m20222302)

0.154 $f(x)$ が $x=a$ で 2 回微分可能のとき, テーラーの定理を用いて, 以下の式が成立することを示しなさい.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

(福井大 2001)　　(m20012407)

0.155 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ.（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

(2) (1) の関係式で $n=1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}\qquad(0<\theta<1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005)　(m20052402)

0.156 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ.

(2) 一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）.

(3) (2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x=0$ で無限級数にテーラー展開せよ.

(福井大 2007)　(m20072402)

0.157 関数 $g(x)=\cos x$ を，$x=\dfrac{\pi}{2}$ の周りで Taylor 展開せよ.

(福井大 2007)　(m20072414)

0.158 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008)　(m20082401)

0.159 次の式を簡単に表現せよ.

(1) $S=\dfrac{1}{1\times\ 2}+\dfrac{1}{2\times\ 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$

(福井大 2009)　(m20092405)

0.160 $\log(1+x)$ をマクローリン級数（マクローリン展開）を使って, 第 5 項まで示せ.

(福井大 2010)　(m20102403)

0.161 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\qquad\text{ただし，}f^{(n)}\text{は }n\text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x)=e^x$ の $n=4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ.

(2) $f(x)=\sin x$ および $f(x)=\cos x$ について，$n=5$ までのマクローリン展開を示せ.

(3) 上の結果を利用して $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を示せ; ただし，$i^2=-1$ である.

(福井大 2012)　(m20122424)

0.162 $\sin(ax)$ をマクローリン級数展開せよ.

(福井大 2014) (m20142403)

0.163 テイラーの定理によって $f(x,y)=x^2y+4y-5$ を $(x-1)$ と $(y+1)$ のべきで展開せよ.

(福井大 2014) (m20142407)

0.164 次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ（計算過程も示せ）.

$\log(1+x)$

(福井大 2015) (m20152403)

0.165 テイラーの定理を使って，$f(x,y)=\sin xy$ を $(x-\pi/2)$ と $(y-1)$ の 2 次のベキまで展開せよ.

(福井大 2016) (m20162404)

0.166 e^x をマクローリン展開し，最初の 4 項までを答えよ.

(福井大 2018) (m20182418)

0.167 $\cosh x$ をマクローリン級数展開せよ．ただし，一般項も示すこと.

(福井大 2021) (m20212403)

0.168 関数 $f(x)=\log(2x+3)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．また，関数 $f(x)$ のマクローリン級数の最初から 5 項を求めよ.

(静岡大 2004) (m20042502)

0.169 関数 $f(x)=x^5e^x$ のマクローリン級数（すなわち原点を中心とするテイラー級数）を求めよ.

(静岡大 2006) (m20062503)

0.170 $f(x)=e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とするとき, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102505)

0.171 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ を求めよ.

(2) $f(x)=\dfrac{-4x+6}{x^2-4x+3}$ のマクローリン展開を求めよ.

(静岡大 2011) (m20112501)

0.172 次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$ を求めよ.

(1) $f(x)=e^{x^2}$ (2) $f(x)=\log(2+x)$ $(-2<x<2)$

(静岡大 2012) (m20122504)

0.173 $e^{i\pi}+1=0$ であることを証明せよ. ここで, $i=\sqrt{-1}$ である.

(岐阜大 2005) (m20052609)

0.174 関数 $\log x$ を $x=a$ のまわりで，Taylor 展開せよ．ここで，a は正の実数である.

(岐阜大 2007) (m20072613)

0.175 (1) e^x を，$x=0$ でテーラー展開せよ（このような展開を，「マクローリン展開」という場合がある）.

(2) (1) の情報を基に，e を有効桁数 3 桁まで正確に求めたい場合，第何項まで計算すればよいと考えるか.

(岐阜大 2007) (m20072619)

0.176 $f(x)=(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})$ とする．$f(x)$ を $x=0$ のまわりに Taylor 展開したときの x^3 までの項を求めよ．

(岐阜大 2012)　　(m20122601)

0.177 自然数 m に対して

$$I(m)=\int_0^1 \frac{1}{x^m+1}\,dx$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 定積分 $I(1)$, $I(2)$ の値を求めよ．

(2) 実数 $r \neq -1$, 自然数 N に対し,

$$\frac{1}{r+1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n r^n+\frac{(-1)^{N+1}r^{N+1}}{r+1}$$

となることを示せ.

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

の値を求めよ.

(岐阜大 2015)　　(m20152601)

0.178 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される．

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\cdots\frac{1}{n!}f^{(n)}x^n+\cdots$$

ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x=0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n=2$ まで表せ．

(1) $f(x)=\sin x$

(2) $f(x)=\cos x$

(豊橋技科大 1997)　　(m19972706)

0.179 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

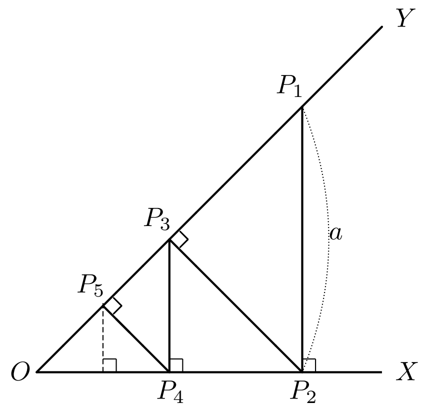
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　(m19992704)

0.180 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)$

(豊橋技科大 2001)　(m20012707)

0.181 2 直線 $A: y = mx,\ B: y = -mx\ (m > 0)$ と，y 軸上 $(y > 0)$ に中心をもつ円を考える．

(1) 半径 r_0 の円を 2 直線に接するように描くとき，その中心の座標 $(0, y_0)$ を求めよ．

(2) 上の円の下に，この円と 2 直線に接するように半径 r_1 の円を描くことができる．この円の半径 r_1 を求めよ．

(3) 上の操作を順次行えば，無限個の円を描くことができる．$r_0 = 1$ から始めたとき，すべての円の面積の総和を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　(m20012708)

0.182 関数 $f(x,y) = e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ．　ただし，a, b は実数の定数とする．

ア．2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ．

イ．$f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(豊橋技科大 2022)　(m20222702)

0.183 次の漸化式で定義される数列を考える．

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である．

(名古屋大 2014)　(m20142804)

0.184 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972901)

0.185 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{\alpha}{a_n})\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geq \sqrt{\alpha}\ (n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012901)

0.186 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(2) $\log(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}+\cdots$ ， $-1<t\leq 1$ を利用して，

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062905)

0.187 関数 $f(x)=e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し,

$f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0\leq k\leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし,

等式 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102903)

0.188 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}$ を求めよ。

(名古屋工業大 2011)　　(m20112906)

0.189 $\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ.（収束する範囲は求めなくてよい.）

(名古屋工業大 2015)　　(m20152901)

0.190 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1|<1$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=0}^{4}a_n(x-1)^n+R(x),\qquad \lim_{x\to 1}\frac{R(x)}{(x-1)^4}=0$$

と表すとき，係数 a_n $(0\leqq n\leqq 4)$ をすべて求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

0.191 関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ に対し，$f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項まででで打ち切って得られる高々4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2020)　　(m20202901)

0.192 関数 $\log x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ．収束に関しては調べなくてよい.

(名古屋工業大 2023)　　(m20232901)

0.193 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の第 n 次導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(3) (2) の結果を用いて，$g(x)=\log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063111)

0.194 正の整数 N を 8 進数で表した時，n 桁の数になったとする．

(1) N の取り得る最大値と最小値（例えば，$n=2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を n を用いて表せ．（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい．(途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ.)

(三重大 2006) (m20063114)

0.195 次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-an}$ （ただし，$a>0$）

(三重大 2008) (m20083103)

0.196 近似式について，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1+3\alpha$ と近似できる理由を述べよ．

(2) $\cos(\theta+\triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ．

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ．

(三重大 2009) (m20093109)

0.197 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

$$f(x)=\log(1+x)$$

(三重大 2012) (m20123104)

0.198 関数 $g(\varepsilon)=\cos^2(\theta+\varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon)=a+b\varepsilon+c\varepsilon^2+\cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

(三重大 2022) (m20223102)

0.199 次の各数列は収束しますか，収束する場合はその極限値を求めなさい．

(1) $1+(-1)^n$ (2) $\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+n}$

(奈良女子大 2001) (m20013207)

0.200 次の各数列は収束するか，収束する場合はその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{2n^2-n}{n^2+1}$ (2) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (3) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n}$ (4) $\dfrac{2^n}{n!}$

(奈良女子大 2002) (m20023205)

0.201 次の各数列は収束するか．収束する場合はその極限値を求めよ．収束しない場合はそのことを証明せよ．

(1) $\dfrac{2n^3+n+2}{n^3-n^2+n+1}$, (2) $\dfrac{\sin n}{n}$, (3) $\dfrac{(-1)^n n+1}{n}$

(奈良女子大 2003) (m20033204)

0.202 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限値を求めよ.

(1) $(-1)^n$ (2) $\dfrac{n}{n+1}$ (3) $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(奈良女子大 2005) (m20053202)

0.203 以下の級数の収束，発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014) (m20143206)

0.204 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ.

(奈良女子大 2016) (m20163203)

0.205 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}$ を考える．ただし，x は正の実数とする.

(1) 最小点 $x = x_0$ を求めよ.

(2) $x = x_0$ の周りでテイラー展開をして $x - x_0$ の 2 乗の項までの近似式を求めよ.

(奈良女子大 2016) (m20163205)

0.206 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 = 1\ , \qquad a_n = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1} \quad (n \geq 2)$$

と定められている．以下の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し $\quad a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{a_{n-1}+1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ.

(奈良女子大 2017) (m20173202)

0.207 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する.

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ.

(奈良女子大 2018) (m20183202)

0.208 r を $|r| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が，任意の自然数 n に対し以下の関係式をみたすとする．

$$a_{n+1} = r(b_n + c_n), \qquad b_{n+1} = r(c_n + a_n), \qquad c_{n+1} = r(a_n + b_n)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n) = 0$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193202)

0.209 関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(-1 < x < 1)$ を $x = 0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.210 (1) $|x| < 1$ として，次式を証明せよ．

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right)$$

(2) $\log_e \dfrac{3}{2}$, $\log_e 2$, $\log_e 3$ を小数第 3 位まで求めよ．

(京都大 1995)　　(m19953301)

0.211 半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C - A_n}{B_n - C}$ を求めよ．(3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい．)

(京都大 2010)　　(m20103302)

0.212 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$
によって定めるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) $n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(2) $n \geqq 1$ であるすべての n に対して，$a_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2}(a_n - \sqrt{3})$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ．

(京都大 2012)　　(m20123302)

0.213 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leqq x \leqq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ.

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ.

(京都大 2019) (m20193304)

0.214 n 個の実数 a_i が $0 < a_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たしているとする．このとき

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) < \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

が成り立つことを示せ.

(京都工芸繊維大 1998) (m19983403)

0.215 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 1998) (m19983404)

0.216 (1) 自然数 $n = 1, 2, ...$ に対して $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqq 2$ を満たすことを示せ.

(京都工芸繊維大 2001) (m20013404)

0.217 以下の設問に答えよ.

(1) $x > 0$ の範囲で 3 つの関数 $f(x) = x - 1$, $g(x) = \log x$, $h(x) = -\dfrac{1}{ex}$ を考える. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底である. すべての $x > 0$ について, $f(x) \geqq g(x) \geqq h(x)$ を示せ. また, $f(x) \geqq g(x)$, $g(x) \geqq h(x)$ の二つの不等式それぞれについて, 等式の成立する x の値を求めよ.

(2) $a_i > -1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) > -\frac{1}{e}$$

を示せ. ただし, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ は n 個の実数 $1 + a_1, \cdots, 1 + a_n$ をかけた数を表す.

(3) $a_i = t$ $(i = 1, \cdots, n,\ t > -1)$ のとき, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)$ を最小にする t の値と最小値を n を用いて表せ.

(4) 設問 (2) の不等式で, 右辺の $-\dfrac{1}{e}$ をより大きな数（n によらない）に変えても, $a_i > -1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して, この不等式が成立するか. 理由を付けて答えよ.

（大阪大 2004） (m20043505)

0.218 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ.

(1) 無限級数の第 N 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{3^n}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた第 N 部分和を用いて，S_N が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ．

必要があれば，$(1+a)^N = \sum_{j=0}^{N} {}_N C_j a^j \geqq 1 + Na + \dfrac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，N は自然数，a は正の実数であるとする．

(大阪大 2006) (m20063502)

0.219 次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ を求めよ．また，$\lim_{N\to\infty} S_N = S$ として無限級数の和 S を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{1\cdot2\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot6} + \frac{1}{4\cdot5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+3)} + \cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)r^n = 3r + 4r^2 + 5r^3 + 6r^4 + \cdots + (n+2)r^n + \cdots$

ただし，$|\,r\,| < 1$ とする．必要ならば，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ なる関係を用いてもよい．

(大阪大 2007) (m20073505)

0.220 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008) (m20083510)

0.221 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

ただし, $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい．

(1) $\displaystyle a_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (2) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010) (m20103502)

0.222 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = 6\,, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ．

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.223 ℓ, m, n を自然数として，次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^{2\ell}$

(2) x が有理数であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(3) x が無理数であるとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\{\cos(m!\pi x)\}^{2n}\right]$

(大阪府立大 2019)　　(m20193605)

0.224 $a_1 = 1$ ，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(神戸大 1996）　　(m19963802)

0.225 関数 $f(x) = 2^x$ について，次の問に答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ と n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ をマクローリン (Maclaurin) の定理によって

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + R_{n+1}$$

の形で表すとき，a_1 ，a_n ，剰余項 R_{n+1} を求めよ.

(神戸大 1996）　　(m19963803)

0.226 $f(x) = a^x$ とする．$(0 < a)$

(1) $f(x)$ を $x = 0$ でマクローリン展開せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0$ $(1 < a)$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x x^n = 0$ $(0 < a < 1)$ を証明せよ.

(神戸大 1996)　　(m19963804)

0.227 $a_1 = 2$ ，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ.

(1) $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(神戸大 1997）　　(m19973804)

0.228 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x} - (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)}{x^{n+1}}$ が有限な値として確定するように $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を定め，この極限値を求めよ．但し，ロピタルの定理を用いてはならない.

(神戸大 1999)　　(m19993803)

0.229 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ.

(神戸大 2000)　　(m20003801)

0.230 関数 $f(x) = \sqrt{1+x}$, $|x| < 1$ とするとき，次の各問に答えよ.

(1) n 次導関数 $f^{(n)}(x),\ n \geq 1$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン (Maclaurin) 展開を求めよ.

(3) (2) を利用して，$\sqrt{101}$ を小数第 5 位まで求めよ.

（神戸大 2001） (m20013803)

0.231 a , b を実数とするとき，以下の等式を示せ.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \left(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}} \right) = \max\{a, b\}$$

(神戸大 2002) (m20023801)

0.232 (1) n を自然数とするとき， $\dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \dfrac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) 上のことを使って， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ が成り立つことを示せ.

(神戸大 2004) (m20043801)

0.233 x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{1}{n}x\right) + \cos\left(\frac{2}{n}x\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}x\right) \right\} = \frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004) (m20043802)

0.234 正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_{x,n} x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する．ここで，$0 < \theta_{x,n} < 1 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ である. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n} x} = 1 + \frac{x}{n+2} e^{\theta_{x,n+1} x}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \theta_{x,n}$ を求めよ.

（神戸大 2004） (m20043803)

0.235 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ について次の問いに答えよ. $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき， $a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき， $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき， $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき， $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007) (m20073807)

0.236 自然数 n に対して，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n+1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ. (2) $a_n \leq 1$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083810)

0.237 $|x| < 1$ とし，$f(x) = \log(1+x)$ と定める．以下の各問に答えよ.

(1) $n \geq 1$ のとき，$f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く．$f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を書け.

(神戸大 2009)　　(m20093803)

0.238 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\, f_n(t)\, dt\,, \quad n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

このとき, $f_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k\, k!} \quad n = 1, 2, \cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.239 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で, 不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする. この時, 以下の問いに答えよ.

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大 2011)　　(m20113803)

0.240 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2) m 桁の自然数のうちで, 0 の文字が入らないものの個数を答えよ. 例えば $m = 3$ のときなら, $111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で, 9^3 である.

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項, 例えば, $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする. すなわち,

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき, $\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ.

(神戸大 2012)　　(m20123806)

0.241 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ とおく. 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

(3) 級数の和

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133802)

0.242 z は $|z|=1,\ z\neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots \tag{$*$}$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n=\sum_{k=0}^{n}z^k$ とおく．

(1) 非負整数 n に対し $|S_n|\leq\dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ．

(2) $m>n$ であるような正の整数 m,n に対し次が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{z^k}{k}=\sum_{k=n}^{m-1}S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{S_m}{m}-\frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ．

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m>n\geq N$ であるような任意の整数 m,n に対して
$\left|\sum_{k=n}^{m-1}\dfrac{z^k}{k}\right|<\varepsilon$ が成り立つ． (C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.243 実数 $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x)=\min_{k\in\mathbb{Z}}\left|x-\frac{k}{2^n}\right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_0,\ f_1,\ f_2$ のグラフの概形を書け．

(2) 各 $x\in\mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x) \tag{$*$}$$

は収束することを示せ．

(3) $(*)$ で与えられる $x\in\mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.244 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000)　　(m20003902)

0.245 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ がべき級数展開可能であるとき，$f(x)$ を点 a のまわりでテイラー級数に展開せよ．

(2) (1) で求めた結果を利用して，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための必要条件と十分条件を示し，その理由を説明せよ．ただし，$f''(a)\neq 0$ とする．

(3) $f(x)=\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー級数展開せよ．

(鳥取大 2000)　　(m20003903)

0.246 (1) $x>0$ において，不等式 $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ を証明せよ．

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け．

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ を求めよ．

（鳥取大 2001） (m20013903)

0.247 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0,\cdots,a_5$ と $b_0,\cdots,b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$
$$\cos x \text{ の近似式} = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5$$

(鳥取大 2005) (m20053905)

0.248 $f(x)=\cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x)\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (1)$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1) $f(x),\ f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2) 関数 $g(x)$

$$g(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad (2)$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3) (2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24\approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 2010) (m20103903)

0.249 実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003) (m20034002)

0.250 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^x\frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ.

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(岡山大 2013) (m20134002)

0.251 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ.

(1) 収束半径 r を求めよ.

(2) $|x|<r$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ.

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.252 開区間 $(-1, 1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ を示せ.

(2) $f(x) = (1+x)^{1/3}$ のとき,

$$\left|\int_0^x (x-t)f''(t)dt\right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $7^3 = 343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ.

(岡山大 2015)　　(m20154001)

0.253 (1) 不等式 $0 \leqq t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2} \quad (t \geqq 0)$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K = 1$ のときに発散し，$k = 2$ のとき収束することを示せ.

(3) 全ての $x > 0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ.

(4) 全ての $x \geqq 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.254 関数 $f(x)$ を $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad$ で定める．以下の問いに答えよ.

(1) e^x のマクローリン展開を書け.

(2) $a_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ を $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad$ により定める．$a_k \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ.

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ が収束するか発散するかを判定せよ.

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.255 (1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.256 数列 $\{a_n\}$ の極限値が存在すれば，数列 $\left\{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ の極限値も存在し，両者は相等しいことを示せ.

(広島大 2001)　　(m20014105)

0.257 次の関数を $x=1$ のまわりでテイラー展開し，3 次項まで示せ.

$$f(x) = a^x \quad ただし \quad a > 0 \quad の定数$$

(広島大 2003)　　(m20034104)

0.258 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ を示せ.

(2) 正の実数 x に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$ が収束することを示せ.

(3) 正の実数 x に対し $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$ とおく．r を正の整数とするとき $\displaystyle f(r) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r}$ を示せ.

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.259 $n = 0, 1, 2, \cdots$ とし, 積分 $\displaystyle I_n(t) = \int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^n}{e^x} = 0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $\displaystyle a_n = \lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n \geqq 1$ のとき, $a_n - na_{n-1} = 1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.260 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) 2 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 $x > -1$ に対して不等式 $\displaystyle\log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して $\displaystyle\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ.

(広島大 2006)　　(m20064103)

0.261 (1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114105)

0.262 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.263 $\sin ax$ のテーラー展開を x^5 の項まで求めよ． a は 0 でない実定数とする.

(広島大 2013)　　(m20134101)

0.264 一般項 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ.

(1) $n=1,2,\cdots$ および $k=0,\cdots,n$ に対し，${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k}\leq\frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n=1,2,\cdots$ に対し，$a_n<a_{n+1}$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(広島大 2014)　　(m20144108)

0.265 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{a_n+4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5}\leq a_n\leq 1$ を示せ.

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ が収束することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ.

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.266 逆正弦関数 $f(x)=\sin^{-1}x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 開区間 $(-1,1)$ において f の導関数 f' を求めよ.

(2) $n=0,1,2,\cdots$ と $-1<x<1$ に対して,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)=(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!}=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0!=1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1,1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 a_0, a_1, $\cdots$, a_N に対して，$g_N(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}a_kx^k$ と定める．ただし，$x^0=1$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-g_N(x)}{x^N}=0$$

となるための必要十分条件は，$a_k=\dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.267 (1) n を自然数として，$\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ．

(2) 数列 $\left\{b_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，任意の実数 x と任意の自然数 n に対して

$\left|\sin x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\right|\leq\dfrac{|x|^n}{n!}$　が成り立つ．b_k を求めよ．

(3) $0.841<\sin 1<0.842$ であることを示せ．

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.268 a を実数，r を正の実数とする．座標平面において，y 軸上の点 $(0,a)$ を中心とし半径が r である円を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y=f(x)$ の形で表せ．

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要である．

(3) 円 C が $x=0$ の近くで最も良く放物線 $y=x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184102)

0.269 (1) $x,\ y,\ z,\ w$ を正の実数とする．次の不等式を示せ．

$$\sqrt[4]{xyzw}\leqq\frac{x+y+z+w}{4}$$

(2) $a\leqq b$ を満たす正の実数 $a,\ b$ に対し，二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1=a,\qquad b_1=b,$$
$$a_{n+1}=\sqrt[4]{a_nb_n^3}\qquad b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

により定める．このとき，次の不等式を示せ．

$$a_n\leqq b_n\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ．また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214101)

0.270 非負整数 n に対し，

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ．

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき，

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す．

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し，

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ．

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.271 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ が　$(-1)^n\{x^2 - 2nx + n(n-1)\}e^{-x}$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) $f(x)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数展開を求めよ（一般項も記すこと）．

(広島市立大 2001)　　(m20014201)

0.272 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+3x+1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{ax+b}$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ が $\dfrac{a^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ であることを示せ．ただし，a, b は 0 でない定数とする．

(2) 等式 $f(x) = \dfrac{p}{x+1} + \dfrac{q}{2x+1}$ を満たす定数 p, q を求めよ．

(3) $f(x)$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ を求めよ．

(4) $f(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー級数展開をせよ．(一般項も記すこと)．

(広島市立大 2002)　　(m20024201)

0.273 (1) 数学的帰納法によって，次の式を証明せよ．ただし，n は正の整数である．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

(2) 次の無限級数の和 S を求めよ．

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots$$

(広島市立大 2006)　　(m20064201)

0.274 (1) $h(x) = x^2 \sin^2 x$ の 1 次導関数 $h'(x)$，2 次導関数 $h''(x)$，3 次導関数 $h'''(x)$ を求めよ．

(2) x の関数 $\log(1+x)$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$x > -1$ とする．

(3) $\log \dfrac{1-x}{1+x}$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，$|x| < 1$ とする．

(広島市立大 2009)　　(m20094201)

0.275 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(山口大 1999)　　(m19994302)

0.276 x が非常に小さいとき，x の 3 次の項までの展開式で次の関数を近似しなさい．

(1) $\sin x$　　(2) e^x

(山口大 2001)　　(m20014311)

0.277 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし，$y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0\,, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.278 (1) $\log(1+x)$ を x の無限級数に展開しなさい.

(2) $f(x) = x^{\log x}$ の導関数を求めなさい.

(3) 半径 a の円の面積を積分を使って求めなさい.

(4) $0 \leq x \leq 1$ において $0 \leq x^4 \leq x^2$ であることを用い，$\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx < 1$ を示しなさい.

(山口大 2008)　　(m20084301)

0.279 関数 $f(x) = \cos(3x^2)$ をマクローリン展開しなさい.

(山口大 2009) (m20094314)

0.280 次の極限値を求めよ. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998) (m19984402)

0.281 一般項が $a_n \geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004） (m20044401)

0.282 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054402)

0.283 自然数 n に対して $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ. (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\log n} = 1$ であることを示せ.

（高知大 2001） (m20014502)

0.284 実数 x の関数 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ について, 次の各問いに答えなさい.

(1) 等式 $S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

（高知大 2001） (m20014503)

0.285 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x| < K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x = 0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x| < 1$ における関数 $f(x) = (1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054503)

0.286 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する.

① $a_1 = 1$

② n が素数のときは $a_n = n$

③ $n \geq 2$ が素数でないときは $a_n = \dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 初項から第 10 項までを求めよ.

(2) $\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ.

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ.

(高知大 2010)　　(m20104501)

0.287 べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114502)

0.288 $a_1 = 1$ および $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して, $\dfrac{1}{2} \leqq a_n \leqq 1$ であることを示せ.

(2) 任意の自然数 n に対して, $\left|a_{n+2} - a_{n+1}\right| \leqq \dfrac{4}{9}\left|a_{n+1} - a_n\right|$ であることを示せ.

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ. また, その極限値を求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164501)

0.289 正の整数 n と実数 $x < 1$ に対して, $R_{n+1}(x) = \log(1 - x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ とおく.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ.

(2) $|x| < 1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1 - x^2} - 1 - x^2}$ の値を求めよ.

(高知大 2019)　　(m20194501)

0.290 $a > 0$ とし, $x_n = \left(\dfrac{a}{1 + a}\right)^n$, $n = 1, 2, \cdots$ とする.

(1) $\{x_n\}$ は有界な単調減少数列であることを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ の値を求めよ.　　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ の値を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064608)

0.291 $x > -1$ で定義された関数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ．ただし，3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け.

(3) (2) の結果を利用して，$(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.292 (1) $1 - x^3$ を因数分解せよ.

(2) $1 - x^4$ を因数分解せよ.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を原点 O のまわりで 2 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(4) $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ を原点 O のまわりで 3 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084606)

0.293 $\{a_n\}$ を数列とする.

(1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$ であっても $\lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在するとは限らないことを反例によって示せ.

(九州大 1997)　　(m19974702)

0.294 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,　$x < 1$ 　について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $y = f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフ 3 つを重ねて xy 平面上に描け.

(4) $f(x)$ を $x = 0$ を中心に Taylor 級数に展開せよ. x^n の項まで展開したときの剰余項の評価を一つ与えよ.

(九州大 2005)　　(m20054709)

0.295 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，正数 M が存在し，すべての n に対して $|a_n| \leqq M$ となることを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを示しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon\ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい.

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

(九州大 2006)　　(m20064709)

0.296　a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x)=e^{ax}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　自然数 n に対して，$f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ．

(3)　N を自然数とするとき，次の級数の和を求めよ．　$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.297　関数 $f(x)$ の点 a での Taylor 展開は，関数 $f(x)$ を点 a の近くで一番よく近似する n 次式が

$$f_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

だと言うことを主張している．関数 $f(x)=-\log(1-x)$ の $x=0$ の近くでの振舞いに関する以下の問いに答えよ．

(1)　点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 0 次式 $f_0(x)$ を求めよ．

(2)　点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ．

(3)　点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ．

(4)　点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する n 次式 $f_n(x)$ を求めよ．

(5)　以下の 4 つの関数のグラフを，$-1\leq x<1$ の範囲で，重ねて描け：

$$y=f(x)\,,\quad y=f_0(x)\,,\quad y=f_1(x)\,,\quad y=f_2(x)\,.$$

(九州大 2009)　　(m20094710)

0.298　$a_1=2$, $a_{n+1}=3\sqrt{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列が収束することを,「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し，その極限値を求めよ．

(九州芸術工科大 2001)　　(m20014804)

0.299　$f(x)=x^3-2x^2$ を $x=1$ のまわりでテイラー展開し, 最初の第 2 項まで用いて, x についての線形式を求めよ．

（佐賀大 2004）　　(m20044913)

0.300　$f(x)=\cos x$ を $x=a$ のまわりで Taylor 展開せよ．

（佐賀大 2004）　　(m20044914)

0.301　$x=0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

これを用いて, ネイピアの数 e を小数点以下第 3 位まで計算せよ．

(佐賀大 2005)　　(m20054935)

0.302　x が小さいとき，次の式を x の 3 次まで展開せよ．　$e^x+\log(1-x)$

(佐賀大 2006)　　(m20064908)

0.303　(1)　$f(x)$ を $x=0$ の近傍で x^2 の項までテーラー展開せよ．　$f(x)=e^{x^2}-1$

(2)　$g(x)$ を $x=0$ の近傍で x^2 の項までテーラー展開せよ．　$g(x)=x^2$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

(佐賀大 2006)　(m20064930)

0.304 (1) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか．

(2) $f(x)=\exp(x)$ のとき，$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ はどうなりますか．

(3) マクローリンの定理は次式で表される．

$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+f''(0)\,x^2/2!+\cdots$

$\cdots+f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)!+f^{(n)}(\theta x)\,x^n/n!\quad(0<\theta<1)$

$f(x)=\exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい．

（マクローリン展開）ただし，$\exp(x)=e^x$ である．

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して，$\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい．

(佐賀大 2007)　(m20074902)

0.305 関数 $f(x)=(1+x)\log(1+x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n\geq 2$ について，n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

とするとき，a_0，a_1，a_2，a_3 および a_n は何か．ただし，$-1<x<1$ とする．

(佐賀大 2009)　(m20094905)

0.306 $x=0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

これを参考に $e^{0.2}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ．

(佐賀大 2009)　(m20094924)

0.307 初項 a, 公比 r の無限等比級数は, $|r|<1$ のとき収束し, その収束値は $\dfrac{a}{1-r}$ で求められる. これを利用して循環小数 $0.2\dot{3}\dot{9}$ を分数で表せ.

(佐賀大 2010)　(m20104918)

0.308 $f(x)=\cos 3x$ を, マクローリン展開の公式

$f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

を用いて x の 2 次式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ (a_0〜a_2は係数) で近似することを考える.

(1) 2 次式中の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ．

(2) 近似式を利用して $\cos 0.6$ の近似値を計算せよ．

(佐賀大 2010)　(m20104919)

0.309 $x=0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x++\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

これを参考に $\mathrm{e}^{0.1}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ．

(佐賀大 2013)　(m20134920)

0.310 次の無限級数の和を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{5^n}$

(佐賀大 2015)　(m20154907)

0.311 次の関数をマクローリン展開して係数 a_n を求めよ.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(佐賀大 2015)　(m20154909)

0.312 関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開 ($x=0$ を中心とするテイラー展開) を 3 次の項まで求めなさい.

(佐賀大 2018)　(m20184902)

0.313 次の関数を x^3 の項までマクローリン展開しなさい.

(1) e^x　　　(2) $\sin x$

(佐賀大 2018)　(m20184924)

0.314 $\sqrt[20]{e}$ の近似値を小数 3 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2021)　(m20214921)

0.315 関数 $f(x) = \log x$ の $x=1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-b)^k$ の形で求めよ.

(佐賀大 2022)　(m20224914)

0.316 $\sin 12°$の近似値を小数　3 桁まで求めなさい. <u>答えだけでなく途中経過</u> も記載すること.

(佐賀大 2022)　(m20224925)

0.317 連続関数 $f(x)$ において Taylor 展開の 2, 3 項を記述せよ. ただし, h は x の微小な変化量である.

$$f(x+h) \approx f(x) + \boxed{} + \boxed{} + O(h^3)$$

(長崎大 2004)　(m20045006)

0.318 次の関数が与えられている.

$f(x) = 1 - \cos x$

$g(x) = x \sin x$

(1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ.

(2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005)　(m20055010)

0.319 連続な関数 $f(x, y)$ の Taylor 展開について, 右辺第 2 項, 第 3 項を記述せよ.

ただし, Δx は x の微小な変化量である.

$$f(x + \Delta x,\ y) = f(x, y) + \boxed{} + \boxed{} + O(\Delta x^3)$$

(長崎大 2008)　(m20085013)

0.320 次の関数について, x^3 の項まで Maclaurin（マクローリン）の級数展開で表せ.

$y = \sqrt{1-x^2}$

(長崎大 2010)　　(m20105005)

0.321 2^x を x^3 の項までマクローリン展開せよ.

(長崎大 2011)　　(m20115003)

0.322 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し，2 次の項まで求めよ.

(長崎大 2011)　　(m20115009)

0.323 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1+2x} \quad \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x) \ \ (n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1)，(2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.324 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0),\ f''(0),\ f^{(3)}(0),\ f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい.

(大分大 2012)　　(m20125107)

0.325 (1) $\arctan x$ の $x=0$ における Taylor 展開を，５次の項まで求めよ.

(2) $BC = 10,\ AC = 1,\ \angle C = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC において，$\angle B$ の値（ラジアン）を小数第 4 位まで求めよ.

(熊本大 2004)　　(m20045201)

0.326 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする.

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である.

(2) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1}{5}$ とするとき,

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して，$\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい.

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい．

補助表

x	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\frac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.327 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を導け．

(2) (1) の結果を用いて，以下の等式がすべての実数 θ に対して成立するように，定数 a と b を定めよ．

$$\sin^3\theta = a\sin\theta + b\sin 3\theta$$

(宮崎大 2012)　　(m20125301)

0.328 次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.329 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(鹿児島大 2011)　　(m20115415)

0.330 x の n 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ について，以下の問題に答えなさい．ただし，a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n，a は，定数とする．また，必要に応じて，階乗記号 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ を用いてよい．

(1) $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$，2 階導関数 $f''(x)$，3 階導関数 $f'''(x)$，n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算しなさい．

(2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ が成立することを示しなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125425)

0.331 (1) 次の式の a, b に入れるべき数字を求めよ．　$\dfrac{6}{x^2+7x+10} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x+5}$

(2) 次の数列の和を求めよ．　$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

(鹿児島大 2017)　　(m20175420)

0.332 オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ．

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ．

(室蘭工業大 2006)　　(m20065508)

0.333　関数 $f(x)$ のマクローリン展開は，　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x=0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x \to 0$ のとき，$e^x \sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ．

(室蘭工業大 2007)　　(m20075507)

0.334　(1) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi$ を満たす a の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して，　$g(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　，　$(m = 1, 2, 3, \cdots)$

と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x) = e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m = 3$ として求めなさい．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085508)

0.335　関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ （ただし，$x < 1$）の x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2011)　　(m20115512)

0.336　関数 $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ について，x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165502)

0.337　関数 $f(x) = x^{40} - x^{20}$ の $x = 1$ における 2 次のテイラー近似を求めなさい．

さらに，その結果を使って，$f(1.002)$ の近似値を計算しなさい．

(室蘭工業大 2017)　　(m20175503)

0.338　関数 $e^x \sin x$ に関するマクローリン展開について，x^3 の項まで書きなさい．e は自然対数の底とする．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185515)

0.339　(1) 関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ に対して，1 次から 3 次までの導関数を求めなさい．

(2) (1) で求めた導関数を用いて，関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ について　x^3 までのマクローリン展開を求めなさい．

(室蘭工業大 2022)　　(m20225504)

0.340　$f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ をマクローリン展開せよ．ただし，収束域は考慮しなくて良い．

(香川大 2017)　　(m20175701)

0.341　(1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ．ただし，剰余項および収束域は求めなくてよい．

(2) 次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019)　　(m20195701)

0.342　関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx}$　$(c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ.

(3) $0<c<1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント}\ :\ c=\dfrac{1}{1+\alpha}\quad (\alpha>0)\quad \text{とおいて}\ (1+\alpha)^n\ \text{の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0<c<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.343 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n>N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n \leq \lim_{n\to\infty}\beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006)　　(m20065807)

0.344 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたす数列 a_n に対して $b_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ は正しいだろうか ? 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.345 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ.　$x^2\sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ.　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1\sin^{-1}x\,dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.346 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け.

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x=\tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ.

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は $f(x)\cong 1-x^2+x^4$ であることを導け.

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け.

$$\tan^{-1}x\cong x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\quad (\text{ただし，}|x|<1\,)$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.347 (1) $\log(1+x)\quad(-1<x<1)$ の第 n 次導関数を求めよ.

(2) $\log(1+x)\quad(-1<x<1)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) $\log 2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n}+\cdots$ を示せ.

(島根大 2010)　　(m20105802)

0.348 (1) $f(x) = \sin^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$ とするとき, $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x = 0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105808)

0.349 次の問いに答えよ,

(1) $(1 + x)^{1/10}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ.

(2) $(1.2)^{1/10}$ の近似値を小数第 3 位まで正確に求めよ.

(島根大 2014) (m20145803)

0.350 関数 $f(x) = \arcsin x \ \ (-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする. ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である. このとき, 0 以上の整数 n に対し,

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (1 + 2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015) (m20155806)

0.351 次式を示せ. ただし, e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \qquad (\alpha : \text{定数})$$

(首都大 2003) (m20035904)

0.352 関数 $\dfrac{1}{1 - x^2}$ を級数展開せよ. ただし, $-1 < x < 1$ とする.

(首都大 2007) (m20075903)

0.353 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ の $x = 0$ におけるテーラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(首都大 2008) (m20085903)

0.354 $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ.

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ.

(首都大 2010) (m20105906)

0.355 関数 $f(x) = e^x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $x = 0$ におけるテイラー展開を x^2 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $e^{0.03}$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2011) (m20115906)

0.356 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.02)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2012) (m20125906)

0.357 関数 $f(x)=e^x\sin x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.03)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2013) (m20135906)

0.358 次の文章中の $\boxed{\quad ① \quad}$〜$\boxed{\quad ⑤ \quad}$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい.

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めると，$1+\boxed{\quad ① \quad}x^2+\boxed{\quad ② \quad}x^4$ が得られる.

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めると，$x+\boxed{\quad ③ \quad}x^3+\boxed{\quad ④ \quad}x^5$ が得られる.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$ の極限値は，$\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である.

(首都大 2014) (m20145906)

0.359 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2015) (m20155906)

0.360 次の文章中の $\boxed{\ ア\ }$〜$\boxed{\ ウ\ }$ に入れるのに最も適当な数を答えなさい.

$-\log(1-3x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めると，$\boxed{\ ア\ }x+\boxed{\ イ\ }x^2+\boxed{\ ウ\ }x^3$ が得られる.

(首都大 2016) (m20165906)

0.361 関数 $f(x)=e^x\cos x$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2017) (m20175903)

0.362 関数 $\sqrt{1+x}+\log(1+x)$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2018) (m20185906)

0.363 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開を求めなさい．ただし，$-1<x<1$ とする.

(首都大 2019) (m20195905)

0.364 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(東京都立大 2020) (m20205905)

0.365 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

で与えられる，$f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，x の 7 次の項までを具体的に記述して，それ以上の高次の項は $\cdots$ で省略してよい.

(滋賀県立大 2009) (m20096001)

0.366 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

(1) 関数 $f(x)=(1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010)　　(m20106002)

0.367 (1) $|x|$ が 1 と比べて非常に小さいときに $\sqrt{1+x}$ を最もよく近似する x の 1 次式 $p_1(x)$ を求めよ.

(2) 上の $p_1(x)$ に対して, $x \geqq 0$ のとき $\left|\sqrt{1+x}-p_1(x)\right| \leqq \dfrac{x^2}{8}$ が成り立つことを示せ.

(滋賀県立大 2015)　　(m20156001)

0.368 関数 $f(x)=e^{-x}\sin\pi x (x \geqq 0)$ があるとき，以下の問に答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を原点に近い方から $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ とするとき，1 番目の面積 S_1 を求めよ.

(3) n 番目の面積 S_n を求めよ.

(4) $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ の面積の総和を求めよ.

(宇都宮大 2004)　　(m20046104)

0.369 x の関数 u, v の第 n 次までの導関数が連続ならば，部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}\int uv^{(n)}dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx \\ &= uv^{(n-i)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}dx \\ &= \cdots\cdots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots \\ &\qquad +(-1)^{(n-2)}u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n\int u^{(n)}vdx\end{aligned}$$

が成り立つ．このことを利用して下の問いに答えよ.

(1) $u=(b-x)^{n-1}$ としたとき，u', u'', $\cdots$, $u^{(n-2)}$, $u^{(n-1)}$, $u^{(n)}$ を求めよ.

(2) $u=(b-x)^{n-1}$, $v=f(x)$ としたとき，上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ.

(3) (2) の結果において積分範囲を $[a,b]$ として定積分を求め，$x=b$ のとき 0 になる項を整理して $f(b)$ についてのテイラー展開の式を求めよ．剰余項は積分形のままでよい．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020)　　(m20206104)

0.370 $a<1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(1-a)a^n = \frac{a}{1-a}$ となることを証明せよ.

(工学院大 2005)　　(m20056203)

0.371 $x_n = r^{n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0<|r|<1$ とする.

(1) 第 N 項までの和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ を求めよ.

(2) (1) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ を求めよ.

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx_n$ を求めよ.

(4) (3) で求めた和について，$N \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ を求めよ.
ただし，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} Nr^N = 0 \ \ (|r| < 1)$ であることを用いてよい.

(はこだて未来大 2011)　　(m20116305)

0.372 $f(x) = \arctan x$，つまり $f(x)$ を $\tan x$ の逆関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の第 3 次導関数 $f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 以下の等式を満たす 4 つの定数 a_0，a_1，a_2，a_3 をすべて求めよ.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

ただし，記号 o はランダウのスモールオーである.

(3) $f\left(\sqrt{3}\right)$ の値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(はこだて未来大 2017)　　(m20176302)

0.373 $f(x, y) = \log(1 + x + y^2)$ のマクローリン展開を, 2 次の項まで求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106508)

0.374 $f(x) = x \sin x \quad (-\infty < x < \infty)$ のマクローリン展開を 3 次の項まで求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126503)

0.375 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136503)

0.376 指数関数と三角関数のマクローリン級数を利用して，次の極限を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x - \sin x}$$

(和歌山大 2014)　　(m20146504)

0.377 次の関数の $x = \dfrac{\pi}{2}$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい.

$$f(x) = x \cos x$$

(和歌山大 2015)　　(m20156502)

0.378 次の関数の $x = \pi$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい.

$$f(x) = \sin x$$

(和歌山大 2018)　　(m20186502)

0.379 次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開（x=0 のまわりのテイラー展開）を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x) = e^{2x+1}$$

(和歌山大 20221) (m20216502)

0.380 関数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ.

(和歌山大 2022) (m20226502)

0.381 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して, 3 次までのマクローリン展開を求めよ.

(東京工科大 2010) (m20106904)