[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：5 偏微分

0.1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 6$ の臨界点（停留点 ）を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(北海道大 2017)　(m20170103)

0.2 次の関数の偏導関数 z_x , z_y を求めよ．

(1) $z = \sin(ax + by)$　(2) $z = x^y \quad (x > 0)$

（北見工業大 2004）　(m20040203)

0.3 次の関数の偏導関数 z_x , z_y を求めよ．

(1) $z = x^3y + 2xy^2$　(2) $z = \log(x^2 + xy)$

(北見工業大 2005)　(m20050202)

0.4 (1) $y = x\sin 2x$ を微分せよ．

(2) $z = xy^2 + e^x$ とする. 偏導関数 z_x , z_y を求めよ．

(北見工業大 2005)　(m20050207)

0.5 次の関数の偏導関数 z_x, z_y を求めよ.

(1) $z = x^3y + y^2$　(2) $z = \cos(x - 2y)$

(北見工業大 2006)　(m20060202)

0.6 次の関数 z の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(1) $z = xy^2 + y^3$　(2) $z = \sin(x^2y)$

(北見工業大 2007)　(m20070202)

0.7 平面の直交座標 (x,y) と極座標 (r,θ) の間には $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x,y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　(m20090203)

0.8 関数 $z = x\sin(x + 2y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2011)　(m20110202)

0.9 2 変数関数 $z = \mathrm{arctan}\dfrac{y}{x}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．（注：$\big(\mathrm{arctan}X\big)' = \dfrac{1}{1 + X^2}$ である）

(北見工業大 2012)　(m20120202)

0.10 2 変数関数 $z = x\sin y$ につき偏導関数 z_x, z_y を求めよ．　(北見工業大 2013)　(m20130202)

0.11 $z = x\cos(xy)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ．

(北見工業大 2014)　(m20140203)

0.12 $z = \cos(xy + y^2)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ．

(北見工業大 2015)　(m20150203)

0.13 $z = x\sin\left(xy^2\right)$ とする．偏導関数 z_x, z_y を求めよ．

(北見工業大 2016)　　(m20160202)

0.14 関数 $z = (x+2y)^5$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2017)　　(m20170202)

0.15 関数 $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0)$ とする) の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2018)　　(m20180202)

0.16 関数 $f(x,y) = y\log\dfrac{x}{y}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．$(x, y > 0$ とする.)

(北見工業大 2019)　　(m20190202)

0.17 関数 $z = x^2y + y^4$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2019)　　(m20190209)

0.18 関数 $z = y\sin(x^2+xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(北見工業大 2022)　　(m20220203)

0.19 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad (x \geqq 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x, y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x,y) に対し，原点と点 $\left(\dfrac{x}{2},\ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x,y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x,y) の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

0.20 次の関数を各変数について偏微分せよ．

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

（岩手大 2004）　　(m20040304)

0.21 関数 $z = \log\left(x^2+2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 $x,\ y$ が変数 $r,\ \theta$ の関数

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.22 次の関数について, 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.　$4x^2 = (y - x^2)^2 + 1$

（秋田大 2004）　　(m20040402)

0.23 関数 $f(x,y) = e^{x+2y}$ の 2 次までの偏微分を全て求めよ．さらに原点でこれを Taylor（テイラー）展開したときに，$f(x,y) = (2\ 次式) + (剰余項)$ となる 2 次式を求めよ．剰余項は求めなくてよい．

(秋田大 2006)　　(m20060404)

0.24 関数 $z = f(x,y)$ について，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = y$ が成り立っているとする．r を定数とし，$x = r\cos t$, $y = r\sin t$ とおく．このとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080406)

0.25 関数 $f(x,y) = \sin(x^2 + y)$ の 2 次偏導関数をすべて求めよ．

(秋田大 2009)　　(m20090401)

0.26 関数 $f(x,y) = \log(x^2 + 2y^2)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 点 $(2,1)$ における勾配ベクトルを求めなさい．

(2) 点 $(2,1)$ におけるグラフの接平面の，点 $(3,2)$ における z 座標と，接点の z 座標との差を求めなさい．

(秋田大 2012)　　(m20120404)

0.27 2 変数 x と y を持つ関数 $f(x,y) = e^x \cos y$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(秋田大 2015)　　(m20150404)

0.28 $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 点 $P(1,1)$ における $f(x,y)$ の $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 方向の微分（$\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数ともいう）を求めなさい．

(秋田大 2016)　　(m20160403)

0.29 $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ の条件で，$f(x,y) = xy$ の関係が成り立っている．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1) y を x の関数とするとき，$g(x,y) = 0$ の両辺を x で微分して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x と y の式で求めよ．

(2) y を x の関数であることに注意し，設問 (1) の結果を用いて，$\dfrac{df}{dx}$ を x と y の式で求めよ．

(3) $f(x,y)$ が極値を取るときの x と y の関係式を，設問 (2) の結果を用いて求めよ．

(4) $f(x,y)$ が極値を取るときの $g(x,y)$ 上の点を全て求めよ．

(秋田大 2019)　　(m20190403)

0.30　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x-3}{x^4-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

(秋田大 2021)　　(m20210403)

0.31　x,y を実数とし，$0<x<2\pi$，$0<y<2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満足するすべての点 (x,y) を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の $x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.32　実変数 x,y の関数 $f(x,y)=x^3-y^2$ について以下の問に答えよ．

(1) (x,y) が実平面全体をうごくとき，$f(x,y)$ の臨界点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ となる点}\right)$ をすべて求めよ．

(2) 各臨界点について，それが f の極値を与えるか調べよ．

(3) 点 (x,y) が円 $x^2+y^2=1$ の上をうごくとき，関数 $f(x,y)$ の最大，最小とそのときの x,y の値を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120507)

0.33　xyz 空間の曲面 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a,b,c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z)=0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点となるとき，a,b,c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a,b,c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.34　$0\leq t<1$ とする．各 t について，次の関数の極大値をとる点と極小値をとる点を求めよ．極値を求める必要はないが，極大か極小であるかは明記すること．

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2-1\right)(x-t)\qquad\left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$$

(東北大 2017)　　(m20170507)

0.35 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k) - g(a,b) - (\alpha h + \beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.36 次の関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$ とする．

$$f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(2) 次式を満足する (x,y) の値をすべて求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210506)

0.37 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + xy - 2x + 2y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の極値を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

における f の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210511)

0.38 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = x^4 - 4x^3y - 4xy^3 + y^4 \qquad \big(\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,\big)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 f の x, y に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b) = 0$ となる $\mathbb{R}^2$ の点 (a,b) をすべて求めよ．

(3) 設問 (2) で求めたすべての点について，その点で f が極小値をとるか，極大値をとるか，または極値をとらないか判定せよ．

(東北大 2022)　　(m20220510)

0.39 (1) ２変数関数 $g(x,y)$ が２回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r,\theta)=r\cos\theta,\ y=f_2(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r\neq 0,(x,y)\neq(0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) ２変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で２回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，
$U=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r'\leq r)$ があって，$(x,y)\in U-\{(a,b)\}$ ならば
$f(x,y)>f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030607)

0.40 $\mathbb{R}^2$ 上の関数が点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ で（全）微分可能であることの定義を述べよ．また，$f(x,y)=|x||y|$ の微分可能性を $\mathbb{R}^2$ の各点について調べ，微分可能ならばその点での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110609)

0.41 実変数 x,y の関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^4+y^4)-xy$ の最小値と最小値を与える点 (x_0,y_0) を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220605)

0.42 $x^2+y^2=1$ のもとで， $f(x,y)=x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2$ の最大値，最小値，およびそれらを与える $x,\,y$ を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960801)

0.43 $f:\mathbf{R}^2\ \to\ \mathbf{R}$ を $f(x,y)=(x+y)\,e^{-(x^2+y^2)}$ で定義する．

(1) f は $\mathbf{R}^2$ において最大値，最小値をもつことを示せ．

(2) f の最大値，最小値とそれらを与える点を求めよ．

(東京工業大 2000)　　(m20000801)

0.44 条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の下で，
$F(x,y,z)=lx+my+nz$　$(l,m,n$ は定数$)$ の最大値，最小値を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010802)

0.45 極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を考える．$(x,y)=(0,0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ について　$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r,θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.46 2 変数関数 $f(x,y)$ を次で定める．　$f(x,y)=x^3-3x(1+y^2)$

(1) $f(x,y)$ は極値をもたないことを示せ．

(2) 閉円板 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$ の上で $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040801)

0.47 二変数 x, y の関数 $z = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極値を求めよ.

(東京工業大 2005) (m20050801)

0.48 $f(x, y)$ を $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ 上の C^2- 級関数， $x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta$ を $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ． $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,,$ および $r = 1$ のとき $f = 0$，$r = 2$ のとき $f = 1$
を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006) (m20060801)

0.49 (x, y) 平面の領域 $\{x > 0,\ y > 0\}$ で定義された関数 $f(x, y) = x^{\log y}$ について次の問いに答えよ.

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ. (2) f は狭義の極値を持たないことを示せ.

(東京工業大 2007) (m20070801)

0.50 関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + \log(x^2 + y^2 + 2xy + 1)$$

の極値を求めよ.

(東京工業大 2011) (m20110803)

0.51 関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$ の極値を求めよ.

(東京工業大 2012) (m20120801)

0.52 関数 $x^2 + 2xy + y^2 - 2x^4 - 2y^4$ の極値を求めよ.

(東京工業大 2013) (m20130803)

0.53 2 変数関数

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

の極値を全て求めよ.

(東京工業大 2014) (m20140801)

0.54 条件 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで，$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ の最大値，最小値を求めよ.

ただし，$a > b > c > 0$ とする.

(東京工業大 2015) (m20150801)

0.55 2 変数関数 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^4 + 2}$ の極値を全て求めよ.

(東京工業大 2016) (m20160802)

0.56 全微分可能な関数 $f(x, y, z)$ に対し，$w = f(r - s,\ s - t,\ t - r)$ とするとき，

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

を求めよ.

(東京工業大 2016) (m20160803)

0.57 a を負でない実数とするとき，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4axy$ の極値を求めよ．また，極値をとる時の x, y の値を求めよ．

(東京工業大 2017) (m20170803)

0.58 条件 $x^2+y^2 \leqq 9$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(東京工業大 2018) (m20180803)

0.59 関数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-6x^2-6y^2+9x$ の極値を求めよ．

(東京工業大 2019) (m20190803)

0.60 $a>0$ を定数とする．このとき 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ の $D=\left\{(x,y) \;\middle|\; -a \leqq x \leqq a, \quad -a \leqq y \leqq a\right\}$ における最大値を求めよ．

(東京工業大 2020) (m20200803)

0.61 a,b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x,y)=x^4-2x^2y+ay^2-by$$

を考える． (x_0,y_0) が関数 $f(x,y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ を満たす任意の点 (x,y) について

$$f(x,y) \geqq f(x_0,y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b>0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(2) $b=0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(東京工業大 2022) (m20220801)

0.62 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ について以下の問に答えよ．

(1) f_x , f_y を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(東京農工大 1996) (m19960903)

0.63 関数 $z=x^3-3xy+y^3$ の表す曲面を S とする．S 上の点 $P(-2,1,-1)$ における S の接平面の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2006) (m20060905)

0.64 次の 2 変数関数の極値を求めなさい． $f(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+xy-3y-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x$

(東京農工大 2007) (m20070902)

0.65 関数 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-3$ について，次の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(2) $f(x,y)=0$ の表す曲線 C 上の点 $(1,\sqrt{3})$ における C の接線の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2008) (m20080902)

0.66 2 変数関数 $f(x,y)=xy^2-x^2y+2$ について，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(東京農工大 2009) (m20090903)

0.67 次の 2 変数関数の極値とそのときの点 (x, y) を求めなさい. ただし極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること.

$$f(x, y) = x^3 - x^2 + 2xy + x + y^2 + 1$$

(東京農工大 2010)　　(m20100902)

0.68 次の 2 変数関数の極値を求めなさい.

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 - x^2 + y^2$$

ただし，極小値であるか極大値であるかを明記し，そのときの点 (x, y) も書きなさい.

(東京農工大 2011)　　(m20110902)

0.69 関数 $f(x, y) = x^3 + x^2 + xy^2 - x - 2y^2$ の極値とそのときの点 (x, y) を求めなさい.
ただし，極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること.

(東京農工大 2012)　　(m20120901)

0.70 関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - 3x - \dfrac{y^3}{3} + y^2 - y - \dfrac{1}{3}$ の極値とそのときの点 (x, y) を求めなさい．ただし極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること.

(東京農工大 2013)　　(m20130901)

0.71 $x^2 + y^2 = 1$ のとき，関数 $f(x, y) = x^3 + \dfrac{1}{2}y^2 - 2x$ の最大値と最小値を求めなさい.

(東京農工大 2014)　　(m20140901)

0.72 2 変数関数 $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 3y^2$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めなさい.

(2) $z = f(x, y)$ の極値を求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150901)

0.73 2 変数関数 $f(x, y) = 3x^2y + xy^3 - 5xy$ の極値をすべて求めなさい．ただし，求めたすべての極値について極大値であるか極小値であるかを明記し，さらに極大値もしくは極小値をとる点 (x, y) も書きなさい.

(東京農工大 2016)　　(m20160901)

0.74 2 変数関数 $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 - 6xy - y^2 - 7x + 5y$ について次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めなさい.

(2) $z = f(x, y)$ が極値をとる点 (a, b) で，$a > 0$, $b > 0$ となるものを求め，$f(a, b)$ の値を求めなさい．さらに $f(a, b)$ が極大値であるか極小値であるか判定しなさい.

(東京農工大 2017)　　(m20170901)

0.75 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 4y$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) を求めなさい.

(2) $z = f(x, y)$ の極値を求めなさい.

(東京農工大 2018)　　(m20180901)

0.76 2 変数関数 $f(x,y)=2x^3-2xy-y^2-3x+y$ の極値を求めなさい．ただし，極値が極大値であるか極小値であるかを明記すること．

(東京農工大 2019)　　(m20190901)

0.77 2 変数関数 $f(x,y)=-x^3+6xy-8y^3$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2020)　　(m20200901)

0.78 2 変数関数 $f(x,y)=2x^3+xy^2+9x^2+y^2-2$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(東京農工大 2022)　　(m20220901)

0.79 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=8x^3+y^3-12xy$

(2) $f(x,y)=x^4(x-2)^2+y^2$

(電気通信大 1994)　　(m19941001)

0.80 次の関数の極値を求めよ．　$f(x,y)=(ax^2+by^2)e^{-x^2-y^2}\quad(a>b>0)$

(電気通信大 1998)　　(m19981001)

0.81 関数 $f(x,y)=x^2y+xy^2+y^3-y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 1 階および 2 階の偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ．

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ の解を求めよ．

(3) $z=f(x,y)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001002)

0.82 方程式 $y+e^{1-xy}=0$ を満たし，$y(0)=-e$ であるような微分可能な関数 $y=y(x)$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および，2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x,y の有理式で表し，それらの $x=0$ における値を求めよ．

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty,a)$ とするとき，a の値を求め，極限値 $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$，$\lim\limits_{x\to a-0}y(x)$ を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.83 (1) $xy-$平面内の曲線 $f(x,y)=x^3+3xy+4y^4-x-4=0$ 上の点 $(2,-1)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ．

(2) 点 (x,y) が条件 $y^2-x^2-1=0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x,y)=y^3+2x$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2005)　　(m20051003)

0.84 次の手順によって，任意の正数 X の平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めることができる．

① $\sqrt{X}$ に近い数 x を選ぶ．

② x と $\dfrac{X}{x}$ の平均値 $x' = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{X}{x}\right)$ を計算する．

③ あらかじめ定めておいた小さい数 ℓ に対して，$|x - x'| < \ell$ となれば，x' を $\sqrt{X}$ の近似値とする．そうでない場合は，x' を新しい x として ② に戻り計算を繰り返す．

(1) この手順によって $\sqrt{X}$ の近似値が得られることを説明せよ．

(2) $X = 7$ として，その平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めよ．ただし，$\ell = 0.001$, x の初期値を 3 とする．

(3) 区間 $[0, 7]$ において，関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ を一次関数 $g(x) = ax + b$ で最小二乗近似する．この時，$g(x) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}x$ になるとすると，元の関数 $f(x) = A\sqrt{x} + B$ の A, B の値はいくらであるか？小数点以下三桁まで求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061006)

0.85 C^2 級の関数 $f(x, y, z)$ が $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x, y, z) = g(r)$ と表されるとする．$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r)$, $g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f = 0$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.86 関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x, y) = f(r)\ , \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ．

(電気通信大 2010)　　(m20101003)

0.87 つぎで定義される関数 $f(x, y)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = x^3 + 3axy + y^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

(1) $a \neq 0$ のとき，$f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $a = -1$ のとき，方程式 $f(x, y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111003)

0.88 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して，極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ．

(2) x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算せよ.

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012)　　(m20121003)

0.89 次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ に対して，以下の問いに答えよ.

$$f(x,y) = xy(1-x-y)\ , \qquad g(x,y) = 3x^3 + y^3 + 2x^2y$$

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) 曲線 $g(x,y) = 0$ 上の点 $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ.

(電気通信大 2014)　　(m20141003)

0.90 (1) $z = f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ であるとする.

(a) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表せ.

(b) z_{uu} を z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ $\quad\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161003)

0.91 関数 $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) xyz 空間内の曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y) = 0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ を $x = 2$ の近くで

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots$$

とテイラー展開したときの係数 a_0, a_1, a_2 をそれぞれ求めよ.

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.92 関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 連立方程式 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 (a,b) をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(電気通信大 2018)　　(m20181003)

0.93 領域 $D\ :\ -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3} < y < \dfrac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x,y) = 2\sin^2 x - 2\sin x \sin y - \sin^2 y$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 $(a,b) \in D$ をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(電気通信大 2021)　　(m20211003)

0.94 (1) 次の関数の n 次導関数を求めなさい． $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

(2) 次の関数の全微分 dz を求めなさい． $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

(3) 次の関数を $x=1$ まわりで Taylor 展開し，4 回微分が含まれる項まで求めよ． $f(x)=e^{x^2}$

(横浜国立大 2008) (m20081104)

0.95 極座標による曲線 $r=r(\theta)$ を x,y 座標に変換したとき，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}$$

ただし， $r'=\dfrac{d}{d\theta}r(\theta) \quad , \quad r''=\dfrac{d^2}{d\theta^2}r(\theta)$

(千葉大 1996) (m19961201)

0.96 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図 2 のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

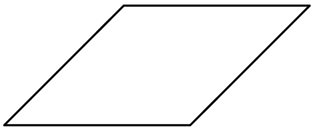


図 1

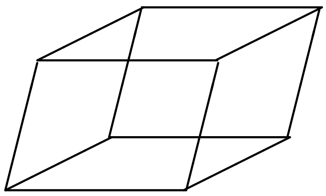


図 2

(千葉大 2000) (m20001202)

0.97 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを証明しなさい．ただし，$(x,y)\neq(0,0)$ とする．

(千葉大 2003) (m20031202)

0.98 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(筑波大 1998) (m19981302)

0.99 $f(x,y)=r^n$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ．

ただし， $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ， n は整数とする．

変数の組 (x,y) を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により， (r,θ) の組に変数変換することを考える．

(1) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}=0$ であることに注意し，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ．

同様に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

となる．

(3) $f(x,y)=r^n$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000)　　(m20001303)

0.100 以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) $f(x,y)=\tan x+\tan y-\tan(x+y)\quad(0\leq x<\pi,\ 0\leq y<\pi)$ の極値を求めなさい．

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか．

(筑波大 2003)　　(m20031311)

0.101 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-2\sqrt{x+y}+\sqrt{2}$ とすると, この関数は $0<x,y<\infty$ において下に凸である. $f(x,y)$ が最小値をとるときの x,y の値, および関数の最小値を求めよ.

(筑波大 2004)　　(m20041313)

0.102 関数 $f(x,y)=xy(x+y-1)$ について以下の設問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ が極値を取る可能性のある点 (x,y) を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の 2 次偏導関数 f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.　　注 : 極値は極大値と極小値の総称

(筑波大 2005)　　(m20051305)

0.103 2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051310)

0.104 関数　$f(x,y)=x^{0.6}y^{0.4}$　の値を，条件　$x+y=4$ ，$x\geq 0$，$y\geq 0$　のもとで最大化する x と y の値を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061305)

0.105 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006)　　(m20061309)

0.106 $x=\cos t$, $y=\sin t$ のとき，次の関数を t で微分せよ．ただし，$f(x,y)$ は x,y に関して偏微分可能な関数である．

(1) $\cos x+\cosh y$　　(2) $f(x,y)$

(筑波大 2006)　　(m20061312)

0.107 (1) $3x^2+4xy+5y^2=1$ のとき，$f=x^2+y^2$ の極値を求めよ．

(2) 上記 (1) の幾何学的意味を論ぜよ．

(筑波大 2007)　　(m20071302)

0.108 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+1$ について以下の問に答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．　　(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071318)

0.109 制約 $x^2+y^2-1=0$ の下で目的関数 $h(x,y)=xy-x$ の極値を求めることを考える．

(1) この制約を満たす点の軌跡，および目的関数の値を一定にする (x,y) の組み合わせの軌跡を描きなさい．

(2) 目的関数 $h(x,y)$ の極値を与える点を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081304)

0.110 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081306)

0.111 $f(x,y,z)=x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}+1$ で与えられる関数 $f(x,y,z)$ の極値とその座標 (x,y,z) を求めよ．ただし，$x>0,\ y>0,\ z>0$ であり，かつ，$x+4y+9z=6$ の付加条件があるものとする．

(筑波大 2008)　　(m20081320)

0.112 $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$，　$x,y\geq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091303)

0.113 変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 $r,\ \theta$ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ．

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta,\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(2) 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.114 $-1<x<1$，$-1<y<1$ で定義された関数 $f(x,y)=\sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x，f_y と 2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求め，この関数が極値をもたないことを証明しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091317)

0.115 $f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$，$x>0$ のとき, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ を示しなさい．

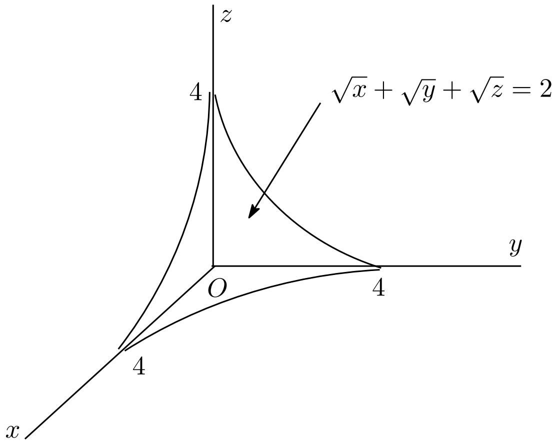
(筑波大 2010)　　(m20101315)

0.116 長方形の閉領域 $D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\}$ における次の関数 $f(x, y)$ の最大値, 最小値およびその時の x, y の値を求めなさい.

$$f(x, y) = \sin x \, \sin y \, \sin(x + y)$$

(筑波大 2010)　　(m20101319)

0.117 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし，原点 O から点 A, B, C への距離を OA, OB, OC とする．このとき，$OA + OB + OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい.



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.118 以下の問いに答えよ.

(1) 2 次関数 $F(u, v) = au^2 + 2buv + cv^2 + du + ev + f$ は，$a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ のときただ 1 つの点で最小値をとることを示せ.

(2) 空間の 2 直線 $l_1 = \{\boldsymbol{x}_1 + u\boldsymbol{a}_1 \mid u \in R\}$，$l_2 = \{\boldsymbol{x}_2 + v\boldsymbol{a}_2 \mid v \in R\}$ 上の点の間の距離の 2 乗 $G(u, v) = |(\boldsymbol{x}_1 + u\boldsymbol{a}_1) - (\boldsymbol{x}_2 + v\boldsymbol{a}_2)|^2$ を (1) の $F(u, v)$ のように表示したとき，a, b, c, d, e, f を求めよ．ただし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{a}_2$ は定ベクトルとする.

(3) (2) において，2 直線 l_1, l_2 が平行でないとき，2 直線上の点の間の距離が最小になる点の組がただ 1 組あることを示せ.

(筑波大 2011)　　(m20111321)

0.119 次の関数の極値を求めよ.

$$f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y - 1$$

(筑波大 2012)　　(m20121305)

0.120 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{3(x + y)}{xy}$ の極値を求めよ．（ただし，$x \neq 0$, $y \neq 0$.）

(筑波大 2012)　　(m20121318)

0.121 実変数 x, y, z が $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を満たすとき $f(x, y, z) = xyz$ の最大値と最小値を求め，その時の x, y, z の値を示せ.

(筑波大 2013)　　(m20131315)

0.122 $F(x, y) = x^3 - 3xy + 2y^2 - 4y = 0$ を満たす関数 $y = f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $y = f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて，$y=f(x)$ の極値を求めなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131320)

0.123 偏微分可能な $f(x,y)$ が $f(cx,cy)=c^n f(x,y)$ を満たしているとする．この時，$x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いずに示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141303)

0.124 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x,y)=(0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x,y)=(1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.125 下の関数 f が $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，理由を示して答えなさい．

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+y^2}{y} & (y\neq 0) \\ 0 & (y=0) \end{cases}$$

(筑波大 2015)　　(m20151314)

0.126 曲面 $x^2=y(2+3x+z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151318)

0.127 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y}+n\log y \qquad (-\infty<x<\infty,\ y>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2=n(\mu-x)^2+n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu=\dfrac{n+1}{2}$，$\delta=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.128 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(筑波大 2017)　　(m20171308)

0.129 関数 $f(x,y)$ は，x および y について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する．

関数 $f(x,y)$ を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ で変数変換したときの $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は，変数 r を含まない関数となることを証明しなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181315)

0.130 $x^2 + y^2 = 4$ の条件の下で，$f(x,y) = 4x + 2xy$ の最小値，最大値を求めなさい．また，最小，最大となるときの x と y の値も示しなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191301)

0.131 $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とする．

(1) $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた停留点のうち，x 座標および y 座標がともに正の点を (a,b) とする．$f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるかどうか判定せよ．極値をとる場合は極大と極小のどちらであるか，根拠とともに述べよ．

(3) x, y が $xy = 4$ かつ $x > 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191305)

0.132 ラグランジュの未定乗数法を用いて，楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし，直方体の各辺は，いずれも x 軸，y 軸，z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x,y,z)（ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ ）としたとき，3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と，楕円体に内接する直方体の体積 $V(x,y,z)$ を変数 x,y,z を用いてそれぞれの数式として表せ．

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件を満たす特異点がないことを示せ．

(3) 体積 $V(x,y,z)$ を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めるための，具体的なラグランジュ関数 $F(x,y,z)$ を示せ．ただし，未定乗数を λ とせよ．

(4) (3) で定数化した数式を用いて，楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ とする．

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.133 α を実数の定数とし，n を 2 以上の整数とする．

$$f(x,y) = (y-x)^n + x^2 + \alpha y^2$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において極値を取るかどうか判定せよ.

(筑波大 2019)　　(m20191316)

0.134 (1) 関数 $f(x,y)$ を次のように定義する.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

この関数 $f(x,y)$ について, 以下の問に答えよ.

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,0)$ を求めよ.

② $k\neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,k)$ を求めよ.

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け.

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する.

$$g(x,y)=\frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x,y)$ について, 以下の問に答えよ.

① 導関数 $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$, $g_{xx}(x,y)$, $g_{xy}(x,y)$, $g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ.

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ. なお, 3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い.

(筑波大 2020)　　(m20201304)

0.135 次の式で与えられる陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$$

(筑波大 2020)　　(m20201309)

0.136 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi<x<\pi \text{ かつ } 0<y<\pi\right\}$ とする.

関数 $f(x,y)=\sin x-\sin y+\sin(x+y)$ の D における極値をすべて求めよ.

(筑波大 2020)　　(m20201315)

0.137 (1) $z=f(x,y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする. 変数 u, v に対して, $x=u+v$, $y=uv$ のとき, 以下の等式を示せ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=(x^2-4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x,\ y)=x^4+y^4-2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211303)

0.138 関数 $F(x,y)=xy-x^3+y^2$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $F(x,y)=0$ を満たす陰関数 $y=f(x)$ の極値となる点 $(x,f(x))$ をすべて求めよ. また, その点が極大値か極小値かについても理由とともに説明せよ.

(2) 原点において $F(x,y)=0$ を近似する直線をすべて求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211311)

0.139 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ を考える.

(a) 点 $(1,-1)$ において, $f(x,y)$ の変化率（方向微分）が最大となる方向, およびその最大値を求めよ.

(b) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(c) $x^2+y^2\geq 1$ において, 不等式 $0<f(x,y)\leq \dfrac{2}{e}$ が成り立つことを示せ.

(d) $\mathbb{R}^2$ における $f(x,y)$ の最大値, 最小値を求めよ.

(筑波大 2021)　　(m20211316)

0.140 関係式 $F(x,y)=x^2-2xy+9y^2-8=0$ をみたす関数 $y=f(x)$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) 停留点（$f'(x)=0$ となる点）をすべて求めよ.

(b) (a) で求めた各点において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(c) (a), (b) の結果を用いて極値をすべて求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221302)

0.141 2 つの 2 変数関数

$$F(x,y)=x^2+2xy-y^2$$
$$G(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$$

について, 以下の各問に答えよ. ただし, $y=\arctan x$ は $y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である. また, $\dfrac{d}{dx}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$ である.

(1) $G(x,y)$ の x,y に関する偏導関数 $G_x(x,y)$, $G_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて, $F(x,y)$ が条件 $G(x,y)=0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ.

(3) $G(x,y)=0$ の陰関数 $y=g(x)$ について, その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ, また, 2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ.

(4) (3) を用いて, 条件 $G(x,y)=0$ のもとでの $F(x,y)$ の極小値を求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221308)

0.142 $a,b,c>0$ とする.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

をみたす (x,y,z) の組で

$$w=x+y+z$$

が極値をとる (x,y,z) を求めよ.

(埼玉大 1999)　　(m19991402)

0.143 $f(x,y)$ は何回でも偏微分できる関数で, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$ とする. $f(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とするとき, $\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ を f の偏導関数を用いて表せ.

(埼玉大 2004)　　(m20041404)

0.144 $f(x,y) = x^2 - x\sin y - \cos^2 y$ とする．

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061409)

0.145 関数 $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ について次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を計算し，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(埼玉大 2008) (m20081408)

0.146 $x > 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2) $F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101403)

0.147 (1) 次の関数を微分せよ.

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ.

$$z = x^2 + 2y\ , \quad x = \sin t\ , \quad y = 5\cos t$$

(埼玉大 2011) (m20111401)

0.148 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x,y)$ は，正値で 2 階微分可能であり,

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x,y) = \log f(x,y)$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ.

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ.

(埼玉大 2011) (m20111409)

0.149 次の関数の偏導関数 $\partial f \,/\, \partial x$, $\partial f \,/\, \partial y$ を求めよ．

$f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

(埼玉大 2013)　　(m20131402)

0.150 a, b を正の定数とし，$f(x,y) = a(x^2+y^2) - b(x-y)^4$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を計算し，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値とそれを与える点を求めよ．

(埼玉大 2013)　　(m20131411)

0.151 k を 2 以上の自然数とし，$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\right\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^x + xy^k$ を考える．

(1) $f_x = f_y = 0$ を満たす点を求めよ．

(2) $k = 2$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ．

(3) $k = 3$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141407)

0.152 次の関数の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

$f(x,y) = \cos(xy)\sin y$

(埼玉大 2015)　　(m20151402)

0.153 次の関数の x に関する偏導関数 z_x を求めよ．

$z = \log\sqrt{x^2+y^2}$

(埼玉大 2019)　　(m20191402)

0.154 x, y が実数のとき，$f(x,y) = -x^2 - y^2 + ax + by - 9$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y) = 0$ が点 $(1,2)$ と点 $(3,4)$ を通るとする．このときの a と b の値を求めよ．

(2) このとき $f(x,y)$ が最大となる値を求めよ．また，このときの x と y の値を求めよ．

(群馬大 2007)　　(m20071503)

0.155 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r) = \log r$ とする．次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ を示せ．

(茨城大 2000）　　(m20001701)

0.156 2 変数関数 $z = f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ について, 以下の各問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(1,2,11)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(1+at\,,\ 2+bt) - f(1,2)}{t}$ を求めよ．

(3) 「$f(0,0)$ は極大値である」,「$f(0,0)$ は極小値である」,「$f(0,0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ．

(茨城大 2010)　　(m20101701)

0.157 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+xy+\dfrac{1}{2}y^2$ の極値を求めよ.

(茨城大 2014) (m20141701)

0.158 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z=f(x+ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ.

(1) 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(2) $z=f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2015) (m20151707)

0.159 xy 平面内の領域 D を $D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ とする．D から $\mathbb{R}$ への 2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big(f_x(x,y)+f_y(x,y)\big)$ が存在するかどうか確かめよ.

(茨城大 2016) (m20161702)

0.160 実 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-3x-3y^2$ に対して，xyz 空間内の曲面 S を

$$S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \mid \ z=f(x,y)\big\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) k を正の定数とする．曲面 S 上の点 $(k,k,f(k,k))$ における接平面が原点 $(0,0,0)$ を通るように定数 k の値を定めよ.

(茨城大 2017) (m20171702)

0.161 $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x,y)$ を考える.

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{y^2-1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点 (x,y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ.

(茨城大 2018) (m20181702)

0.162 実 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3y^2-3x-6y+2$ を考える．以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $z=f(x,y)$ で表される曲面の点 $(1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.163　$G(x,y)=x^2+y^2-xy-1=0$ で定義される陰関数 $y=g(x)$ の極値を調べよ.

(茨城大 2020)　　(m20201702)

0.164　関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で 2 回連続微分可能（すなわち，2 次までの偏導関数がすべて存在し，かつ連続）で，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たしているとする．このとき，次の小問 (1) および (2) に答えよ.

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

が成り立つことを示せ.

(2)　$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$w(x,y)=xu(x,y)-yv(x,y)$ とおく.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

が成り立つことを示せ.

(茨城大 2021)　　(m20211702)

0.165　関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ.

（山梨大 2003）　　(m20031802)

0.166　$f(x,y)=x\arcsin y+y\arccos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．ただし，$\arcsin y$, $\arccos x$ は，逆三角関数である.

(山梨大 2004)　　(m20041803)

0.167　(1)　$f(x,y)=x^2\sin y+y^3\cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051804)

0.168　$f(x,y)=x^2-2xy-y^2+7$ とする. 点 $(1,2)$ での曲面 $f(x,y)=0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051805)

0.169　$f(x,y)=x^2+xy$ とする. $x^2+y^2=4$ を満たす (x,y) での $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101805)

0.170　関数 $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2+3$ の極値を求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111806)

0.171　偏微分 $\dfrac{\partial^2 \sin^2(x^2y)}{\partial y\,\partial x}$ を求めなさい.

(山梨大 2012)　　(m20121802)

0.172　方程式 $z=f(x,y)=x^2+g(y)-1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ.
但し，$g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1)　点 $(1,s,f(1,s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ.

(2)　接平面 S' の z 軸切片が $z=-3s^4+2s^2-1$ であるとき，$g(y)$ を求めよ.

(3) $z = f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ に停留点を持つとする． このとき，(2) で求めた $g(y)$ を用いて，$z = f(x,y)$ が極大または極小となる (x,y) およびそのときの極値を全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.173　次の関数の極値を求めよ．　$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

(信州大 1999)　　(m19991902)

0.174　次の問に答えよ．

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x) > 0$ となるとする．$0 < h < b-a$ となる h をとるとき $[a, b-h]$ で定義される関数 $g(x) = f(x+h) - f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ．

(2) 曲面 $z = y^2 - x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.175　(1) 単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^3 + y^2$ の値域を求めよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \sin x \cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ．

(信州大 2005)　　(m20051904)

0.176　変数 x, y, z が条件　$2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$　を満たしながら動くときの

関数　$f(x,y,z) = e^{x+y+z}$　の最大値と最小値を求めよ. また, 対応する x, y, z の値も記せ.

(信州大 2006)　　(m20061904)

0.177　$xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ および $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする．このとき，ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し，

$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$　　となることを示せ.

(信州大 2008)　　(m20081903)

0.178　領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi\,,\ 0 < y < \dfrac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された

2 変数関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ． また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ ，$f_{xy}(x,y)$ および $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0$ を満たす領域 D 内の点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の領域 D における極値を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131901)

0.179　xy 平面上で定義された関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141901)

0.180　次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2+y^2-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3+y^3-1}{(x^2-1)^3-y+1}$

(信州大 2015)　　(m20151901)

0.181 平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,(x,y) \neq (0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ．

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.182 2 変数関数 $f(x,y) = -\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $D = \{(x,y)\mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ における $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $E = \{(x,y)\mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi\}$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181901)

0.183 2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ の停留点を全て求め，それが極大点，極小点，峠点 (鞍点) のいずれであるかを判定せよ．

(信州大 2018)　　(m20181906)

0.184 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

(信州大 2020)　　(m20201901)

0.185 (1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.186 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．関数 $f(x, y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ．

(信州大 2021)　　(m20211901)

0.187 関数 $f(x, y)$ は

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.188 実変数の実数値関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ となることを示せ．

(2) $x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(0) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ を求めよ．

(4) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(3) $F(x, y) = f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.189 2 変数実数値関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032002)

0.190 曲面 $z = x^2 y^3$ 上の点 $(2, 1, 4)$ における接平面の方程式を求めよ．

（新潟大 2004）　　(m20042003)

0.191 関数 $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ の偏導関数 $g_x(x, y)$，$g_y(x, y)$ を求めよ．

(新潟大 2006)　　(m20062003)

0.192 すべての辺の長さの総和が 4ℓ の直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，直方体の 2 辺の長さを x, y とするとき，直方体の体積 V を x, y, ℓ を用いて表せ．

(2) V の x に関する偏導関数 V_x および y に関する偏導関数 V_y を求めよ．

(3) 直方体の体積の最大値を求めよ．

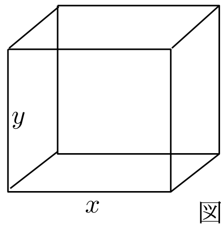


図 1

(新潟大 2006)　　(m20062013)

0.193 関数 $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + y^4$ の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092002)

0.194 関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f(x, y)$ の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極大値および極小値を求めよ.

(新潟大 2009) (m20092007)

0.195 関数 $u(x, y, z) = \dfrac{yz}{x^2 + y^2}$ について, 次式を計算せよ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(新潟大 2010) (m20102013)

0.196 以下の 2 変数関数の 1 階偏導関数, 2 階偏導関数をすべて求めよ.

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{y}}$$

(新潟大 2011) (m20112005)

0.197 (1) $z = 4 - x^2 - y^2$ 上の点 $(a, b, 4 - a^2 - b^2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接平面が点 $(1, 2, 4)$ を通るとき, 接点の軌跡を x- y 平面上に投影してできる図形を求めよ.

(新潟大 2011) (m20112008)

0.198 x, y が t に従属し, $x^3 + y^2 = t$, $x^2 + 2y = t$ であるとき, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を x, y で表せ.

(新潟大 2012) (m20122005)

0.199 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ のもとで, 関数 $g(x, y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ.

(新潟大 2013) (m20132002)

0.200 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

$$f(x, y) = \sin^2(x + y)\cos(x + y)$$

(新潟大 2014) (m20142001)

0.201 $k \neq 0$ とするとき, 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3kxy + y^3$ の極値を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152020)

0.202 関数 $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} + 2xy$ の 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2016) (m20162008)

0.203 曲線 $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線の方程式を求めよ.

(新潟大 2017) (m20172008)

0.204 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^4 - \dfrac{2}{3}y^3 + 1$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(3) 平面 $z = 2x + 2y + b$ が曲面 $z = f(x, y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172021)

0.205 $0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq 2\pi$ における実数値関数 $f(x,y) = \sin^2 x - 3\sin(x+y)$ の最大値と最小値を求めよ．また，その時の (x,y) のすべての組を求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192016)

0.206 3 点 $A(0,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$ を頂点とする三角形 ABC の内部を D とする．D 内の点 $P(x,y)$ と三角形 ABC の 3 つの辺 $AB,\ BC,\ CA$ の距離をそれぞれ $d_1,\ d_2,\ d_3$ とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = d_1^2+d_2^2+d_3^2$ として定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $f(x,y)$ を求めよ．

(2) 点 $P\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ が D 内を動くとき，関数 $f\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ の最小値を求めよ．

(3) 点 $p(x,y)$ が D 内を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222004)

0.207 1 辺の長さが a の立方体が 1 つの面を水平に置いてある．この立方体を含む直立した直円すいのうちで，その体積が最小なものの底面の半径，高さおよび体積を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912103)

0.208 $z = \sin\dfrac{y}{x}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922103)

0.209 $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ とするとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ \ v(1,1) = 1$$

を満たす $v(x,y)$ を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952102)

0.210 条件 $x^2+xy+y^2 = 1$ のもとで x^2+y^2 のとる値の範囲を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972103)

0.211 $z = x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 空間の曲面 $z = x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい．

(3) 前問の接平面が点 $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082102)

0.212 関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a) = \left\{(x,y) | 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ a\right\}$ $(a > 1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032202)

0.213 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が $\Delta u = 0 \quad \left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

をみたしているとする．このとき，$v = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2007)　　(m20072211)

0.214 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082206)

0.215 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極値を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092207)

0.216 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$ をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102207)

0.217 関数 $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ に対して, $\left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2 + \left(\partial f/\partial z\right)^2$ を求めなさい.
ただし, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする.

(金沢大 2010)　　(m20102211)

0.218 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = xye^{-(x^2+2y^2)}$ の極値と，それを与える点を求めよ.

(金沢大 2012)　　(m20122208)

0.219 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める．次の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ.

(3) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013)　　(m20132204)

0.220 xy平面上の関数

$$f(x,y) = x^3y^2 - y^3 - x^4$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 f_x，f_y の値が共に 0 となる点をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた点での $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ の値を求めよ.

(3) f は極値をとらないことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142207)

0.221 (1) R 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x) \geqq 0$ を満たすならば，任意の $a, b \in R$ と任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成り立つことを示せ.

(2) R^2 上の滑らかな関数 $g(x_1, x_2)$ が任意の点 $P=(p_1, p_2)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1.v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(P)v_1^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(P)v_1v_2+\frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2} \geqq 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $P=(p_1, p_2)$，$Q=(q_1, q_2)$，および任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$g((1-t)P+tQ) \leqq (1-t)g(P)+tg(Q)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2015)　　(m20152207)

0.222 閉領域

$$\left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\right\}$$

上の関数

$$f(x, y)=x^2+y^2+xy-x-y$$

の最大値と最小値を求め，最大値・最小値を与える点 (x, y) を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162204)

0.223 何回でも偏微分可能な関数 $u(x, y, z)$ が

$$\Delta u=0 \qquad \left(\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

を満たしているとする．このとき，

$$v=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ.

(金沢大 2016)　　(m20162215)

0.224 変数 x, y が集合

$$D=\left\{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 1 \leq x+y\right\}$$

を動くとき，関数

$$f(x, y)=(1-x)(1-y)(x+y-1)$$

の最大値を求めよ（その値が最大値となることの証明をつけること）.

(金沢大 2016)　　(m20162217)

0.225 $f(x, y)$ を C^2 級の実数値関数とする．極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を行ったとき $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が r だけの関数（$g(r)$ とする）になるならば，以下が成り立つことを示せ.

(1) $f_x y=f_y x$.

(2) $f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\dfrac{1}{r}g_r$.

(金沢大 2017)　　(m20172204)

0.226 (1) $A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t,0)$, $\angle CQR=\theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D=\left\{(t,\ \theta)\in \boldsymbol{R}^2\ \middle|\ -1<t<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\partial S}{\partial \theta}=0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ.

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.227 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6xy^2}{2x^2+3y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ.

(金沢大 2020)　　(m20202203)

0.228 C^1 級関数 $z=f(x,y)$ に対して，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad (r\neq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2022)　　(m20222208)

0.229 $x^2+y^2=1$ の条件の下で, 関数 $f(x,y)=x^3+y^3$ の極値をラグランジュの乗数法を用いて求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042303)

0.230 関数 $f(x,y)=2xy-x^2-y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1,2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052303)

0.231 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における 1 階偏微分係数を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における全微分可能性を調べよ．

(富山大 2005)　　(m20052309)

0.232 次の計算をせよ． $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log(x^2+y^2)$

(富山大 2006)　　(m20062302)

0.233 関数 $f(x,y,z)=\exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f=c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f=\dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f=c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(=\nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.234 $u=f(r),\ r^2=x^2+y^2+z^2$ とするとき次の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$$

ただし，$f'(r),\ f''(r)$ はそれぞれ r に関する f の 1 次導関数，2 次導関数とする．(富山大 2009) (m20092306)

0.235 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (\ (x,y)\neq(0,0)\ )\\ 0 & (\ (x,y)=(0,0)\ )\end{cases}$$

に対して，原点 $(0,0)$ における 2 次の偏微分係数 $f_{xx}(0,0),\ f_{xy}(0,0),\ f_{yx}(0,0),\ f_{yy}(0,0)$ を求めよ．

(富山大 2012)　　(m20122310)

0.236 $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad(\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ )$ ならば，$f(x,y)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\quad(\forall(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ )$ のとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(富山大 2013)　　(m20132310)

0.237 次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ．

$$f(x,y)=\log_y x\qquad(x>0,\ y>1)$$

(富山大 2020)　　(m20202302)

0.238 次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ．

$$f(x,y)=e^{\frac{2}{x}+3y}\qquad(x>0,\ y>0)$$

(富山大 2021)　　(m20212302)

0.239 変数 x, y が次の式を満たすとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$x^4y + 4y = 2y^3 + 8$$

(富山大 2022)　　(m20222301)

0.240 曲面 $z = x^2 + y^2$ 上の点 (1,2,5) における単位法線ベクトルを求めよ.

(福井大 2001)　　(m20012408)

0.241 二次元直交座標 (x, y) を，以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする．

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　ただし，$r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1) r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3) (2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007)　　(m20072403)

0.242 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ.

(1) $x^3y^5 + y^6 + 2x - 1 = 0$　　(2) $xy = \sin(x + y)$

(福井大 2010)　　(m20102402)

0.243 z が変数 x, y の関数であり, x と y がともに t の関数ならば,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

となることを示せ.

(福井大 2010)　　(m20102406)

0.244 $z = \arctan\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となることを示せ.

(福井大 2011)　　(m20112405)

0.245 $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の極値を求めよ.

(福井大 2012)　　(m20122408)

0.246 a を定数とする，次の

$$x^3 - 3xy + y^3 = a$$

により定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ にたいして，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132401)

0.247 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ の極値を調べよ.

(福井大 2013)　　(m20132409)

0.248 以下の関数 $f(x, y)$ に関して，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 及び $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^2y^5$　　(2) $f(x, y) = e^{-2y}\sin 3x$

(福井大 2014)　　(m20142424)

0.249 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ，g が微小量 $\triangle\ell$，$\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell}-\frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015)　　(m20152405)

0.250 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=x^2y^3e^{2xy}$ とおく．このとき，$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ および $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152427)

0.251 2 変数関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.252 (1) $F(x,y)=0$ のとき，$F_y\neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ となることを示せ．

(2) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となることを示せ．

(福井大 2018)　　(m20182401)

0.253 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx - \omega t + \theta)$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182416)

0.254 縦，横，高さがそれぞれ x, y, z である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L，表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら x, y, z の値を変化させると，x, y, z がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして，以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 表面積 S を x, y, L のみを用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの x, y, z の値，および S の最大値を，L を用いて表せ．

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.255 関数 $u = f(x,y)$ が以下の式で表せるとき，導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ．

$u = x\cos y - y\cos x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t$

(福井大 2020)　　(m20202404)

0.256 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし，直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく．このとき，z を x, y, C を用いて表せ．ただし，$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x,y)$ とする．$f(x,y)$ を x, y, C を用いて表せ．

(3) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \quad f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

である．

(4) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> 定理
>
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x,y)$ について，
>
> $$g_x(a,b) = 0, \quad g_y(a,b) = 0$$
>
> のとき，
>
> $$D = \{g_{xy}(a,b)\}^2 - g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)$$
>
> とおくと，$g(x,y)$ は $x = a$, $y = b$ において，$D < 0$ かつ $g_{xx}(a,b) > 0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x,y)$ は (4) で求めた x, y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.257 次の関数 $u=f(x,y,z)$ の全微分を求めよ.

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(福井大 2021) (m20212404)

0.258 $z=f(u)+g(v)$, $u=x+ct$, $v=x-ct$ のとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

が成り立つことを示せ．ただし，c は正の実定数である.

(福井大 2022) (m20222415)

0.259 2 変数関数 $f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ の第 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ を求めよ．ここで $\sin^{-1}$ は逆正弦関数であり，$x>0$ とする.

(静岡大 2004) (m20042503)

0.260 2 変数関数 $f(x,y)=x^2-4x+y^4-8y^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2004) (m20042504)

0.261 (1) 関数 $f(x)=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ に対して, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(3) 2 変数関数 $f(x,y)=e^x(x^2+y^2)$ の極値を求めよ.

(静岡大 2005) (m20052501)

0.262 2 変数関数 $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ の第 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(静岡大 2006) (m20062502)

0.263 2 変数関数 $f(x,y)=x^4-2xy-x^2+y^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2007) (m20072502)

0.264 (1) 関数 $f(x)=\sin x\cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ.

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x+iy$ の形に改めよ. （i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2008) (m20082501)

0.265 (1) 関数 $f(x)=\dfrac{x}{3-x}$ の n 次導関数を求めよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+2y^2+6x+4y+2xy+14$ の極値を求めよ.

(静岡大 2009) (m20092503)

0.266 $a\neq 0$ とするとき, 2 変数関数 $f(x,y)=xy(a-x-y)$ の極値を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102501)

0.267 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3(y^2-2y)x$ の極値を求めよ.

(静岡大 2011) (m20112506)

0.268 次で与えられる 2 変数関数 f に対し，極大値と極小値があれば求めよ.

$$f(x,y)=2^{x^2+xy+y^2-4x-2y}$$

(静岡大 2012) (m20122502)

0.269 次の関数の偏導関数を求めよ.

(1) $f(x,y) = \mathrm{arctan}\dfrac{y^2}{x} - \mathrm{arctan}\dfrac{x+y^2}{x-y^2}$ (2) $f(x,y) = x\sqrt{y^2-x^2} + y^2\mathrm{arcsin}\dfrac{x}{y}$

(静岡大 2013) (m20132503)

0.270 2 変数関数 $f(x,y) = 4xy - 2y^2 - x^4$ が極値をとる点 (x,y) をすべて求めなさい.

(静岡大 2013) (m20132508)

0.271 2 変数の関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(岐阜大 2003) (m20032602)

0.272 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって極座標 (r,θ) を導入するとき，x, y の関数 $f(x,y)$ の x についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を r および θ についての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

(岐阜大 2003) (m20032603)

0.273 曲線 S が $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ で与えられたとき, S 上の点 $P(1,2,3)$ における S の接平面を求めよ.

(岐阜大 2005) (m20052605)

0.274 2 変数の関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{2y}$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062605)

0.275 実変数 x, y の関数 $f(x,y)$ が，その定義域 D において（連続な 2 階偏導関数をもち,）$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を（D における）調和関数という．以下の問いに答えよ．ただし，以下では定義域 $D = R^2$ とする.

(1) $f(x,y) = x^3 - axy^2$ が調和関数であるように，定数 a を求めよ.

(2) ある関数 $f(x,y)$ が調和関数であるとき， $g(x,y) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ で定義される $g(x,y)$ も調和関数であることを示せ．ただし，関数 $f(x,y)$ は何回でも微分可能であるとする.

(岐阜大 2006) (m20062614)

0.276 $f(x,y) = \log(e^{x-y} + e^{xy})$ とおく．ただし，対数は自然対数である．f の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ を求めよ.

(岐阜大 2007) (m20072601)

0.277 2 変数関数 $f(x,y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x,y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x,y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する.

(1) $f = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008) (m20082602)

0.278 表面積一定の直方体で体積最大なものは立方体であることを示せ.

(岐阜大 2008) (m20082618)

0.279 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

$$C : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta + \sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad \ell : \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102604)

0.280 $f(x,y)$ を原点で偏微分可能な関数とする．このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-h,0)-f(0,2h)}{h}$$

の値を偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を用いて表せ.

(岐阜大 2011)　　(m20112605)

0.281 $z=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とおく．偏導関数 z_x, z_{xy} を求めよ.
（ なお記号 $\tan^{-1}$ は逆三角関数を表す．）

(岐阜大 2017)　　(m20172602)

0.282 $f(x,y)$ を 2 変数の C^2 級関数, α, β を定数として $z(t)=f(e^{\alpha t},e^{\beta t})$ とおく． $z''(0)$ の値を α, β, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$, $f_{yy}(1,1)$ を用いて表せ.

(岐阜大 2020)　　(m20202601)

0.283 関数 $z=(1+x^2y)^y$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(岐阜大 2022)　　(m20222605)

0.284 半径 a の球に内接し，体積が最大になる直円柱の高さ，および直径を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982709)

0.285 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,9)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0}=0$ をみたしており,
さらに $x(0)=1$, $y(0)=0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0}>0$ とする．$t=0$ のとき,
単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$ を求めよ.

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.286 次の偏微分を計算せよ.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy)\qquad \Big(x>0,\ y>0\Big)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212702)

0.287 関数 $f(x,y)=(2y^2+3y-2)\sin\big((2x+y)\pi\big)$ について答えよ.

(1) 偏導関数 f_x, f_y をそれぞれ求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ において，$f_x(x,\ y) = f_y(x,\ y) = 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2023)　　(m20232702)

0.288 2 次元ラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ.

(2) 関数 $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．また，境界条件を円 $x^2+y^2=4$ 上で $u=0$，円 $x^2+y^2=9$ 上で $u=5$ としたとき，境界条件を満たすように a と b の値を求めよ.

(名古屋大 2014)　　(m20142801)

0.289 次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を，それぞれ求めよ.

$z = \sin\left(x^2 y\right)$

(名古屋大 2017)　　(m20172803)

0.290 曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 1998)　　(m19982903)

0.291 関数 $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ について次の問に答えよ.

(1) f_x , f_y , f_{xx} , f_{xy} および f_{yy} を求めよ.

(2) 極値を求めよ.

(3) $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ での最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 1999)　　(m19992902)

0.292 関数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ の領域 $x^2 + y^2 \leq 1$ における最大値，最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2001)　　(m20012902)

0.293 $f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$ を領域 R : $x^2 + y^2 \leqq 1$ で考える.

(1) 領域 R の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) R における関数 $f(x,y)$ の最大値最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2003)　　(m20032901)

0.294 2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{x + y^2 - y}{1 + x^2}$$

に対して極値をとる点を求めよ.

(名古屋工業大 2004)　　(m20042902)

0.295 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x,y,z)\,|\,x+y+z=N\,,\ 0<x,y,z<N\}$$

を考える. そして, 正の数 p,q,r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x,y,z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x,y,z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x,y,z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052901)

0.296 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし, 次の計算結果を最も簡明な形で示せ. $\Delta\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$

(名古屋工業大 2008) (m20082903)

0.297 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ. $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6y^2$

(名古屋工業大 2009) (m20092904)

0.298 $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 6x$ とする.

(1) 方程式 $f(x,y) = 0$ の表す平面曲線はどのような図形か答えよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112903)

0.299 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$ について, 問 (1) と (2) に答えよ.

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) を求めよ.

(2) (1) で求めた点において極値の判定をせよ.

(名古屋工業大 2012) (m20122903)

0.300 関数 $f(x,y) = 4x^3 - 9xy^2 + 6y^3 - 12x$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の停留点 $\Big($ すなわち $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたす点 $\Big)$ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた停留点のそれぞれについて, 極値の判定をせよ.

(名古屋工業大 2013) (m20132903)

0.301 a, b を定数とし, $f(x,y) = x^3 + axy^2 + x^2 + by^2$ とする.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

がつねに成り立っているとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a, b の値を定めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(名古屋工業大 2014) (m20142903)

0.302 $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152903)

0.303 関数 $f(x,y) = 3x^2y$ について, 条件 $2x^4 + y^4 = 48$ の下での $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2016) (m20162901)

0.304 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3-y$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $P\big(-1,1,f(-1,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2017)　(m20172901)

0.305 関数 $f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ について，３点

(i) $(x,y)=(0,0)$,　(ii) $(x,y)=\left(\dfrac{2\pi}{3},\,-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,　(iii) $(x,y)=(\pi,0)$

は，$f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　(m20182903)

0.306 次の関数の極値を求めよ．

$$f(x,y)=x^3-3xy-y^2-y+1$$

(名古屋工業大 2019)　(m20192903)

0.307 次の関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ が原点 $(0,0)$ において極値をとるかどうかを，それぞれ判定せよ．なお，極値をとる場合については極大・極小の区別を明示して判定すること．

$$f(x,y)=x^2y+3x^2-5xy+2y^2$$
$$g(x,y)=(1+x^2-y^2)\cos(3x-2y)$$

(名古屋工業大 2020)　(m20202903)

0.308 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2+1)+\dfrac{2}{3}(x+y)$ の極値を求めよ．

(名古屋工業大 2021)　(m20212902)

0.309 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-x^2-y^2+2xy$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2022)　(m20222903)

0.310 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とする．
関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x$ の D における最大値と最小値を求めよ，

(名古屋工業大 2023)　(m20232904)

0.311 ２回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と定義する．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z=f(x,y)$ として，関数 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．

（愛知県立大 2000）　(m20003001)

0.312 ２変数関数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x$ の極大値，及び，極小値の値と，その点の座標の値を求めよ．次に曲線 $f(x,y)=0$ のグラフの概形を x−y 平面上に描け．また，同じ x−y 平面上に極値も書き込め．

(三重大 2003)　(m20033106)

0.313 次の関数を x と y についてそれぞれ偏微分しなさい. ただし, $x>0,\ y>0,\ y\neq 1$ とする.

$f(x,y)=\log_y x$

(三重大 2010) (m20103106)

0.314 次の関数の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ および 2 階偏導関数数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を求めなさい.

$$f(x,y)=e^{xy^3}$$

(三重大 2011) (m20113112)

0.315 関数 $z(x,y)=2x^3+6xy^2-6x+1$ の極値の値とその点の座標をすべて求めよ.

(三重大 2012) (m20123109)

0.316 $f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-4=0$ のとき, y を x の関数と見なして y の極値を求めなさい.

(三重大 2013) (m20133107)

0.317 (1) 関数 $f(x)=\log(1-x)$ を $x<1$ において定義する. 任意の自然数 n に対して, 下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい. ここで, $\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について, $m\geqq 0,\ n\geqq 0,\ m+n>0$ の条件を満たす任意の整数 $m,\ n$ に対して式 ㋐ が成り立つとする. また, 式 ㋑ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}g(x,y)=g(x,y)\cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0)=e\cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお, $m=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0\partial y^n}g(x,y)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}g(x,y)=g(x,y)$$

また, $n=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m\partial y^0}g(x,y)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}g(x,y)=g(x,y)$$

(a) $g(x,y)=u(x)w(y)$ とおく. 任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい. ここで, $u(x)$ は変数 x に関する関数, $w(y)$ は変数 y に関する関数とする.

$$\frac{d^m}{dx^m}u(x)=u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい.

(三重大 2018) (m20183104)

0.318 次の微分を求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$ （a,b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009) (m20093204)

0.319 次の微分を求めよ．ただし，a は実定数である．

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2e^{-ax}\right)$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014) (m20143201)

0.320 関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，一次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，および二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ を求めよ．

(奈良女子大 2019) (m20193206)

0.321 3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の面上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式を求めよ．ただし，$a,\ b,\ c$ はいずれも正の実数とする．

(奈良女子大 2022) (m20223206)

0.322 $x^2+y^2+z^2\ =1$ として， $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

(京都大 1995） (m19953302)

0.323 $z=xf(z)+y$, $u=g(z)$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(z)\frac{\partial u}{\partial y}$$

であることを証明せよ．

(京都大 1996) (m19963301)

0.324 $\boldsymbol{R}^3$ のデカルト座標を x,y,z とする．$x^2+y^2+z^2=1$ の拘束条件のもとで，

関数 $f(x,y,z)=3x^2+2xy+2xz+4yz$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y,z) を求めよ．

(京都大 2006) (m20063301)

0.325 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$ が極値をとる点をすべて求め，その点で極大か極小かを判定せよ．

(京都工芸繊維大 2000) (m20003406)

0.326 条件 $x^2+y^2-1=0$ の下で，関数 $f(x,y)=3x-y$ が極値をとり得る点をすべて求めよ．また，その点で極大か極小かも判定せよ．

(京都工芸繊維大 2001) (m20013405)

0.327 ２変数関数 $z=f(x,y)$ は，２階までのすべての偏導関数が存在して，それらがすべて連続であるとする．x,y が別の２変数 u,v の関数として $x=u-v$, $y=u+v$

と表されるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ を $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2002) (m20023405)

0.328 ２変数関数 $\varphi(x,y)=x-y+e^y\sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x,y)$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x=0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x,f(x))=0$ を満たすとし，$g(x)=\psi(x,f(x))$ とおく．微分係数 $f'(0)$ を求めよ．また，$a=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(0,0)$，$b=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(0,0)$ とおくとき，$g'(0)$ を a,b を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033406)

0.329 2 変数 x, y の関数 z が

$$z = x^{\alpha} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

で与えられている. ただし, α は定数で, f は微分可能な 1 変数関数である.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を f および f の導関数 f' を用いて表せ.

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$ が成り立つことを示せ.

（京都工芸繊維大 2004） (m20043402)

0.330 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ の極値および極値を与える点を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053402)

0.331 実数 a_1, a_2, b_1, b_2 (ただし $a_1 \neq a_2$) について，２変数 x, y の関数

$$Q(x, y) = (x + a_1 y - b_1)^2 + (x + a_2 y - b_2)^2$$

を考える．このとき，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ をみたす x, y の値を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063408)

0.332 関数 $f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 6xy$ を考える.

(1) $f(x, y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ. (2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2007) (m20073404)

0.333 関数 $f(x, y) = x^y \ \ (x > 0,\ y > 0)$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(e, 1, f(e, 1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083403)

0.334 関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ の極値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093403)

0.335 xy 平面上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1} x$ は逆正接関数の主値を表す.

(1) $x \neq 0$ のとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ を定義に基づいて求めよ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010) (m20103403)

0.336 関数 $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 2, 2)$ における接平面を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113403)

0.337 関数 $F(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ について次の問に答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(1,1,5)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 微分可能な関数 $y = y(x)$ が $f(x,y(x)) = 5$ を満たすとき，導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2012) (m20123402)

0.338 xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える．実数 a,b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos t,\ b + h\sin t) - f(a,b)}{h^2}$$

を考える．

(1) a,b の値を求めよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\sin t\,\cos t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき，$g(t)$ の最大値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013) (m20133402)

0.339 関数 $f(x,y) = e^{x+2y} + e^{-x-2y} + \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$ を考える．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2014) (m20143403)

0.340 関数 $f(x,y) = (2x+1)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x,y)$ の，点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2015) (m20153402)

0.341 xy 平面上の関数 $f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2 - 3x - 2y$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016) (m20163403)

0.342 関数 $F(x,y) = x^3 + 2y^3 - 7xy + 4$ を考える．関数 $y = f(x)$ は，$x = 2$ を含むある開区間 I 上で微分可能であり，次の条件 $(*)$ および $(**)$ を満たしているとする．

$(*)$ $F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in I)$

$(**)$ $f'(2) < 0$

このとき，$f(2)$ の値および $f'(2)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173404)

0.343 xy 平面上の関数 $f(x,y) = \dfrac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x, y)$ の，点 $(1, 1, 0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2018) (m20183404)

0.344 関数 $z = f(x, y)$ は C^2 級であるとする．x, y が別の 2 変数 s, t の関数であり，

$$x = 2\cos s + 3\sin t\,, \qquad y = 4\sin s + 5\cos t$$

と表されているとする．$(s, t) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする．ただし，関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるとは，$f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらが連続であることである．

(1) x, y の s, t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ．

(2) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p, q)$ および $f_y(p, q)$ を用いて表せ．

(3) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p, q)$，$f_{xy}(p, q)$ および $f_{yy}(p, q)$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2019) (m20193403)

0.345 xy 平面の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ で定義される関数

$$f(x, y) = \log x + \frac{2y^2 + 2y + 1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2020) (m20203404)

0.346 $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy(x^2 + y - 1)$ について，以下の問に答えよ．

(1) $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めよ．
ただし，$f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ はそれぞれ x，y に関する $f(x, y)$ の偏導関数を表す．

(2) 領域 $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y > 0\right\}$ における，関数 $f(x, y)$ の極大値および極小値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2021) (m20213404)

0.347 (1) xy 平面上において曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ により囲まれる領域の面積を求めよ．

(2) x, y が $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

(大阪大 2007) (m20073501)

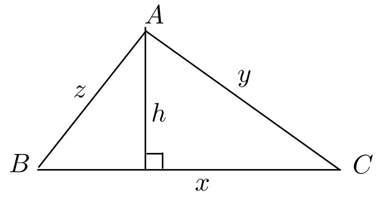
0.348 a を正定数とする．3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．

$BC = x$，$CA = y$，$AB = z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

(2) 体積 V を x，y の関数として表せ．同時に，変数 x，y の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) $x,\ y$ が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの $x,\ y$ の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.349 関数 $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面全体において $f(x,y)$ が極大になる点と極大値，極小になる点と極小値を求めよ．

(2) 領域 $D:0\leqq x\leqq 1,\ y\geqq -x$ において $f(x,y)$ が最小になる点と最小値を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153501)

0.350 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x)=f(x)^2-2f(x)-f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x,y),\ v(x,y)$ をそれぞれ

$$u(x,y)=f(x-y)\ ,\qquad v(x,y)=g(x-y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)=e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1|<a$ であり，すべての x について $g(x)=a^2-1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y\to\infty}u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.351 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta=\tan^{-1}s$ は，関数

$$s=\tan\theta\qquad\left\{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y)=e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y)+xg_y(x,y)-h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}=0$$

が成り立っているとする． ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す．$h(1)=1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.352 関数 $X(r,\theta)=r\cos\theta$, $Y(r,\theta)=r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D=(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 つの集合

$$A=\{(X(r,\theta_0),Y(r,\theta_0))\,|\,r\in(0,\infty)\},\ B=\{(X(r_0,\theta),Y(r_0,\theta))\,|\,\theta\in(-\pi,\pi)\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0\in(-\pi,\pi)$, $r_0\in(0,\infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta)=\begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta)\end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r=\frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r=\frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta=\frac{\partial X}{\partial\theta},\ Y_\theta=\frac{\partial X}{\partial\theta}$$

である．

(3) 2 つのベクトル $(X_r(r,\theta),Y_r(r,\theta))$, $(X_\theta(r,\theta),Y_\theta(r,\theta))$ が直交することを示せ．

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.353 a を実数の定数とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=1+a\sqrt{x}-\log x$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

(2) $F(x,y)=f(x^y)$ $(x>0)$ とおくとき，$(\log x)\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を計算せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163607)

0.354 2 変数関数

$$f(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$$

について各問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ．

(2) 各停留点は，極値となっているかどうかを判定せよ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183605)

0.355 次の関数の極大値，極小値が存在するならばその値を求め，存在しないなら，存在しないことを示せ．

(1) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$

(2) $g(x,y)=x^2+xy+ay^2-4x-2y$ （ただし，a は実数で $a\neq 1/4$ ）

(大阪府立大 2019) (m20193606)

0.356 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{yy}，f_{xy}，f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極大値，極小値を与える (x,y) を決定せよ．

(関西大 2002) (m20023702)

0.357 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{yy}，f_{xy}，f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極大値，極小値を与える (x,y) を決定せよ．

(関西大 2002) (m20023703)

0.358 m, n は 2 以上の整数とし，

$$f(x,y)=x^m+y^n$$

とする．

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{yy}，f_{xy}，f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ が極値をもつための m, n の条件を求めよ. 極値をもつときは, 極値を求めよ.

(関西大 2005) (m20053702)

0.359 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ という関係がある．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ として，$(x,y)\to(r,\theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x,y)=g(r,\theta)$

(神戸大 1994) (m19943801)

0.360 次の微分計算をせよ． $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3\right)$

(神戸大 1997) (m19973805)

0.361 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta\log(x^2+y^2)$ を求めよ．

(神戸大 2000) (m20003802)

0.362 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y)=xy\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

（神戸大 2001） (m20013804)

0.363 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $g(r,\theta)=f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

（神戸大 2001） (m20013805)

0.364 $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$，$y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき，x,y に関して 2 階偏微分可能な $z=z(x,y)$ について

(1) $z_u^2+z_v^2$ を z の x,y に関する偏導関数を用いて表せ．

(2) $z_{uu}+z_{vv}$ を z の x,y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ．

ただし，z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す.

(神戸大 2003)　　(m20033804)

0.365　(1)　次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数.

$$\text{(i) } f(x,y) = e^{3x}\cos 2y\ , \qquad \text{(ii) } f(x,y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2)　関数 $f(y_1, y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11}+bx_{12}\ ,\ ax_{21}+bx_{22})$ (a, b は定数) について　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$　を計算せよ

(神戸大 2006)　　(m20063805)

0.366　xy 平面において，次の関数のうち，どれが最大値をもち，どれが最小値をもつか．理由をつけて示せ.

(1)　e^{x-y}　　(2)　$e^{x^2+y^4}$　　(3)　$(x+y)e^{-x^2-y^2}$

(神戸大 2007)　　(m20073803)

0.367　(1)　関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$　$(y > 0)$ が，関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(2)　f, g を C^2 級の関数，$c > 0$ を定数とするとき，関数 $z = f(x+cy) + g(x-cy)$ が，関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

(神戸大 2008)　　(m20083802)

0.368　$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の計算をせよ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009)　　(m20093809)

0.369　関数 $f(x,y) = 9xy - x^3 - y^3$ の極値を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093811)

0.370　$(x+y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x,\ y > 0)$. ただし, $x^a = e^{a\log x}$ と定義する.

(神戸大 2010)　　(m20103803)

0.371　x, y 実数とし,

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1)　$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2)　曲線 $z = f(x,y)$ の, 点 $(1, 1, \pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3)　$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010)　　(m20103804)

0.372　$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y) = (x+\cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ.

(神戸大 2011)　　(m20113804)

0.373　$f(u,v) = u^3 - 3uv^2\ ,\ g(u,v) = 3u^2v - v^3\ ,\ u = (e^y + e^{-y})\cos x\ ,\ v = (e^{-y} - e^y)\sin x$ のとき,
偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大 2012)　　(m20123802)

0.374 関数 $z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 9$ の極値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133803)

0.375 以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y) = 2xy - \dfrac{1}{4}(x+y)^4$ とするとき，関数 $z = f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $f(x,y) = y(x+y)^2$ とするとき，関数 $z = f(x,y)$ の極値を求めよ.

(神戸大 2014)　　(m20143803)

0.376 $u = \log(e^x + e^y + e^z)$ のとき次の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

(神戸大 2014)　　(m20143808)

0.377 $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \cosh x}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ.

ただし，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-1}}{2}$ である.

(神戸大 2016)　　(m20163803)

0.378 xy 平面上に 4 点 $P = (0,\pi),\ Q = (\pi,0),\ R = (2\pi,\pi),\ S = (\pi,2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x,y) = \cos x + \sin y$ について以下の各問に答えよ.

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を調べよ.
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016)　　(m20163808)

0.379 関係式 $y = x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta = \theta(x,y)$ について　$\Delta\theta = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$　を計算せよ.

(神戸大 2017)　　(m20173803)

0.380 $f(x,y) = \sin(xy)$ とする．以下の各問いに答えよ.

(1) f の 1 階と 2 階の偏導関数を全て求めよ.

(2) f のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) f の極値を調べよ.

(神戸大 2017)　　(m20173809)

0.381 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x, y, \theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta,\ -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

を満たすことをいう.

(神戸大 2018)　　(m20183803)

0.382 $xy-$ 平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ のとき}\end{cases}$$

として定義するとき，f の原点 $(0,0)$ での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を判定せよ．

(神戸大 2018)　　(m20183808)

0.383 xy 平面上の 4 点 $P=(1,0)$, $Q=(3,0)$, $R=(1,2\pi)$, $S=(3,2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界以上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x,y)=(4x-x^2)(\sin y+2)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ．ただし，D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である．

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193803)

0.384 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x+y$ とする．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 条件 $x^2+y^2\leq 5$ の表す領域は有界閉集合なので，$x^2+y^2\leq 5$ という条件のもとで連続関数 $f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ．この最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203803)

0.385 次のように $F(x,y)$ を定める．

$$F(x,y)=x^3-3xy+y^2-3y$$

$F(x,y)=0$ で定められる x の陰関数 y について，以下の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる x の値とそのときの y の値の組 (x,y) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた x の各値における $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ．

(3) (1) で求めた x の各値において陰関数 y は極大となるか，極小となるか，そのいずれでもないかを答えよ．

(神戸大 2021)　　(m20213805)

0.386 二次方程式 $ax^2+x+b=0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x,y)=ax^2+xy+by^2+x+y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 二変数関数 $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) を，a, b を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため，$x=x(a,b)$, $y=y(a,b)$ とかける．特に $x>0$ かつ $y>0$ となるような a, b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a,b)$ とする．このとき $V(a,b)$ は最大値を持つが，$V(a,b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ．

(神戸大 2022)　　(m20223803)

0.387 (1) a を実数の定数とする．x, y の関数

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+axy+\frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}=0\text{ かつ }\frac{\partial f}{\partial y}=0\text{ となる点}\right)$ を求め，それらが f の極大値を与える，極小値を与える，極値を与えないのどれであるか判定せよ．

(2) x, y の関数 u, v を

$$u=xy$$
$$v=e^{x^2+y^2}$$

で定める．x, y の関数

$$g(x,y)=\sin(uv)$$

に対して，$\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ を x, y で表せ．

(神戸大 2022)　　(m20223805)

0.388 x,y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x,y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である．

(1) $f(x,y)$ は $(x^2-iy^2)(1+i)+e^{x+iy}$ の実部.

(2) $f(x,y)$ は $\frac{1}{x+iy}$ の虚部.

(3) $f(x,y)=7x^6y-35x^4y^3+21x^2y^5-y^7$

(4) $f(x,y)=\sum_{k=0}^{20}(-1)^k\begin{pmatrix}40\\2k\end{pmatrix}x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.389 関数 $z=\frac{u^2(x,y)}{v(x,y)}$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ．

(鳥取大 1997)　　(m19973904)

0.390 マクローリンの定理により，関数 $f(x,y)=e^{ax-by}$ を 2 次の項まで展開せよ．ただし，a,b は定数である．

(鳥取大 1997)　　(m19973905)

0.391 $z=f(x,y), x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ f$ は C^1 級なるとき，次式を証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.392 $x^2-xy+y^2=1$ のとき，関数 $z=x+y$ の最大値および最小値を求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013904)

0.393 (1) $Z=f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$, $x=e^t$, $y=\log_e(t)$ のとき, dZ/dt を t の関数として求めよ．

(2) xy 平面上の点 (x,y) が $\phi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ で表される曲線上を動くとき, 関数 $Z=f(x,y)=x+2y+5$ が極値をとる点 (x,y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）．

(鳥取大 2006)　　(m20063902)

0.394 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \quad (a, b > 0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0, y_0, z_0), $(x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073905)

0.395 次の関数の与えられた領域における最大値と対応する座標を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1} + \sin x\ , \quad 0 \leq x \leq \pi\ .$

(2) $g(x, y) = -x^2 - x - y^2\ , \quad - \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\ .$

(鳥取大 2008)　　(m20083903)

0.396 $f(x)$, $g(x)$ を x についての 2 回微分可能な 1 変数関数とするとき，時刻 t，座標 x における 2 変数関数 $\phi(t, x)$ を $\phi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$ と定める．ただし，c は定数とする．このとき，関数 ϕ は次の関係式を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

(鳥取大 2009)　　(m20093911)

0.397 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ を求めよ.

(2) 関数 $\dfrac{1}{1 - x^2}$ の n 階の導関数を求めよ.

(3) 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ.

(鳥取大 2009)　　(m20093912)

0.398 2 次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には,

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\sin\theta$$

の関係式がある $(r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi)$；これについて，以下の問に答えよ.

(1) r を x, y のみの関数として表せ. また, θ を x, y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ.

(2a) $\dfrac{\partial x}{\partial r}$　　(2b) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$　　(2c) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 2010)　　(m20103902)

0.399 次の問に答えよ.

(1) 陰関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4 = 0$ において，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 次の関数の極値を求めよ．また，それは極大値か極小値か答えよ.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y + 9$$

(鳥取大 2011)　　(m20113902)

0.400 偏導関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ の偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 df を求めよ.

(2) 関数 $z = f(v)$ および $v = g(x, y)$ は，連続かつそれぞれの変数に関して 2 階微分可能であるとする．このとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を表す式を書きなさい.

(鳥取大 2012)　　(m20123904)

0.401 点 (x, y) が原点を中心とする半径 1 の円周上を動きまわるとき，$x \geq 0,\ y \geq 0$ の範囲で以下の値の最大・最小を求めよ．

(1) $x+y$　　(2) $x+y-rxy$　（ただし，r は正の実数）

(岡山大 2001)　　(m20014002)

0.402 曲線 $x^2-2xy+3y^2=1$ の上の点で, 原点から最も近い点と最も遠い点を求め, それぞれの点の原点からの距離を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054003)

0.403 $z=xy$ なる面上の点 $P(2,-1,-2)$ において，この面の単位法線ベクトルを求めよ．

(広島大 2001)　　(m20014106)

0.404 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ $x,\ y$ に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする．関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする．このとき, 関数 $G(t)=F\big(f(t)\,,\ g(t)\big)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f , g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y)=x^2+xy+y^3-1$ に対して, $x=1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y=g(x)$ で

$$g(1)=0\ ,\qquad F\big(x,g(x)\big)\equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054103)

0.405 実 2 変数関数　$f(x,y)=x^2+\dfrac{5}{2}y^2+3xy-y$　について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) を求めよ．ただし停留点とは，関係式 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ をともに満たす点のことである.

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ.

(3) 停留点における値 $f(x_0,y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ.

(広島大 2008)　　(m20084104)

0.406 (1) 関数 e^x , $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ.

(広島大 2010)　　(m20104101)

0.407 関数 $u(x,y)=e^{-cx-y}$（c は定数）に対して, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(広島大 2011)　　(m20114102)

0.408 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(3) 区間 $I=[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすならば，任意の $x\in I$ に対し $f(x)=0$ となる.

(4) 区間 $I=[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ が任意の $x\in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である．

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である．

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.409　2 変数関数　$f(x,y)=x^3-3xy+3x+y^3-3y^2+3y$
の極値を求めよ．ただし，x,y は実変数とする．

(広島市立大 2001)　　(m20014202)

0.410　$g(t)$ は t について 1 回微分可能な 1 変数関数とし，x,y についての 2 変数関数を $z=x\cdot g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とする．このとき，　$x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-z$　を計算せよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024202)

0.411　2 変数関数 $f(x,y)=2x^3+3x^2y-6xy^2+3y^3-3x^2$ の極値について調べよ．ただし，x,y は実変数とする．

(広島市立大 2002)　　(m20024203)

0.412　x,y は実変数, k は, 実定数とする. 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+k(2x+y)$ について以下の問に答えよ.

(1) $k=0$ のとき, $z=f(x,y)$ は極値を持たないことを示せ.

(2) $z=f(x,y)$ が極値を持つための k に関する必要十分条件を求めよ.

(3) $z=f(x,y)$ が極小値を持つとき, その値, およびそのときの x,y の値を求めよ.

(広島市立大 2005)　　(m20054202)

0.413　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x-y}}$ のマクローリン展開（点 $(0,0)$ におけるテイラー展開）を x,y に関して 2 次の項（x^2, y^2, xy の項）まで求めよ．

(広島市立大 2006)　　(m20064202)

0.414　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}$ を求めよ．

(2) x の関数 x^2e^x の n 次導関数を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(3) $z=f(x,y),\ x=g(t),\ y=h(t)$ がそれぞれ C^2 級の関数であるとき，$\dfrac{d^2z}{dt^2}$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074201)

0.415　x,y を実変数とする．このとき次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

$$f(x,y)=x^2-6x+2xy^2+2y^2$$

(広島市立大 2008)　　(m20084202)

0.416　関数 $z=e^x(\cos x+\sin y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104201)

0.417　$z=\sqrt{x^2+y^2}$ とする．

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ において，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ において，$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ 方向の微分係数（方向微分係数）を求めよ．

(3) $(x,y) = (0,0)$ において，z が全微分可能でないことを示せ．

(広島市立大 2011)　　(m20114202)

0.418 (1) 関数 $z = \cos(xy)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$ の極値と，極値をとる点を求めよ．

(広島市立大 2013)　　(m20134201)

0.419 $g(x,y) = x^y$ $(x > 0)$ の偏導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　　(m19984403)

0.420 $f(x,y) = x^2y - 4xy + y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 方程式 $f(x,y) = 0$ で表される曲線上の点 $(1,3)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124402)

0.421 $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = 0$，$f_y(x,y) = 0$ を同時に満たす x，y を求めよ．

(3) $\bigl|f(x,y)\bigr| \leqq \dfrac{1}{2}$ を示せ．

(徳島大 2013)　　(m20134402)

0.422 関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 2 次までの偏導関数を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074501)

0.423 2 変数関数 $f(x,y) = e^x(x + y^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たす (a,b) を求めよ．

(2) (1) で求めた (a,b) について，$f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ を計算せよ．

(3) $f(x,y)$ が極値を持つなら，その値は極大値か極小値かを述べ，その値を求めよ．持たないなら，その理由を述べよ．

(高知大 2014)　　(m20144502)

0.424 $\mathbb{R}^2$ の領域 D_1，D_2 を

$$D_1 = \bigl\{(x,y) \bigm| 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\bigr\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が x^2+y^2 のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x,y)=h(x^2+y^2)$$

が任意の $(x,y)\in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*)\qquad y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は x^2+y^2 のみに依存する関数であることを示せ.

(3) D_2 上の関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2-1)^2 & (x^2+y^2>1 \text{ かつ } y>0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ.

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ.

(高知大 2017)　　(m20174503)

0.425 $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) f が $x-y$ のみの関数のとき，すなわち，$f(x,y)=h(x-y)$ が任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ であることを示せ.

(2) f が $x+y$ のみの関数のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がみたす関数式を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級関数 $f_1(x,y),f_2(x,y)$ が与えられていて，f_1 が $x-y$ のみの関数，f_2 が $x+y$ のみの関数とする．f が $f=f_1+f_2$ をみたすならば，f は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

をみたすことを示せ.

(高知大 2018)　　(m20184502)

0.426 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y)=a(y-\sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x}+(\cos x)\frac{\partial f}{\partial y}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを確かめよ.

(2) $u=y-\sin x$，$v=x$ とおく．この変換のもとで，u，v の関数 $g(u,v)$ を $g(u,v)=f(x,y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x,y)$ は $y-\sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y)=a(y-\sin x)$ と表されることを示せ.

(4) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0,y)=y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x,y)$ を求めよ.

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.427 $z=\log(x^2+y^2), x=u+v, y=u-v$ とする．$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(愛媛大 2000)　　(m20004603)

0.428 領域 $D=\{(x,y)\ ;\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$ における関数

$f(x,y)=xy(1-x-y)$ の最大値を求めよ.

（愛媛大 2004）　　(m20044604)

0.429 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が定数で，$f(x)$ が微分可能のとき，$g(s,t)=\gamma+(t-\alpha)f\left(\dfrac{s-\beta}{t-\alpha}\right)$ によって定義される関数 $g(s,t)$ は次の関係式を満たすことを示せ.

$$g(s,t)=\gamma+(t-\alpha)\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)+(s-\beta)\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$$

(愛媛大 2004)　　(m20044605)

0.430 a を正の定数として $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$ とおく．このとき，関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064603)

0.431 C^2 級の 2 変数関数 $z=f(x,y)$ と 2 次元の極座標変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成は，r と θ の関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ になる.

(1) 次の等式を示せ. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を z の r と θ についての偏導関数および r と θ のみを用いて表せ.

(愛媛大 2006)　　(m20064615)

0.432 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x}} e^{-t}dt$ とおく．$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074603)

0.433 $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074611)

0.434 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x+2y$ を考える.

(1) $f(x,y)$ の 1 階偏導関数をすべて求めよ.

(2) $f(x,y)$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084604)

0.435 関数 $z=f(x,y)$ は偏微分可能であるとする. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換するとき, 次の 2 つの式が成立することを示せ.

(a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=r\cos 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}-\sin 2\theta\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$　　(b) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(愛媛大 2010)　　(m20104603)

0.436 関数 $f(x,y)=xy(1-x-y)$ に対して $f_x=f_y=0$ となる (x,y) をすべて求めよ．また f の極値を求めよ．

(愛媛大 2011)　　(m20114604)

0.437 二変数関数 $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能であり，$(x,y)=(a,b)$ において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たしている．また，一変数関数 $g(z)$ は 2 回微分可能であるとする．$F(x,y)=g\left(f(x,y)\right)$ とおくとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ と $g'\left(f(x,y)\right)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$ を示せ．

(3) さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=0$ を仮定するとき，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(a,b)=0$ を示せ．

(愛媛大 2011)　　(m20114609)

0.438 関数 $f(x,y)=x^2+2txy+y^2+2x+2y$ が極値をもつような定数 t の範囲を求めよ．また，そのときに極値を与える点の座標と極値を求めよ．

(愛媛大 2014)　　(m20144603)

0.439 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とする．$y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(愛媛大 2015)　　(m20154603)

0.440 (1) C^1 級の関数 $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して

$$
{z_x}^2+{z_y}^2={z_r}^2+\frac{1}{r^2}{z_\theta}^2
$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(x,y)=2x^4-8xy^3+y^4+5$ とする．関数 $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 y の極値を求めよ．

(愛媛大 2015)　　(m20154606)

0.441 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ．

$$
f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}
$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$
x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0
$$

を満たすとする．このとき，$z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ．

(3) 連続関数 $f(x)$ について，次の等式を示せ．

$$
\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt
$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.442 $a\neq 0$ を定数として，$f(x,y)=\log(x^a+y^a)$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ がすべての $x>0,\ y>0$ に対して成り立つように，a の値を定めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174603)

0.443 曲線 $x^2-y^2=-1$ 上の点 $(1,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174608)

0.444 $z=f(t)$ を C^1 級の関数とする．$t=\sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，$yz_x-xz_y=0$ が成立することを示せ．

(愛媛大 2017)　　(m20174609)

0.445 次の方程式で与えられる曲線の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ．

$$f(x,y)=x^3-2xy+y^2-x-3=0$$

(愛媛大 2018)　　(m20184603)

0.446 $f(x,y)=e^{2x}(x^2+y^2)$ とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ および 2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(愛媛大 2021)　　(m20214603)

0.447 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+2x^2+3y^2}$ とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\big(2,1,f(2,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(愛媛大 2022)　　(m20224608)

0.448 $f(x,y,z)=\dfrac{e^{kr}}{r}$，　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

の時，次の問に答えよ（ここで k は定数である）．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2) ラプラシアン $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ．

(九州大 1996)　　(m19964701)

0.449 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし，$f_y\neq 0$ となる点の近くで $f(x,y)=0$ により定義される関数を $y=\varphi(x)$ とする．そのとき，

(a) $\varphi'(x)$ を f_x,f_y を用いて表せ．

(b) $\varphi'(x)=0$ となる点での $\varphi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表せ．

(2) 曲線 $C:f(x,y)=xy+y^2-x^3=0$ 上の $f_y\neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め，極大か極小かを判定せよ．

(九州大 1998)　　(m19984703)

0.450 次の関数の極値を求めよ．　$f(x,y)=x^3-6xy+8y^3$

(九州大 1998)　　(m19984704)

0.451 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x,y)$ で定義される曲面の点 (a,b,c), $c = f(a,b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003) (m20034702)

0.452 2 変数関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示しなさい．

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x に関して，また y に関して偏微分可能であることを示しなさい．

(3) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べなさい．

(九州大 2006) (m20064706)

0.453 $\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す． また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x,y,z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 曲面上の点 $P = (1,1,-2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ．

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる．このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ．

(九州大 2007) (m20074703)

0.454 2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値点と極値を求めよ．

(九州大 2012) (m20124711)

0.455 (1) $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および，u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ．

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および，u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ．

(2) 領域 $D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ において，関数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(a) 領域 $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\right\}$ における $f(x,y)$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ．極大か極小かも述べよ．

(b) 単位円 $x^2+y^2 = 1$ 上での $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(c) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ．

(九州大 2014) (m20144704)

0.456 a, b, c は $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \frac{cy}{ax^2 + by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $x > 0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy$$

(3) $y > 0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^\infty f(x, y)\, dx$$

(九州大 2015)　　(m20154709)

0.457 a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.458 $a \in \mathbb{R},\ r > 0$ とする．点 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {y_1}^2 = 1 \right\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \left\{ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2 - a)^2 + {y_2}^2 = r^2 \right\}$ 上を動くものとする．

2 点 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 関数

$$f(\theta_1, \theta_2) = (r\cos\theta_2 + a - \cos\theta_1)^2 + (r\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

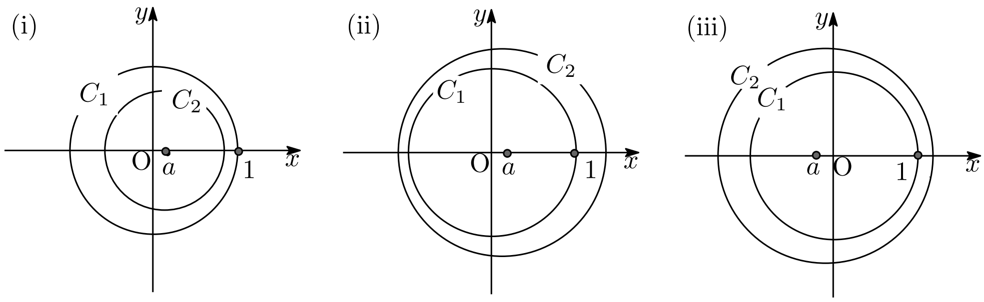
の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ．

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1, 0),\ \boldsymbol{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ．



(九州大 2021) (m20214712)

0.459 曲面 $z = x^2 + y^2$ の点 $(3, 4, 25)$ における接平面と法線の式を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034803)

0.460 $z = x^2y^2$ において $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めなさい.

(佐賀大 1999) (m19994904)

0.461 $x^2 + y^2 = 4$ について, $x = 1$ における接線の式を求めなさい.

(佐賀大 1999) (m19994905)

0.462 x と y の関数 $z = e^{(x^2+y^2)}$ について偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めなさい.

(佐賀大 2001) (m20014904)

0.463 2 変数関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について

(1) 偏導関数 f_x, f_y を計算せよ. (2) $f_{xy} = f_{yx}$ を示せ.

(佐賀大 2003) (m20034916)

0.464 以下に示す x と y の関数である z の偏微分を求めなさい.

(1) $z = y/x + x/y$ であるとき, $\partial z/\partial x$

(2) $z = y\sin(2x + 3y)$ であるとき, $\partial z/\partial y$

(佐賀大 2003) (m20034917)

0.465 関数 $f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034918)

0.466 以下の 2 変数関数に極値があるかどうか調べ, 極値がある場合はそれを求めよ.

(1) $f(x, y) = 3xy(3 - x - y)$

(2) $f(x, y) = 2x^2 - 6x^2y + 2y^3$

(佐賀大 2004) (m20044915)

0.467 $z = f(x, y)$ は全微分可能とし, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ ならば, $f(x, y)$ は θ だけの関数であることを示せ.

(佐賀大 2004) (m20044916)

0.468 $f(x, y) = x\exp(8xy)$ について, 次の 1 次偏微分及び 2 次偏微分を求めなさい. ただし, $\exp(z)$ は $\exp(z) = e^z$ を意味する.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

(佐賀大 2004) (m20044917)

0.469 関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ を x と y でそれぞれ偏微分せよ.

（佐賀大 2004） (m20044918)

0.470 辺の長さの総和が 1 の直方体のうち, 体積が最大になるものを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054904)

0.471 $z=x^y$ $(x>0)$ の偏導関数 z_x , z_y を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054915)

0.472 x と y の関数 $z=\log x-3x^2y+6$ について, 1 次偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ および 2 次偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054921)

0.473 $z=\tan^{-1}(u+v)$, $u=2x^2-y^2$, $v=x^2y$ とするとき，偏導関数 z_x, z_y を求めよ.
ただし，必ず答えは x,y の関数として書くこと.

(佐賀大 2006) (m20064916)

0.474 次の条件 $g(x,y)=0$ のもとで関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

$$g(x,y)=x+y-1\,,\quad f(x,y)=x^2+y^2$$

(佐賀大 2006) (m20064917)

0.475 ある気体の温度 T，圧力 P，体積 V が次の関係式で表せるとき，以下の (1),(2) の偏導関数を求めなさい．ただし，a,b,R は定数である． $(P+a/V^2)(V-b)=RT$

(1) $(\partial P/\partial T)_V$ (2) $(\partial^2 P/\partial V^2)_T$

(佐賀大 2006) (m20064925)

0.476 2 変数関数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074910)

0.477 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+3x-7}{2x^2-5x+3}$ を求めよ.

(2) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ を微分せよ.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ を計算せよ.

(4) 二変数関数 $f(x,y)=x^2-5xy^2+3y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(3,2)$ における x 方向, y 方向の偏微分係数を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074926)

0.478 全微分可能な 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たすとする.
$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094906)

0.479 次の関数の x に関する偏微分を求めよ.

(1) $f(x,y)=x\cos(2y)+y\sin(2x)+x\cos(3x)+y\sin(2y)$

(2)　$f(x, y) = (\ln(xy))^2$　$(x > 0,\ y > 0)$　（ただし $\ln(x)$ は底を e とする自然対数）

(佐賀大 2009)　　(m20094915)

0.480　次のそれぞれの関数 $f(x, y)$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, log は自然対数とする.

(1) $f(x, y) = \log(1 - xy)$　　　(2) $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3$

(a)　$f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{yy}$ および f_{xy} を求めよ.

(b)　$f_x = f_y = 0$ を満たす (x, y) を求めよ.

(c)　(b) で求めた (x, y) について, $f(x, y)$ が極大値か, 極小値か, あるいは極値でないか判定せよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104909)

0.481　2 変数関数 $f(x, y) = \cos(x^2 y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を，それぞれ求めよ.

(佐賀大 2011)　　(m20114912)

0.482　2 変数関数 $f(x, y) = (xy + 2)e^{x-y}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$f_x,\ f_y,\ f_{xy},\ f_{xx},\ f_{yy}$ を求めよ.

(2)　$f_x = f_y = 0$ を満たす (x, y) を求めよ.

(3)　$f(x, y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2012)　　(m20124901)

0.483　$f(x, y) = \sin(3xy)$ について，偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ を計算せよ.

(佐賀大 2012)　　(m20124913)

0.484　次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について，$f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つかどうか確かめよ．ただし，log は自然対数とする.

(1)　$f(x, y) = e^{-x} \sin y$　　(2)　$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$　　(3)　$f(x, y) = \log(e^x + e^y)$

(佐賀大 2013)　　(m20134911)

0.485　二変数関数 $f(x, y) = 3x^2 - 7xy^2 + y^2$ に関して，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．また，点 $(1, 2)$ における $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134919)

0.486　全微分可能な 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = y\sqrt{x^2 + y^2}$ を満たすとする. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(佐賀大 2014)　　(m20144913)

0.487　次の関数 z の偏導関数 $\partial z / \partial x$ を求めなさい.

(1)　$z = \sin xy$　　　(2)　$z = x^y + y^x$

(佐賀大 2015)　　(m20154905)

0.488　関数 $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たす (x, y) を求めよ.

(3) (2) で求めた (x, y) について，$f(x, y)$ が極大値か，極小値か，あるいは極値ではないか示せ.
また，極値である場合はその値を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154915)

0.489　次式で定義される関数について，以下の問いに答えよ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xy}，f_{yx} を求めよ.

(2) $f(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ.

(3) $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ.

(4) $f_{xy}(x, y)$ および $f_{yx}(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.

(佐賀大 2016)　　(m20164902)

0.490　関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{xy}{8}$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164926)

0.491　次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$　　(2) $z = \sin x \cos y$

(佐賀大 2016)　　(m20164931)

0.492　次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z = 3x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 4y + 10$　　(2) $z = e^{2x} \cos 2y$

(佐賀大 2017)　　(m20174912)

0.493　関数 $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{x-y}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である.

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174917)

0.494　関数 $f(x, y) = xy(2 - x - y)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(佐賀大 2018)　　(m20184916)

0.495　次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい.

(1) $z = x \log \dfrac{y}{x}$　　(2) $z = e^{3x} \sin 2y$

(佐賀大 2018)　　(m20184923)

0.496　次の関数を x^3 の項までマクローリン展開しなさい.

(1) e^x　　(2) $\sin x$

(佐賀大 2018)　　(m20184924)

0.497 関数 $f(x,y)=1-x^2-y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏微分 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を計算せよ．

(2) ヘッシアン $H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(3) (1) と (2) を用いて，$f(x,y)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021) (m20214901)

0.498 次の関数 z の偏導関数 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ を求めなさい．

$z=2x^2-4xy+y^2-x$

(佐賀大 2021) (m20214907)

0.499 $f(x,y)=\sin^2(x)-\cos(y)\quad\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq\pi\right)$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021) (m20214917)

0.500 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ．

(佐賀大 2021) (m20214923)

0.501 次の関数の偏微分 f_x，f_y を計算せよ．

$f(x,\ y)=2x^3-x^2y+5xy^2+3y^3$

(佐賀大 2022) (m20224906)

0.502 $z=f(x,y),\ x=uv,\ y=\dfrac{u}{v}$ のとき，偏導関数 z_u と z_v を z_x，z_y を用いて表せ．

(佐賀大 2022) (m20224916)

0.503 次の関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい．

(1) $f=3xy+2z$ (2) $f=\log x^y$

(佐賀大 2022) (m20224920)

0.504 関数 $f(x,y)=x^3+x^2+xy^2-8x-y^2$ の極値を求めよ．答えだけでなく途中経過も記載すること．

(佐賀大 2022) (m20224927)

0.505 次の２変数関数の x 偏微分 z_x を求めよ．

$z=e^{-(x^2+y^2)}$ $z_x=$ ________________

(長崎大 2004) (m20045007)

0.506 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい．

$\Psi=\cos\theta\exp(-r)$

(長崎大 2005) (m20055018)

0.507 次の式について偏微分 $\partial S/\partial a$ と $\partial S/\partial b$ を求めよ．

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-bx_i\right)^2$$

(長崎大 2005) (m20055019)

0.508 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき．

(1) $f_x(x,y,z)$，$f_y(x,y,z)$，$f_z(x,y,z)$ を求めよ．

(2) $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ.

ここで，$f_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\cdots,f_{xx}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2},\cdots$ とする.

(長崎大 2007)　(m20075003)

0.509 次の式について偏微分 $\partial^2 z/\partial x^2$ と $\partial^2 z/\partial x\partial y$ を求めよ.

$z=x^3-5xy^2+2$

(長崎大 2007)　(m20075007)

0.510 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする.

(1) a^x の微分を求めよ.

(2) $\tan^{-1}x$ の微分を求めよ.

(3) $f(x,y)=\dfrac{\tan^{-1}x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ.

(長崎大 2009)　(m20095007)

0.511 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(1) $y=\tan(2x-3)$　(2) $x^3y^3+y-x=0$

(長崎大 2010)　(m20105003)

0.512 関数 $u(x,y)=e^x\cos y$ がある. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の偏微分を求めよ.
$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$

(2) 次の式を計算せよ.
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(長崎大 2010)　(m20105009)

0.513 $z=f(xy)$ のとき, xz_x-yz_y を計算せよ. ただし, z_x は z の x 偏微分, z_y は z の y 偏微分である.

(長崎大 2010)　(m20105012)

0.514 関数 $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$　$(0\leqq\ x<2\pi,\ 0\leqq\ y<2\pi)$ の極値を求めよ．求める過程も記述すること.

(長崎大 2011)　(m20115015)

0.515 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$ の最大値，最小値を求めよ.

(熊本大 2004)　(m20045202)

0.516 関数 $f(x,y)=e^{x^3y}$ の 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

(熊本大 2007)　(m20075201)

0.517 $x^2+xy+2y^2=1$ なる式から定まる陰関数 y について，以下の問いに答えなさい.

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(2) 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めなさい.

(熊本大 2014)　　(m20145201)

0.518 以下の関数を全微分せよ.

$$z = e^{-x}\sin 2y$$

(熊本大 2018)　　(m20185201)

0.519 $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ f(x,y) = x^2y + 2y$ のとき，$f(x(t), y(t))$ を t で微分せよ.

(熊本大 2019)　　(m20195201)

0.520 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 　$((x,y,z) \neq (0,0,0))$ において，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ.

(宮崎大 2001)　　(m20015301)

0.521 関数 $f(x,y) = x^3 - 12xy + 6y^2$ の極値を求めよ.

(宮崎大 2001)　　(m20015302)

0.522 2 変数関数 $z = f(x,y) = e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の上の点 $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

（宮崎大 2004）　　(m20045301)

0.523 2 変数関数 $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) を全て求めよ.

(2) (1) で求めた点について極大・極小の判定を行ない，$f(x,y)$ の極値を求めよ.

（宮崎大 2004）　　(m20045302)

0.524 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ について, 次の各問に答えよ. ただし, α は $\alpha^2 \neq 1$ を満たす定数とする.

(1) $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ に極値があれば, 全て求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055302)

0.525 変数 x , y , z から, 変数 u , v , w への変数変換を

$$u = x\cos z - y\sin z\ , \qquad v = x\sin z + y\cos z\ , \qquad w = z$$

と定めたとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 次の恒等式が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1$$

(2) 関数 $f = e^{-\sqrt{u^2+v^2}}\cos w$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を x , y , z の関数として求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055303)

0.526 (1) $y = |x-1|$ のグラフを描け.

(2) $f(s,t) = |s-1| + |t+1|$ の最小値が存在すれば、それを求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065303)

0.527 空間内の集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} -a+b \\ -a \\ 2b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \text{ は実数} \right\}$ と点 $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 点 P が W 内の点でないことを示せ．

(2) W 内の点の中で点 P との距離が最短であるような点 Q を求めよ．

(宮崎大 2007)　　(m20075301)

0.528 2 変数関数 $f(x,y) = \log(1 + x^2 + 2y^2)$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくとき，関数 f の r, θ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を x, y のみを用いて表せ．

(宮崎大 2007)　　(m20075302)

0.529 関数 $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$ の極値および極値を与える点を求めよ．また，その極値が，極大値，極小値のどちらであるのか答えよ．

(宮崎大 2007)　　(m20075303)

0.530 $z^2 = -xy + x - 5y + 18$ を満たす実数の組 (x,y,z) によって定まる空間内の曲面を S とする，このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 原点と曲面 S 上の点 (x,y,z) との距離を r とするとき，r^2 を x, y で表した式 $f(x,y)$ を求めよ．

(2) (1) で得られた式 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2008)　　(m20085302)

0.531 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 - y^2$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値があれば，すべて求めよ．

(宮崎大 2009)　　(m20095303)

0.532 x と y の 2 変数関数

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y$$

について, 次の問に答えよ. ただし, α は定数で $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ とする.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ が極値を持つための α の条件を示し, その場合の極値と, その極値が極大値あるいは極小値のどちらであるか答えよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105303)

0.533　実数 $x,\ y$ の 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値があれば，それらをすべて求めよ．

(宮崎大 2011)　　(m20115303)

0.534　u,v に関する 2 変数関数 $z=\dfrac{e^{-u}}{v}$ と，x,y に関する 2 変数関数 $u=\dfrac{y}{x}$，$v=x^2+y^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ を u と v で表せ．

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を x と y で表せ．

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x と y で表せ．

(宮崎大 2012)　　(m20125304)

0.535　x と y の 2 変数関数

$$f(x,y)=e^{-ax^2-by^2}$$

について，次の問に答えよ．ただし，$a,\ b$ は定数で，$a>0,\ b>0$ とする．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2013)　　(m20135305)

0.536　x と y について何回でも偏微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$x=x(u,v)=u\cos\alpha-y\sin\alpha\ ,\quad y=y(u,v)=u\sin\alpha+v\cos\alpha$$

を代入して，合成関数 $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ を作る．ここで，α は実数の定数とする．これについて，次の各問に答えよ．ただし，以下では関数の引数を省略しており，例えば $\dfrac{\partial g}{\partial u},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ は，それぞれ $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ の意味である．

(1) 等式 $\dfrac{\partial g}{\partial u}=a_1\dfrac{\partial f}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を満たす定数 $a_1,\ a_2$ を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}=b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+b_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(3) 等式 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=c_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c_3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を満たす定数 $c_1,\ c_2,\ c_3$ を求めよ．

(宮崎大 2014)　　(m20145305)

0.537 2 つの 2 変数関数

$f(x,y)=x^3+2x^2y-4x+y$,

$g(x,y)=e^{-x^2-y^1}$

について，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ における値 $f(0,0)$，$g(0,0)$，そして $(x,y)=(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$，$g_x(0,0)$，$g_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $z=f(x,y)$，$z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\big(0,0,f(0,0)\big)$，$\big(0,0,g(0,0)\big)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ．
ただし，曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\big(a,b,h(a,b)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-h(a,b)=h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$$

である．

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば，交わりの図形を表す方程式を求めよ．交わらないならばその理由を書け．

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.538 関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x-8y-2$ について．次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求め，それらが極大値であるのか，極小値であるのか，答えよ．

(宮崎大 2016)　　(m20165301)

0.539 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)\ \text{のとき}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)\ \text{のとき})\end{cases}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，$f_x(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ を示せ．

(3) $f_{xy}(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=0$ を求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175304)

0.540 関数 $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ のとき，$f_x(x,\ y)$ と $f_{xx}(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 次のそれぞれの極限について，存在する場合はその値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f_{xx}(x,\ y)\right)$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f_x(x,\ y)\right)$

(宮崎大 2018)　　(m20185304)

0.541 2 変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ について，次の各問に答えよ．

(1) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたすべての (x,y) について，極値を与える点であるか，答えよ．極値を与える点であるときは，極大値を与えるのか極小値をあたえるのかについても答えよ．

(宮崎大 2019)　(m20195303)

0.542 2 変数関数 $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

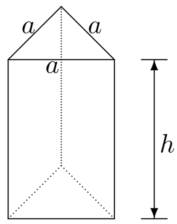
(3) (2) で求めたすべての (x,y) について，極値を与える点であるか，答えよ．極値を与える点であるときは，極大値を与えるのか極小値を与えるのかについても答えよ．

(宮崎大 2020)　(m20205302)

0.543 2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x^2y)$ の 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(宮崎大 2022)　(m20225302)

0.544 断面の一辺の長さ a，長さが h の三角柱の体積が最大になるように a と h を定めるとき，a と h の比を求めよ．ただし，$a+h=20$ とする．



（鹿児島大 2001）　(m20015412)

0.545 $f(x,y)=x^2+2xy+2y^2-2x-2y+1$ の極値を求めよ．

(鹿児島大 2009)　(m20095421)

0.546 (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^3$, $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ のとき，$\dfrac{d}{dt}f\,(x(t),\ y(t))$ を計算しなさい．

(2) $g(x)=e^x$, $x=r\cos t$ のとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}g(r\cos t)$，$\dfrac{\partial}{\partial r}g(r\cos t)$ を計算しなさい．

(鹿児島大 2018)　(m20185414)

0.547 次の関数について x，y 方向の偏微分の和を求めよ．

$$f(x,y)=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$$

(鹿児島大 2018)　(m20185431)

0.548 $f(x,y)=x^2y^3-2xy^2+\dfrac{x}{y}$ の x,y に対する偏導関数をそれぞれ求めよ．

(鹿児島大 2021)　(m20215415)

0.549 半径 a の球に内接する直円柱のうちで，体積が最大になる直円柱の高さと体積を求めなさい．

(鹿児島大 2021)　(m20215419)

0.550 次の式が与えられている．　$f(x,y)=x^2y+y^2\cos x+y^3$

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めなさい．

(室蘭工業大 2006)　(m20065507)

0.551 $yz+zx+xy=1$ で与えられる $z(x,y)$ の 2 次偏導関数を求めよ．

(室蘭工業大 2007) (m20075508)

0.552 2 つの関数

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \tag{2}$$

$$g(x)=e^{-\alpha x} \quad (\alpha>0) \tag{3}$$

とする．

(1) 合成関数 $h(x)=f(g(x))$ を求めよ．

(2) 関数 $h(x)$ の 1 階の導関数 $h'(x)$ と，2 階の導関数 $h''(x)$ を求めよ．

(3) $\alpha=1$ の場合の $h(x)$ のグラフを図示せよ．

(4) $h'(x)$ を α の関数とみなした場合の，α に関する偏導関数 $\dfrac{\partial h'}{\partial \alpha}$ を求めよ．

(5) $h'(0)$ を α の関数として，そのグラフを図示せよ．

(室蘭工業大 2009) (m20095504)

0.553 2 変数関数 $z=z(x,y)$，$x(r,\theta)=r\cos\theta$，$y(r,\theta)=r\sin\theta$ の偏微分に関する以下の問いに答えよ．ただし，以下では，$r=0$ の場合は除いて考える．

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$，$\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となることを示せ．

(室蘭工業大 2015) (m20155512)

0.554 下に示す関数 $f(x,y)$ について以下の問に答えよ．

$$f(x,y)=x^2+y^2-6x-2y+xy+11$$

(1) $f(x,y)$ を x で偏微分せよ．

(2) $f(x,y)$ を y で偏微分せよ．

(3) $f(x,y)$ の極小値を求めよ．

(室蘭工業大 2017) (m20175510)

0.555 関係式 $x^3-3xy+y^3+2=0$ で定まる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(岡山県立大 2005) (m20055603)

0.556 関係式 $x^3-3xy+y^3=0$ で定まる陰関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ．

(岡山県立大 2006) (m20065603)

0.557 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ を求めよ．

(岡山県立大 2007) (m20075604)

0.558 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+1$ の極値を求めよ．

(岡山県立大 2008) (m20085603)

0.559 下記の関数 $f(x,y)$ について，次の問いに答えよ．ただし，α と β はそれぞれ正の定数であるとする．

$$f(x,y)=\cos\alpha x\, e^{-\beta y}$$

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y)$ をそれぞれ導出せよ.

(2) 求めた偏導関数に関して, $x=\dfrac{\pi}{2\alpha},\ y=\dfrac{1}{\beta}$ における偏微分係数をそれぞれ求めよ.

(香川大 2014) (m20145701)

0.560 以下に示す関数の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を求めよ.

$$z=\frac{x^3+y^2}{x-y}$$

(香川大 2017) (m20175702)

0.561 $z=2y^3-x^2y+3$ の $(x,y)=(2,1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(香川大 2018) (m20185702)

0.562 $z=\sin\sqrt{x^2+y^2},\ x=\sqrt{2}\,t,\ y=1-t^2$ のとき $\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

(香川大 2019) (m20195702)

0.563 $z=\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ のとき偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を求めよ.

(香川大 2020) (m20205702)

0.564 $z=e^{x^2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right),\ x=\sqrt{2}t,\ y=e^{t^2}$ のとき, $\dfrac{dz}{dt}$ を t を用いて表せ.

(香川大 2021) (m20215701)

0.565 $z=2x^3+x^2y+3y^2+1$ の $x=1,\ y=3$ における接平面の方程式を求めよ.

(香川大 2021) (m20215702)

0.566 次の関数が $(x,y)=(0,0)$ において連続かどうか判定せよ．理由も述べること.

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき} \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(香川大 2022) (m20225702)

0.567 $z=\log_{10}(x^2+y^2+1)$ の $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(香川大 2022) (m20225703)

0.568 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(2) $z=\sin^{-1}(xy)\,,\ x=\sin(u+v)\,,\ y=\sin(u-v)$ とするとき, 合成関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005) (m20055807)

0.569 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の 2 次偏導関数を求めよ.

(a) $z=2x^3-3x^2y+4xy^2$

(b) $z=\sin(2x+3y)$

(2)　$z=f(x,y)$, $y=g(x)$ のとき, 次の式を証明せよ.

$$\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}$$

(島根大 2005)　　(m20055812)

0.570　$z=\sin xy$ について，次の問に答えよ.

(1)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ.　　(2)　$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.　　(3)　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めよ.　　(4)　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

(島根大 2006)　　(m20065801)

0.571　$f(x,y)$ を C^2 級の関数とし，θ を定数として　$x=u\cos\theta-v\sin\theta$,　$y=u\sin\theta+v\cos\theta$　とする.

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.　　(2)　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(島根大 2006)　　(m20065810)

0.572　$z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$ のとき, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075806)

0.573　次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ を満たすことを示せ.

(1)　$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$　　(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2007)　　(m20075810)

0.574　次の問いに答えよ. a,b,c はすべて正の数とする.

(1)　3 次元空間において頂点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ をもつ三角形の面積 S を求めよ.

(2)　3 次元空間において頂点 $O(0,0,0)$, P, Q, R をもつ四面体の体積を V とする. (1) で求めた S と V との比 S/V を考える. a,b,c が $abc=1$ をみたしながら変化するときの S/V の最小値を求めよ.

(島根大 2008)　　(m20085803)

0.575　次の関数 $u=u(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ.

(1)　$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$　　(2)　$\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2008)　　(m20085807)

0.576　(1)　次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2)　$f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(a)　f の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(b) $x=\sin(u+v)$, $y=\cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095803)

0.577 (1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ．

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ．

(3) 関数 $f(x,y)=xy(x-y+1)$ の極値を求めよ．

(島根大 2010)　　(m20105803)

0.578 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\exp(x^3-y^3)-1}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big) \end{cases}$ に対して，$f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)=\dfrac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}$ $(xy\neq 0)$ の極値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125808)

0.579 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x+6y$ の極値を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175808)

0.580 $z=f(x,y)$, $x=\dfrac{1}{2}(u-v)$, $y=\dfrac{1}{2}(u+v)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ならば，1 変数関数 g が存在して $z=g(x+y)$ と表せることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185807)

0.581 $f(x,y)=axy-x^3-y^3$ とする．ただし，$a>0$ である． $f(x,y)$ の極値が 1 になるときの a の値を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195807)

0.582 陰関数 $x^2+xy+y^2=3$ で定まる x の関数 y の極値および極値を与える x の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y を用いて表せ．

(2) $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) (2) において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の符号を調べることによって，y の極値および極値を与える x の値を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165912)

0.583 (1) 関数 $z=e^x\sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $z=f(ax+by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ．　(a, b は定数)

(3) 関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ について,

$$(\triangle u =)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ．ここで，$\triangle$ はラプラシアンである.

(東京都立大 2021)　(m20215903)

0.584 (1) $(x,\ y)$ が $(0,0)$ に近づくとき，$f(x,\ y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{xy}$ の極限を求めよ.

(2) $f(x,\ y) = xy^2 - x^2y - 2 = 0$ のとき，極値を求めよ.

(東京都立大 2022)　(m20225904)

0.585 領域 $D : x^2 + y^2 < 4$ における関数 $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y$ の極値を求めよ.

(滋賀県立大 2005)　(m20056004)

0.586 $f(x,y) = x^3 + 8y^3 + 12xy$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ.

(滋賀県立大 2016)　(m20166003)

0.587 関数 $f(x,y) = \cos^{-1}\bigl(x^2 + 3y^3\bigr)$ について，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2021)　(m20216002)

0.588 次の 2 変数関数 $z = z(x,y)$ の極値を求めよ. ただし, x の定義域は $x > 0$ とする.

$$z = z(x,y) = -\frac{1}{2}xy - \log x + y^2 + 3y + 2$$

(宇都宮大 2010)　(m20106104)

0.589 関数 $z = f(x,y)$ の x と y が r と θ の関数で $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係にあるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(宇都宮大 2014)　(m20146107)

0.590 縦が $6cm$，横が $8cm$ の長方形において，各辺の長さを $0.1cm$ 伸ばしたときの対角線の長さの増加量の近似値を全微分を用いて求めなさい.

(宇都宮大 2019)　(m20196108)

0.591 曲面 $\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\ :\ z = x^2 + xy + y^2\}$ の点 $(1,-1,1)$ における法ベクトルを求めよ.

(はこだて未来大 2007)　(m20076306)

0.592 $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2007)　(m20076405)

0.593 $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6x + 1$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2008)　(m20086404)

0.594 $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 1$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2009)　(m20096404)

0.595 $f(x,y) = 2x^3 + 24xy^2 - 3x^2 + 48xy + 12y^2 + 24x + 24y$ の極値を求めよ.

(東京海洋大 2010)　(m20106404)

0.596 $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+2y^2+4x+4y$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2011) (m20116404)

0.597 関数 $f(x,y)=3x^3+3x^2y-y^3-3x$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2012) (m20126405)

0.598 関数 $f(x,y)=x^3+3x^2y+2y^3+3x^2-12y$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2016) (m20166408)

0.599 円筒形の容器がある．上面と底面に使われている板材の単位面積当たりの重量は，側面に使われている板の 3 倍である．次の問いに答えよ．ただし，容器の半径を r(cm)，高さを h(cm)，重量を W(g)，容積を V(cm^3)，側面に使われている板の単位面積当たりの重量を w(g/cm^2)，円周率を π とする．また，板の厚みは無視できるほど薄い．

(1) W を r, h, w および π を用いて表せ.

(2) V を r, h, π を用いて表せ.

(3) V を一定として，最も小さい W でこの容器を作った時の r と h の比を求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216404)

0.600 関数 $f(x,y)=x^3y-3x^2y+2y^3$ の極値を求めよ．必要ならば，$f(0,y)$ の増減を調べよ．

(東京海洋大 2021) (m20216409)

0.601 $f(x,y)=2x^4+8x^3+2x^2y+18x^2+8xy+y^2+16x+4y$ の極値を求めよ．

(東京海洋大 2022) (m20226404)

0.602 曲面 $z=\sqrt{x^2+y}$ の $(x,y)=(1,3)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(和歌山大 2007) (m20076505)

0.603 曲面 $z=e^{x-y-1}$ の $(x,y,z)=(3,2,1)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(和歌山大 2010) (m20106507)

0.604 関数 $z=\sin(2x-3y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めなさい．

(和歌山大 20221) (m20216503)

0.605 関数 $z=x+y^2$ のグラフ上の点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(和歌山大 2022) (m20226503)

0.606 関数 $f(x,y)=x^3-xy^2$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(東京工科大 2010) (m20106903)