[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：6 重積分

0.1 円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　(m20030101)

0.2 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を $r,\ \theta$ の式で表せ．

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を $r,\ \theta$ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする．

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　(m20150101)

0.3 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$　　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy\ ,\quad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + 3y^2 \leqq\ 1\right\}$

(北海道大 2017)　(m20170104)

0.4 次の定積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dxdy \qquad D\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2 \quad (a > 0)$$

(北見工業大 2004)　(m20040204)

0.5 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\, dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq\ x \leqq\ 1\,,\ 2 \leqq\ y \leqq\ 3\}$ とする．

(北見工業大 2009)　(m20090204)

0.6 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,,\ D: 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4$ を求めよ.

$\left(\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおくとよい.} \quad \right)$

(北見工業大 2011)　　(m20110205)

0.7 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2} dxdy,\ D: 0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x$ を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120206)

0.8 積分 $J = \displaystyle\iint_D (1-x-y)dxdy$ を計算せよ. ただし, $D\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$ とする.

(北見工業大 2017)　　(m20170205)

0.9 $D = \left\{(x, y)\,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2018)　　(m20180204)

0.10 平面の部分集合 D を次で定める.

$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190204)

0.11 平面の部分集合 D を次で定める:

$D = \{(x, y)\ |\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y \leqq 2\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \displaystyle\iint_D xy\ dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190211)

0.12 平面の部分集合 D を次で定める:

$D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x \geqq 0,\ y \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \displaystyle\iint_D xy^2 dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2022)　　(m20220205)

0.13 重積分 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x-y} dydx$ に関し, 次の問に答えなさい.

(1) この重積分の積分範囲を図示しなさい.

(2) この重積分の値を求めなさい.

(3) この重積分の積分順序を変更した式を示しなさい.

(4) 積分順序を変更した式から, 重積分の値を求める計算をしなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060304)

0.14 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部と円柱 $x^2+y^2=ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい．

(1) 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ を図示しなさい．

(2) 極座標 (r,θ) を用い $x=r\cos\theta$ ， $y=r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい．

(3) 共通部分の体積を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080304)

0.15 重積分

$$I=\iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+y^2\leqq\ 1$$

の共通部分である.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(3) $x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100304)

0.16 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ 2y\right\}$ とするとき，次の重積分について以下の問いに答えなさい．

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) x , y を極座標変換したとき，領域 D が移る領域 G を求め，図示しなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，重積分 I を求めなさい．

(岩手大 2011)　　(m20110303)

0.17 球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ ～ $\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい．

直交座標 (x,y,z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z=\boxed{\text{（イ）}}$ で表される．

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる．

$$V=2\iint_D\boxed{\text{（イ）}}\,dxdy\cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 $(r,\ \theta)$ を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z=\boxed{\text{（カ）}}$ で表される．

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい．

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120303)

0.18 次の各問いに答えなさい．

(1) $D_1 = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のとき，領域 D_1 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_1} (x + 2y)dxdy$$

(2) $D_2 = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq -x^2 + 4x\right\}$ のとき，領域 D_2 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい．

$$\iint_{D_2} xdxdy$$

(3) $D_3 = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$ のとき，領域 D_3 を図示しなさい，また，次の 2 重積分の値を極座標に変換して求めなさい．

$$\iint_{D_3} x^2\, dxdy$$

(岩手大 2013)　　(m20130303)

0.19 次の立体について，以下の問いに答えなさい．

曲面 $x^2 + y^2 = z^2$，平面 $z = 0$，平面 $z = 1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい．

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる． $\boxed{\quad（ア）\quad}$ ， $\boxed{\quad（イ）\quad}$ にあてはまる式を答えなさい．

$$V = \iint_D \left(1 - \boxed{\quad（ア）\quad}\right)dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \boxed{\quad（イ）\quad}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.20 曲面 $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \ \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\quad（ア）\quad}$ から $\boxed{\quad（エ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\quad（ア）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（イ）\quad}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\quad（ウ）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（エ）\quad}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\quad（オ）\quad}$ から $\boxed{\quad（キ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \boxed{\quad（オ）\quad}\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\quad（カ）\quad}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\quad（キ）\quad}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる.

$$V = 2\iint_{D_1} \boxed{\quad（キ）\quad} \, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい.

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.21 次の問いに答えなさい.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (ただし, $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$) によって，xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.22 a, b, R を定数（ただし,$R > 0$ ）とし, 積分

$$I = \iint_D (x^2+ay+b)dxdy$$

を次の手順で計算しよう. ただし, 領域は

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R^2\} \quad \text{である.}$$

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2+2b)dxdy$ を計算しなさい.

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D a(x+y)dxdy$ を計算しなさい.

(3) I_1, I_2 から,

$$I = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

である. 当てはまる式を上の欄に答えなさい.

(秋田大 2004)　　(m20040403)

0.23 (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき, 行列 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2 \leqq\ R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005)　　(m20050406)

0.24 (1) $x = u-w,\ y = u+w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ.

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする.

$y = x\ ,\quad y = -x\ .\quad y = x+2\ ,\quad y = -x+4$

このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(秋田大 2008)　　(m20080407)

0.25 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ．ここで，$D=\{(x,y)\mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x+y \leqq 1\}$ である．

(秋田大 2009)　　(m20090404)

0.26 xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x(a-x),\ 0 \le z \le by^2$$

ただし，a,b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1) G を平面 $x=\dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2) G の体積 V を求めよ．

(3) a と b に関係 $b=e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940501)

0.27 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta=a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta\quad(a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2 \le a^2$ が，2 平面 $z=ax$，$z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.28 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビアン $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006)　　(m20060501)

0.29 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(東北大 2006)　　(m20060506)

0.30 領域 $D=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0\}$ での広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(4+2x+y)^3}$ の値を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070504)

0.31 x と y を実数とし，関数 $f(x,y)$ を　$f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$　と定義する．
不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x,y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け.　　(2) 領域 R の体積を求めよ.

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z=f(x,y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.32 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\ ,\ x^2\le y\le 1\}$ で　$\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\ dxdy$　の値を求めよ.

(東北大 2008)　　(m20080508)

0.33 領域 $D = \{(x, y) \,:\, 0 \leq x + y \leq 2\,,\ 0 \leq x - y \leq 2\}$ として，次の計算をせよ．

$$\iint_D (x - y)e^{x+y} dxdy$$

(東北大 2009)　　(m20090508)

0.34 重積分

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

の値を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110507)

0.35 (x, y) 座標平面において，4 本の直線

$$y = x, \quad y = x - 1, \quad y = -x + 1, \quad y = -x + 3$$

で囲まれた閉領域 D を考える．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{x - y}{x + y}\, dxdy$$

を，変数変換 $u = x + y,\ v = x - y$ を用いて求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150510)

0.36 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D の面積 S を求めよ．

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S : \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.37 (1) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2 dxdy$ の値を求めよ．

(2) $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160507)

0.38 xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S} : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4z$ および平面 $\boldsymbol{P} : z = a(x + y + 2)$ について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) 平面 $y = -1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め，図示せよ．

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える．$a = 1$ のとき，$\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ．

(4) $a = 1$ のとき，曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170502)

0.39 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2+y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.40　重積分

$$\iint_D (3x^2+y^2)dxdy \qquad \left(D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190510)

0.41　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) f は $(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210510)

0.42　極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ.

$$I = \iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ.

(4) 重積分 I を計算せよ.

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.43　$D = \{(x,y)\,;\ 0 \leq x+y \leq \pi, 0 \leq x-y \leq \pi\}$ としたとき，

$$\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy$$

を求めよ.

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970605)

0.44 n 次元における半径 r の "球" の "体積" を考えましょう．３次元においては半径 r の球の体積は，原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です．３次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，１次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，２次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では４次元において,「半径 r の "球" の "体積"」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 n でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980601)

0.45 次の２重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}dxdy, \qquad D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000608)

0.46 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030608)

0.47 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x^2+y^2 \leq 1\right\}$ とするとき，D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f) = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ．また，f が任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) = -f(-x,-y)$ を満たすとき，$I(f) = 0$ であることを定義に従って示せ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110601)

0.48 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

を計算することにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190609)

0.49 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1+\cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

0.50 曲線 $y = x^2$ と 直線 $y = a\ (a > 0)$ で囲まれた図形 (図１ 灰色部分）を考える．この図形に一定の厚みを持たせて平面上に立てた場合（図２）に，点 O を接触点として安定に立っていられるかどうか調べたい．

(1) この図形の重心を求めよ．この場合厚みが一定であるので，重心は図形に属する各点の x, y 座標の平均となる．

(2) 図形がわずかに傾き，平面との接触点が点 O から微小量 u だけずれた時 (図３)，その新しい接触点 P における法線と y 軸との交点 Q を求めよ．

(3) 点 O で安定に立っているための，定数 a についての条件を求めよ．

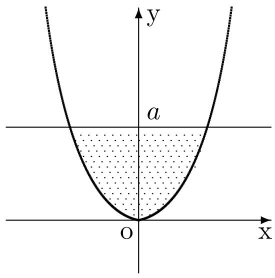


図１

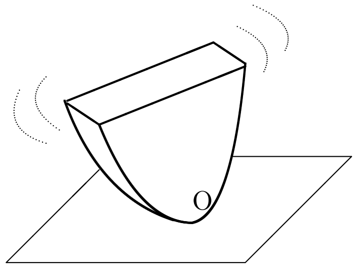


図２

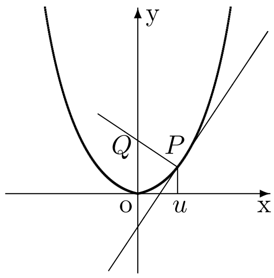


図３

(東京大 1999)　　(m19990701)

0.51 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I=\int_V (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J=\int_U (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W : x^2+y^2+z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K=\int_W (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.52 直交座標空間 (x, y, z) において，$x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ で表される円筒の内部で，xy 平面の上方 $(z \geq 0)$，かつ $z=x$ で与えられる平面の下方 $(z \leq x)$ にある部分の体積を求めよ．

(東京大 2003)　　(m20030701)

0.53 以下の設問に答えよ．ただし，$a>0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ．$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である．$\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

0.54 (1) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$ とする.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 + 1 \leq 0, \quad 1 \leq z \leq c$$

(2) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a > 0$, $b > 0$ とする.

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

(東京大 2005)　　(m20050704)

0.55 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0, y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.56 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 dx\, dy \qquad , \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a, b > 0)$$

を求めよ.

(東京工業大 1996)　　(m19960802)

0.57 (x, y) 平面内の領域 $D = \{\, 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \,\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\, dx\, dy$ を計算せよ.

(東京工業大 1998)　　(m19980801)

0.58 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\, x^{2n} + 2y^{2n} + 1\,)\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ の値を求めよ.

(東京工業大 1999)　　(m19990801)

0.59 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

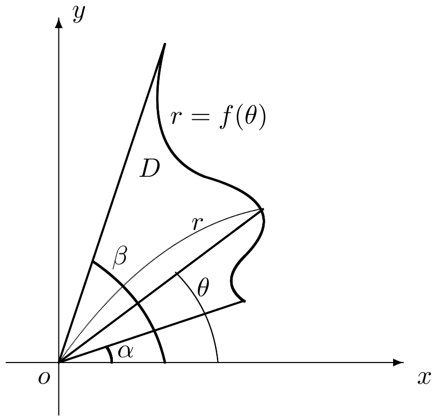
および，連続曲線

$r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$

で与えられることを示せ.



(東京工業大 2000)　　(m20000802)

0.60 $G(x,y,t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x,y,t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \qquad (t>0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t>0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,dx\,dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.61 (1) 次の積分をせよ． $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D: 0 \le x \le y \le 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2 = 4ay$, $x^2+y^2 = ay$ に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.62 $a>0$ に対して積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020804)

0.63 積分 $\displaystyle I = \int_0^{\infty}\left\{\int_0^x (x+y)e^{-(x+y)}\frac{dy}{2y+1}\right\}dx$ の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030801)

0.64 次の 2 つの積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2}dx$ （$a>0$ は定数）．

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{1}{xy(x+y)}dxdy$

(東京工業大 2004)　　(m20040802)

0.65 a, b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqq\ 1}\left(\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}\right)dxdy$$

(東京工業大 2005)　　(m20050802)

0.66 次の重積分の値を求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ とする． $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}(ax^2+by^2)dxdy$

(東京工業大 2007)　　(m20070802)

0.67 $u(x,y) = xy^2$, $v(x,y) = x+y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\ , \quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4}+y^2 \le a^2\right)$$

ただし，a は正の定数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080802)

0.68 $\beta,\gamma<0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)^{\beta}dxdy$ 　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\ge 1}(x^2+y^2)^{\gamma}dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.69 次の二重積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2-y^2+2xy}}{1+(x+y)^2}\,dxdy$$

(東京工業大 2010) (m20100802)

0.70 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ との共通部分の体積 V を求めよ．

(東京工業大 2011) (m20110804)

0.71 次の広義積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_{x \geq 0,\ y \geq 0} e^{-x^2-xy-y^2}\,dxdy$

(東京工業大 2012) (m20120802)

0.72 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，平面 $z=0$，曲面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ．ただし，a, b は正の実数とする．

(東京工業大 2013) (m20130804)

0.73 2 つの円柱 $x^2+y^2 \leqq a^2,\ y^2+z^2 \leqq a^2\ (a>0)$ の共有部分の体積 V を求めよ．

(東京工業大 2014) (m20140802)

0.74 (x, y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2=x, \quad y^2=3x, \quad xy=1, \quad xy=2$$

で囲まれた領域を D とする．

(1) $u=\dfrac{y^2}{x},\ v=xy$ とするとき，D は (u, v) 平面内のどのような領域にうつるか．

(2) 積分

$$I=\iint_D e^{xy}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(東京工業大 2015) (m20150802)

0.75 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\left\{(x, y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq x\right\}$

(東京工業大 2016) (m20160804)

0.76 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq cx$$

(東京工業大 2017) (m20170804)

0.77 次の重積分を求めよ．ただし，$a,\ b$ は正の実数とする．

$$\iint_D x^4dxdy \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

(東京工業大 2018) (m20180804)

0.78 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2+y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019)　　(m20190804)

0.79 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x|+|y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2} dxdy$$

(東京工業大 2020)　　(m20200804)

0.80 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x=e^z\cos z\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x=0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2-2x+y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\ dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.81 $D=\left\{(x,y)\,|\,1<x<2,\ \frac{1}{2}<y<2\right\}$ で $\displaystyle\iint_D (x^2-8xy)dxdy$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　　(m19960904)

0.82 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy$ の値を，積分の順序を変更して求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060906)

0.83 xy 平面において曲線 $y=\log x$ と x 軸と直線 $x=2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy$

(東京農工大 2007)　　(m20070903)

0.84 (1) 領域 $D\ :\ 0 \leqq\ x \leqq\ 1\ ,\ x^2 \leqq\ y \leqq\ 2-x$ における次の重積分を求めなさい． $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+1}\ dxdy$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$ を，$t=x-\dfrac{1}{x}$ と置いて求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080903)

0.85 次の定積分，二重積分の値を求めなさい．ここで，$\tan^{-1}x$ は，$\tan x$ の逆関数（アークタンジェント）のことである．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \geqq\ 1\}$

(東京農工大 2009)　　(m20090904)

0.86 領域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0\ ,\ y \geqq\ 0\}$ における次の二重積分の値を求めなさい．

$$\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}-x^3\right)dxdy$$

(東京農工大 2010)　　(m20100903)

0.87 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\frac{\pi}{4}\ ,\ 0\leqq\ x\leqq\ \sin y\right\}$ における次の重積分 A および B の値を求めなさい.

$$A=\iint_D\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy\ ,\qquad B=\iint_D\sqrt{1-x^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2011)　　(m20110903)

0.88 領域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ における次の二重積分 I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

(東京農工大 2012)　　(m20120902)

0.89 以下の広義積分の値を求めなさい．ただし log は自然対数を表す.

$$\iint_D(x-y)\log(x+y+1)dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\ ,\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1\right\}$$

(東京農工大 2013)　　(m20130903)

0.90 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 3,\ \frac{x^2}{9}\leqq\ y\leqq\sqrt{4-x}\right\}$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150902)

0.91 領域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ x,\ y\geqq\ 0\}$ における次の 2 重積分 I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D x^2y\,dxdy$$

(東京農工大 2016)　　(m20160902)

0.92 xyz 空間の 2 つの曲面 $S_1: z=x^2+2x,\ S_2: z=-y^2+4y-1$ によって囲まれた部分の体積を求めなさい.

(東京農工大 2017)　　(m20170902)

0.93 領域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqq 2\right\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{2-x^2-4y^2}dxdy$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2018)　　(m20180902)

0.94 領域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+2xy+5y^2\leqq 1\right\}$ における，次の 2 重積分 I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D(x+y)^2dxdy$$

(東京農工大 2019)　　(m20190902)

0.95 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}dx\right)dy$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2020)　　(m20200902)

0.96 重積分 $\displaystyle\iint_D(x-y)e^{x+y}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x-y\leqq 2,\ 0\leqq x+y\leqq 3\right\}$ の値を求めなさい.

(東京農工大 2022)　　(m20220903)

0.97 関数

$$u=x^2-xy+y^2\ ,\qquad v=x^2+xy+y^2$$

によって定められる (x,y) 平面から (u,v) 平面への写像 F を考える．(x,y) 平面の円の内部

$$D\ :\ x^2+(y-1)^2\leqq\frac{1}{2}$$

の F による像 $E=F(D)$ の面積を求めよ.

(電気通信大 1994)　　(m19941002)

0.98 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqq x-y \leqq \pi,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.99 次の重積分および３重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ （ただし，$a>0,\ b>0$）

(3) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}, \quad V = \{(x,y,z) : x+y+z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$

(電気通信大 1999)　　(m19991002)

0.100 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D = \{(x,y) : y \leqq 3x,\ x \leqq 3y,\ x+y \leqq 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2000)　　(m20001003)

0.101 次の重積分および３重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 d,dy, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.102 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi,\ 0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.103 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy\ , \qquad D = \{(x,y)\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2\ ,\ y \geqq |x|\}$$

(電気通信大 2005)　　(m20051005)

0.104 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2}dxdy\ , \quad D : y \geqq 0\ ,\ x-y \geqq 0\ ,\ x+y \leqq 1\ .$

(2) $\displaystyle\iiint_E xydxdydz\ , \quad E : x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\ .$

(電気通信大 2006)　　(m20061002)

0.105 次のそれぞれの重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy\ ,\quad$ ただし, $D=\{(x,y)\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\ ,\ y\geq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+3y)^2\,e^{x-y}\,dxdy\ ,\quad$ ただし, $D=\{(x,y)\ :\ |x+3y|\leq 1\ ,\ |x-y|\leq 1\}$

(電気通信大 2010) (m20101004)

0.106 次の重積分について, 以下の問いに答えよ.

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4} \qquad (D:x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1)$$

(1) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ とおくとき, x,y の u,v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) I の値を求めよ.

(電気通信大 2011) (m20111004)

0.107 次の重積分, 3 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ |x+y|\leqq\ 1,\ |x-y|\leqq\ 1\}$

ただし, e は自然対数の底とする.

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ 2x,\ y\geqq\ 0\big\}$

(3) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\ ,\quad V=\big\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\leqq\ 1\big\}$

(電気通信大 2012) (m20121004)

0.108 関数 $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}\quad (t>0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ を計算せよ.

以下では, $t>0$ を定数とする.

(2) $u(x,y,t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x,y,t)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} u(x,y,t)\,dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013) (m20131003)

0.109 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\sin^2(x-2y)dxdy\quad D=\left\{(x,y)\ :\ 0\leq x+2y\leq\pi\ ,\ 0\leq x-2y\leq\frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\quad D=\big\{(x,y)\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\ ,\ 0\leq y\leq x\big\}$

(電気通信大 2013) (m20131004)

0.110 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):|x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.111　関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき，$f(x,y)=0$ を r, θ の式で表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,y):f(x,y)\leqq\ 0,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$ の面積 S を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151003)

0.112　次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):0\leqq\ x-y\leqq\ x+y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,,\qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.113　次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x^2-y^2)^2+1}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(電気通信大 2016)　　(m20161004)

0.114　(1) 積分順序を交換することにより，次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^\pi dx\int_x^\pi\frac{x\sin y}{y}dy$$

(2) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2dxdydz\ ,\qquad V=\left\{(x,y,z)\ :\ y\leqq x,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0,\ x^2+y^2+x^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2017)　　(m20171004)

0.115　次の重積分，3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D\frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy\quad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_E xyzdxdydz,\quad E=\left\{(x,y,z)\ :\ y\geqq x\geqq 0,\ z\geqq 0,\ x^2+y^2+z^2\leqq 1\right\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

0.116　C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})\qquad(r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S:z=u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1)$, $f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D u(x, y)\, dxdy \ , \qquad D = \left\{(x, y) \ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.117　関数

$$f(x, y) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2 + y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z = f(x, y)$ を考える．以下の問いに答えよ.

ただし，$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x = \tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

(3) 曲面 S と平面 $z = 0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.118　次の重積分の値をそれぞれ計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy \ ,\quad D = \left\{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\, dxdy \ ,\quad D = \left\{(x, y) : 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.119　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\, dxdy \ ,\qquad D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leqq x \leqq y,\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\ \sin(xy)\, dxdy \ ,\qquad D = \left\{(x, y)\ :\ 1 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ x|y| \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(電気通信大 2021)　　(m20211004)

0.120　xy 平面上の曲線 $C\ :\ \begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，

これを $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0 < x < 1)$ を t の関数として表せ.

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ.

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.121　次の重積分の値を求めよ.

(1) $I_1 = \iint_{D_1} e^y \, dxdy, \qquad D_1 = \Big\{(x,y) \ : \ 0 \leqq x+y \leqq 1, \ 0 \leqq x-y \leqq 1\Big\}$

(2) $I_2 = \iint_{D_2} x\sqrt{x} \, dxdy, \qquad D_2 = \Big\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leqq x\Big\}$

(3) $I_3 = \iiint_V y\sqrt{1+x^2+y^2+z^2} \, dxdydz, \quad V = \Big\{(x,y,z) \ : \ x \geqq 0, \ y \geqq 0, \ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\Big\}$

(電気通信大 2022)　　(m20221004)

0.122 $D = \{(x,y) | \ x+y \leqq 1 \ , \ \ x,y \geqq 0\}$ とするとき，次の 2 重積分 I を求めよ．

$$I = \iint_D (2x+3y^2) dxdy$$

(千葉大 1996)　　(m19961202)

0.123 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

(千葉大 1998)　　(m19981202)

0.124 次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx \, dy$$

ここで，$D = \{(x,y) : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

(千葉大 1999)　　(m19991202)

0.125 2 次元平面上の直交座標系を x, y とする．原点から点 (a,b) までの距離を r，原点と点 (a,b) を結ぶ直線と，x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r = a(1+\cos\theta)$，$a > 0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい．

(千葉大 2000)　　(m20001203)

0.126 ３次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ と円柱 $x^2+y^2 = 2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい．

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい．

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2} \, dxdy \ , \ D = \{(x,y) \,|\, (x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r,θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r,\theta) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.127 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい．　$I(a) = \iint_D xy \, dxdy$

ここで，$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq x+y \leq a\}$

(千葉大 2002)　　(m20021202)

0.128 次の 2 重積分を求めなさい．ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする．

$$V = \iint_D \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy \qquad \text{ただし，} D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq b^2\}$$

(千葉大 2003)　　(m20031203)

0.129 半径が a の無限に長い 2 つの直円柱がある．互いの中心軸が直交して交わっている場合，その共通部分を図示し，体積を求めなさい．

(千葉大 2004) (m20041202)

0.130 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005) (m20051203)

0.131 重積分に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 領域 $D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\geq 0\,,\ x+y+z\leq \pi/2\}$ を図示しなさい.

(2) 次の不定積分を求めなさい．ただし，a は定数である.
$\displaystyle\int x\sin(a+x)dx$

(3) D を積分領域として，次の 3 重積分の値を求めなさい.
$\displaystyle\iiint_D z\sin(x+y+z)dxdydz$

(千葉大 2007) (m20071208)

0.132 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z\geq 0)$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$$V=\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2\leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい.

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leq r\leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2008) (m20081203)

0.133 $a>0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい.

$$I(a)=\iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$

$$D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ x+y\leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい.

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0<a<+\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい.

(千葉大 2009) (m20091203)

0.134 三次元空間 O- xyz 座標系で, 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a>0)$ である.

(千葉大 2010) (m20101203)

0.135 三次元空間 $O-xyz$ 座標系で，曲面 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z=a^{-1}$ $(1<a)$ で囲まれた図形を図示し，その体積 V を求めなさい.

(千葉大 2011)　　(m20111203)

0.136 下記の重積分について以下の問いに答えなさい.

$I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \left(x^2+y^2\right)^2 \leq y^2-x^2\,,\ y\geq 0\right\}$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい.

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい.

(3) I を極座標で書きなさい.

(4) I を求めなさい.

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.137 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z\geq 0$ の体積 V を求めたい.

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.

$v=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq ax\right\}$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい.

$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\,,\ 0\leq r\leq a\cos\theta\right\}$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.138 三次元空間 $O-xyz$ 座標系で，円柱 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ が 2 つの平面 $z=bx$ $(b>0)$ と $z=0$ とで切り取られる立体について，以下の問に答えなさい.

(1) 立体を図示しなさい.

(2) xy 平面上に極座標系 $(r,\,\theta)$ をとって，$O-r\theta z$ 円柱座標系で見た場合，z 軸を通る θ 平面と $\theta+d\theta$ 平面とで立体が切り取られる体積 dV を求めなさい.

(3) 立体の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2014)　　(m20141203)

0.139 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた，放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$，および，二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.

(3) 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151203)

0.140 次の重積分に関して以下の問に答えなさい.

$I=\iint_D \dfrac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$

$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leq y\leq 2\,,\ 0\leq x\leq y\right\}$

(1) 積分領域 D を $u = x + y,\ v = \dfrac{x}{y}$ の関係で (u, v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D，および，$O-uv$ 平面での D' を図示しなさい．

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x, y) = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.141 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$（ただし，$a > 0$）について，以下の問に答えなさい．

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい．

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171203)

0.142 楕円面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$　について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z = z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし，$-c < z_0 < c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000）　　(m20001304)

0.143 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$　(ただし, $a > 0,\ b > 0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1) 体積を求めよ．　　(2) 表面積を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011305)

0.144 (1) 次の積分の値を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x^2 + y^2\} dxdy$$

(2) 関数 $f(a)$ を $f(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \qquad\qquad \int_0^{\infty} x^{2n} \exp(-x^2) dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.145 (1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を導け．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$　($a > 0,\ n$ は自然数)　を求めよ．

(筑波大 2004)　　(m20041314)

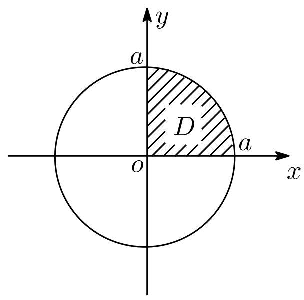
0.146 $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ. また, 点 $(2, 1)$ における $g(x, y)$ の勾配の大きさを求めよ.

(2) $\iint_D g(x,y)dxdy$ を求めよ. ただし, $D : x^2+y^2 \leq 1$ とする.

(筑波大 2004)　　(m20041315)

0.147 (1) 積分 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
ただし, 積分領域 D は
$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ $(a>0)$ とする.



(2) (1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty=\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ における広義積分 $\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.148 積分 $\iint_D (4-x-y)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y) \mid x+y \leq 2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,,\ y \geq 0\}$ の値を計算せよ.

(筑波大 2006)　　(m20061306)

0.149 2 次元 $x-y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 a の円の第一象限内にある部分を D とする. このとき, 次の二重積分を求めよ. $\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006)　　(m20061310)

0.150 a,b を $a^2+b^2=1$ をみたす実数の定数とし, D を $D=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ で定めるとき,

積分 $\iint_D \dfrac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}}dxdy$ を求めよ.

必要なら次の変数変換を用いてよい. $\begin{cases} u = ax+by \\ v=-bx+ay \end{cases}$

(筑波大 2007)　　(m20071309)

0.151 積分 $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ を求めよ. ただし, 積分領域 D は $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ とする.

(筑波大 2007)　　(m20071316)

0.152 $z=x^2+2y^2$, 平面 $x+y=1$, および 3 座標面で囲まれる立体の体積を求めなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081307)

0.153 (1) $t=\sqrt{y^2-x^2}$ と置換することにより, 次の積分を計算せよ. ただし, $x>0$ とする.

$$\int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008)　　(m20081316)

0.154 (1) 極座標変換により, 次の積分を計算せよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

(2) 上の結果を用いて, 次の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(筑波大 2008)　　(m20081317)

0.155 積分 $\iiint_D dxdydz\, \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ.

ただし, α は正の定数であり, $\ln x$ は x の自然対数を表している.

さらに積分領域 D は, $D = \{(x,y,z) \mid 1 < x^2+4y^2+9z^2 < 4\}$ とする.

(筑波大 2008) (m20081321)

0.156 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\,,\; x \geq 0\,,\; y \geq 0\right\}$ 上での重積分 $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし, $a > 0,\ b > 0$ とする.

(1) $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 $r,\ \theta$ で表せ.

(2) 前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ.

(3) 以上の結果を用い重積分 I を求めよ.

(筑波大 2009) (m20091309)

0.157 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leqq x$ の共通部分の体積を求めよ.

(筑波大 2009) (m20091313)

0.158 $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y \geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ.

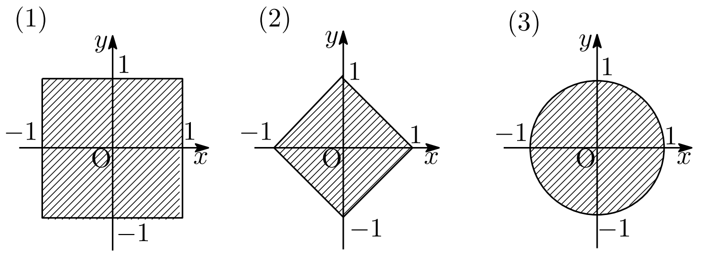
(筑波大 2010) (m20101304)

0.159 2 重積分 $\iint_D (x+y)^2\, dxdy$ の値を, 積分範囲 D が次の 3 つの場合について, それぞれ計算せよ（図を参照）.

(1) $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(2) $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(3) 原点を中心とする単位円の内部



(筑波大 2010) (m20101306)

0.160 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ を求めなさい.

(筑波大 2010) (m20101314)

0.161 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\, dxdy\,, \quad K = \{(x,y) \mid y \geqq x^2\,,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 2010) (m20101320)

0.162 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \log_e(x^2+y^2)\, dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 5,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$$

(筑波大 2011)　　(m20111309)

0.163 領域 D を $D = \left\{(x,y) \,|\, x^2 \leqq\ y \leqq\ 4x+5\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\right\}$ とする．D を図示し，
重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111315)

0.164 a, b は正の定数とし，D を

$$D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

で定めるとき，積分

$$\iint_D |(ax+by)(-bx+ay)| e^{-(ax+by)^2} dxdy$$

を次のようにして求めよ.

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ.

$$\begin{cases} u = ax+by, \\ v = -bx+ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ.

(筑波大 2011)　　(m20111322)

0.165 領域 $K = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq\ 1\,,\ 0 \leqq\ z \leqq\ c\right\}$ とする．3 重積分

$$I = \iiint_K y^2 z^2\, dxdydz$$

を求めよ．ここで，a, b, c は正の定数である.

(筑波大 2012)　　(m20121311)

0.166 領域 D を

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x+y+z < 1,\ x,y,z > 0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\, dxdydz$$

を以下の手順で求めよ.

(1) 変数変換

$$u = x+y+z$$
$$uv = y+z$$
$$uvw = z$$

により，D が領域 $E = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u,v,w < 1\right\}$ に写されることを示せ.

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ.

(3) I の値を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121327)

0.167 関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．極値の極大，極小についても調べよ．

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$D_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leq a^2\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\right\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a} f(x,y)dxdy$ の $a\to\infty$ における極限値を求めたい．その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し，極限値を示せ．

$$E_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq a\,,\ o\leq y\leq a\right\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(筑波大 2013)　　(m20131306)

0.168 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ 　(ただし，$(x,y)\neq(0,0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.169 領域 $D=\{(x,y)\,:\,0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\}$ において，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2e^{-y}dxdy$$

(筑波大 2013)　　(m20131316)

0.170 半径 a の球体の領域 $D=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ．r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.171 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，曲面 $z=5x^2+4xy+8y^2$ と平面 $z=1$ によって囲まれた図形の体積を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141314)

0.172 次の二重積分を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\ ,\ xy\geq 0\right\}$$

(筑波大 2014)　　(m20141318)

0.173 $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\int_{-\infty}^{y}\phi(x)dx\right)e^{\mu y-\frac{\mu^2}{2}}dy$ を求めよ．ただし，$\mu>0$ とする．

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.174 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めたい．そこで，$D_a=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq o,\ y\geq 0\right\}$，$a>0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.175 $D=\{(x,y)\mid 0\leq 2x+y\leq 1,\ -1\leq x-2y\leq 0\}$ 上の二重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $u=2x+y,\ v=x-2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u,v) の D に対応する積分領域を示しなさい．

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ を示しなさい．

(3) $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ のヤコビアンを求めなさい．

(4) $\displaystyle\iint_D xdxdy$ を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151315)

0.176 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 2x\}$$

(筑波大 2015)　　(m20151319)

0.177 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D\frac{x}{x^2+y^2}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$

(筑波大 2016)　　(m20161304)

0.178 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; (x+y)^2 + 4(x-y)^2 \leq 1\right\}$ における重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{(x+y)^2 + 4(x-y)^2} dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x + y = r\cos\theta,\ x - y = \dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，$x,\ y$ の $r,\ \theta$ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.179 $f(x,y) = xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y) = c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p > 0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x > 0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D = \bigcup_{1 \leq p \leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.180 $E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right) \frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.181 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x,y,z) を円柱座標 (r,θ,z) に変換する，$x,\ y,\ \dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial x}{\partial z}$ を $r,\ \theta,\ z$ の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x},\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta, z$ を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

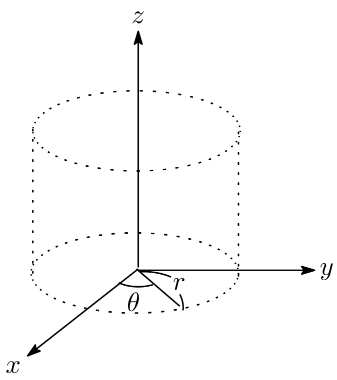
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．　関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.182 xyz 直交座標系において円柱面 $x^2+y^2=1$，xy 平面，平面 $z=x$ により囲まれた部分の体積を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181314)

0.183 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y) \mid 1/4 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)}dxdy\ , \qquad D = \{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(筑波大 2018)　　(m20181320)

0.184 次の二重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$V = \iint_D (x^2+xy)dxdy \quad \cdots\cdots(*)$$

ただし，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい．

(2) V の値を求めなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191302)

0.185 $f(x,y) = x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか.

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$

の値を求めよ.

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.186 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える.

$$I = \iint_D (4x^2-y^2)e^{8xy}dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq 2x+y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - \frac{1}{2}y \leq 1\right\}$$

(1) $u = 2x+y,\ v = x - \dfrac{1}{2}y$ と変数変換したとき，変数の組 (u,v) の積分領域 E を示せ.

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ.

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.187 $z = \dfrac{1}{xy},\ x > 0,\ y > 0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ.

(1) $(x,y) = (1,2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ.

(2) 曲面 S 上で，平面 $x+3y+9z+18=0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ.

(3) 6 つの平面 $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ.

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.188 次の 2 重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D xe^{y^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\right\}$$

(筑波大 2020)　　(m20201306)

0.189 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする.

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4+y^2}dxdy$ を計算せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\log(1+x^\alpha)dxdy$ が収束することを示せ.

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.190 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211306)

0.191 (1) 関数 $g(x) = x^x\ (x>0)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)$ を計算せよ.

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\,:\,0<x^2+y^2\leq 1\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\right\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211312)

0.192 二重積分 $I_n=\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}\,dxdy\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ は存在するか．存在する場合は，その値を n を用いて表わせ．存在しない場合は，「存在しない」と答えること．

(筑波大 2021)　　(m20211317)

0.193 次の 2 重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{f(x,y)}dxdy$$

(1) $f(x,y)=-x^2-y^2$ とし，I を求めなさい．

(2) $f(x,y)=-ax^2-2bxy-cy^2$ とし，I を求めなさい．ただし，$a>0,\ b^2-ac<0$ とする．

(筑波大 2022)　　(m20221311)

0.194 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ の面積は

$$\iint_D\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\ \ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.195 a を正の実数とし，次の不等式で定義された領域を D であらわす．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{a}\,,\qquad x\geq 0\,,\ y\geq 0$$

このとき，次の値を求めよ．

$$\iint_D dxdy\ \ ,\qquad \iint_D x\,dxdy$$

(埼玉大 1999)　　(m19991403)

0.196 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R\!\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}f(x,y)dx\right)\!dy\leqq\int_0^R\!\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)\!dy\leqq\int_0^{\sqrt{2}R}\!\left(\int_0^{\sqrt{2R^2-y^2}}f(x,y)dx\right)\!dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R\left(\int_0^R f(x,y)dx\right)dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001402)

0.197 n は自然数とする．正の定数 a に対して

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(x-a)^2+y^2\leq a^2\ ,\ y\geq 0\right\}$$

とおく．このとき $\displaystyle\iint_D x^n y\,dxdy$ を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021402)

0.198 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 $\tan$ の定義域を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である．
また, $D = \{(x, y) \in \Omega \mid 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051406)

0.199 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする.

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D ydxdy$ を計算せよ.

(埼玉大 2007) (m20071411)

0.200 以下の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{x(x-1)^3}\, dx$ (2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$, $D = \{(x, y) \mid y \leqq 2x,\ x \leqq 2y,\ x + y \leqq 6\}$

(埼玉大 2008) (m20081402)

0.201 n を自然数とし，$D_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \frac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．次を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ.

(2) (1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(埼玉大 2009) (m20091407)

0.202 次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy\ , \quad (\ D = \{\ (x, y)\,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + 3y \leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大 2011) (m20111403)

0.203 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x+y} dxdy$$

ただし，直線 $y = x,\ x = 1,\ y = 0$ で囲まれた領域を D とする.

(埼玉大 2012) (m20121403)

0.204 次の 2 重積分を求めよ．ただし，$x \geq 0,\ \sqrt{x} \geq y \geq x$ で囲まれた領域を D とする.

$\displaystyle\iint_D (x + y)dxdy \qquad D\,:\, x \geq 0,\ \sqrt{x} \geq y \geq x$ (埼玉大 2013) (m20131404)

0.205 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \leqq\ x^2-y^2\ ,\ x\geqq\ 0\right\}$ とする．極座標を用いて，積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

を計算せよ.

(埼玉大 2014)　　(m20141408)

0.206 次の重積分を求めよ．ただし，$0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq \sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする.

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy$$

(埼玉大 2015)　　(m20151404)

0.207 次の 2 重積分を求めよ．ただし，3 つの直線 $x=0,\ y=2,\ -2x+y=0$ で囲まれた領域を D とする.

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

(埼玉大 2016)　　(m20161403)

0.208 次の 2 重積分を求めよ．ただし，放物線 $y=x^2$ と直線 $y-x-2=0$ で囲まれた領域を D とする.

$$\iint_D xydxdy$$

(埼玉大 2017)　　(m20171403)

0.209 次の関数を積分せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y \frac{x}{1+y^2}dxdy$

(埼玉大 2018)　　(m20181402)

0.210 半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ とする.

(埼玉大 2019)　　(m20191404)

0.211 $D=\{(x,y)\mid y\geqq 0\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\dfrac{2x}{a}\}$　のとき,

次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，a , b は正の定数とする.

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

(茨城大 1998)　　(m19981701)

0.212 (u,v) 平面における正方形 $A=\{(u,v)|0\leqq\ u\leqq\ 1,0\leqq\ v\leqq\ 1\}$ が,

$$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$$

で表される写像により,(x,y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x,y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B xdxdy$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041701)

0.213 $t>0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t):t^2\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4t^2$, $x\geqq\ 0$, $y\geqq\ 0$ 上の二重積分
$F(t)=\displaystyle\iint_{D(t)}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$　について，次の問に答えよ.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　　(m20061702)

0.214 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho > 0$ とする．関数 $f(x, y) = r\sin 2\theta$ の正方形 $A = \{(x, y) \mid 0 < x < \rho,\ 0 < y < \rho\}$ 上の積分

$$I(\rho) = \iint_A f(x, y)dxdy$$

と扇形 $B = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < \rho,\ 0 < \theta < \pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho) = \iint_B f(x, y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.215 $x > 0,\ y > 0$ とする．$a > 0,\ 0 < b < 1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y = ax,\ y = (a^2 + 1)x$，および曲線 $xy = b,\ xy = b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a, b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ となる点 (a, b) を求めよ．その点で $S(a, b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.216 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$x + y \leqq 2$,　$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．　(2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1 + y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081704)

0.217 (1) 関数 $y = \cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2)dx \right) dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.218 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする．また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし，$g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ.

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって, $r\theta$ 平面内の集合 $[\,0\,,\,1\,]\times\left[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ.

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする. (3) の結果を用いて, 条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ.

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.219 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x=0.01,\ y=0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\,\dfrac{2}{3},\,\dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n=1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.220 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ について. 以下の各問に答えよ.

(1) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し, 等式

$$f(x,y) = (\alpha x - y)(\beta x + y)$$

が成り立つように正定数 $\alpha,\ \beta$ を定めよ.

また $f(x,y)=0,\ f(x,y)=1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ .

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき, 関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(3) 点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy = f(a,b)$$

(茨城大 2011)　　(m20111702)

0.221 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqq 1$ と $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ とを満たす領域を D とする. 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ.

(茨城大 2012)　　(m20121702)

0.222 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq x\,,\ y \geqq -x\,,\ 4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}-\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.223 a を $0 \le a$ を満たす定数とし，

$$f(x,y)=x^2+y^2-2axy$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 次の重積分の値が 0 になるように a を定めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ ,\qquad \text{ただし，}D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

(茨城大 2015)　　(m20151708)

0.224 xy 平面内の領域 $E=\{(x,y)\mid 0\le x\le y,\ 1\le y\le 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161703)

0.225 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$\dfrac{1}{2}y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ の順序を交換して，値を計算せよ．

(茨城大 2016)　　(m20161704)

0.226 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2+y^2\le a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n)=\iint_{D_a}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n\ge 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n\ge 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017)　　(m20171703)

0.227 次の関数を考える．

$$f(x,y)=x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0\leqq t$ に対して $D(t)=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1,\ f(x,y)\geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t)dt = \iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018) (m20181703)

0.228 実 2 変数関数 $g(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ を考える．また，$\boldsymbol{R}^2$ の点 (a,b) について，

$$D(a,b) = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq 1\right\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $D(0,0)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(2) $D(a,b)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分は $g(a,b)\pi$ となることを示せ．

(茨城大 2019) (m20191704)

0.229 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ．

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020) (m20201701)

0.230 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x^2+3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020) (m20201704)

0.231 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25 - 6x^2 + 15y^2})^3}dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2021) (m20211703)

0.232 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ.

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ.

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.233 $f(x,y) = x^2y$ として，次の問に答えよ.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid y \geqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を xy−平面上に図示せよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ.

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ.

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.234 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D xydydx$ を求めよ.

(山梨大 2003)　　(m20031803)

0.235 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を xy− 平面に図示しなさい.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2006)　　(m20061804)

0.236 座標平面上の領域 $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x \sin y\, dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2007)　　(m20071806)

0.237 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする.

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい.

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\, dx$ を α の式で表しなさい.

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\, dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.238 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\, dxdy$ を求め，α の式で表しなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.239 2 変数関数 $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x,1)dx$ を求めなさい.

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$ とするとき，二重積分

$$\iint_D g(x,y)dxdy$$

の値を求めなさい.

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$ を満たす点 (x,y) を求めなさい.

(4) 上記の領域 D での $g(x,y)$ の最大値を求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111802)

0.240 領域 $D=\{(x,y)\mid x-y\leqq\ 1,\ x+y\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0\}$ に対し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}\,dxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111807)

0.241 領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\ 4x\,,\ y\geqq\ 0\right\}$ における二重積分

$$\iint_D y^2\,dxdy$$

の値を求めなさい.

(山梨大 2013)　　(m20131803)

0.242 円周　$x^2+y^2=1$ ，直線　$y=x$　及び　y　軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を　D　とする．次の 2 重積分を計算せよ．

$$\iint_D x^3y\,dx\,dy$$

(信州大 1998）　　(m19981903)

0.243 極座標に変換することによって，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 2y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(信州大 1999）　　(m19991903)

0.244 $0<R_1<R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq R_2}\log(x^2+y^2)\,dxdy$$

(信州大 2003)　　(m20031905)

0.245 円柱 $x^2+y^2=a^2\ \ (a>0)$ の xy 平面の上方で, 平面 $z=x$ の下方にある部分の体積を求めよ.

(信州大 2004)　　(m20041901)

0.246 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^y}\,dxdy$$

(信州大 2005)　　(m20051903)

0.247 2 つの円柱面 $y^2+z^2=1$, $z^2+x^2=1$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(信州大 2006)　　(m20061903)

0.248 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq \pi\}$ とする．次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dxdy$

(信州大 2007) (m20071903)

0.249 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの閉領域 U, V を

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2x + y \leq 1\right\}$$
$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 + 8xy + 1 \geq 0\right\}$$

で定める．次の定積分を求めよ．

$$\iint_{U \cap V} |x - 2y|\, dxdy$$

(信州大 2012) (m20121904)

0.250 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr$ を計算せよ．

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ を計算せよ．

ただし，$D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(信州大 2013) (m20131902)

0.251 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sin(x^2) dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \;:\; 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq \sqrt{\pi}\}$ とする．

(信州大 2014) (m20141902)

0.252 2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + 2xy + y^2}$ の値を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\right\}$ とする．

(信州大 2015) (m20151903)

0.253 $p > 2$ は実数とする．$D_n = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq\ x \leqq\ n,\ 0 \leqq\ y \leqq\ n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分 $I_n(p) = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1 + x + y)^p}$ を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n(p)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p) dp$ を計算せよ．

(信州大 2016) (m20161902)

0.254 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} dxdy$$

(信州大 2018) (m20181908)

0.255 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + y)^2 e^{(x - 2y)^2} dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq x - 2y \leqq 1\}$ とする．

(信州大 2019) (m20191903)

0.256 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + 2xy - 4y^2)dxdy$$

を求めよ.

(信州大 2019) (m20191908)

0.257 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする．$D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ.

(信州大 2020) (m20201902)

0.258 (1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1 \right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y)dxdy$$

の値を求めよ.

(3) f は $[0, 1]$ 上の実数値連続関数で, $\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020) (m20201906)

0.259 $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とする．積分 $J = \displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ を求めよ.

(信州大 2021) (m20211903)

0.260 $D_n = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(信州大 2022) (m20221903)

0.261 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\, dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 2x\right\}$ とする.

(信州大 2023) (m20231903)

0.262 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の関数 f を

$$f(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2}\ , \quad (0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1)$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(\frac{1}{3}, y)$ 及び $f(\frac{2}{3}, y)$ の y に関するグラフを描け.

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(新潟大 1999) (m19992003)

0.263 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+2y^2)dxdy$ の値を求めよ．ただし，領域 D は

$D = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \geqq -2x+1\}$ とする．

(新潟大 2001) (m20012005)

0.264 次の問に答えよ．

(1) 2 変数実数値関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$ の極値を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 4\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y^2dxdy$ の値を求めよ．

(新潟大 2003) (m20032003)

0.265 次の二重積分の値を求めよ. ただし, $D_1 : x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ とする.

$$\iint_{D_1} \sqrt{x+y}\,dxdy$$

(新潟大 2010) (m20102014)

0.266 次の定積分を計算せよ.

$$I = \int_D z^2\,dxdydz \qquad D : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y \geq 0$$

(新潟大 2012) (m20122012)

0.267 $D = \left\{(x,y)\,;\ x \geq 0,\ x \geq y,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\right\}$ のとき次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$$

(新潟大 2017) (m20172004)

0.268 $D = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D 2y\ dxdy$$

(新潟大 2019) (m20192005)

0.269 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}$ のとき，次の重積分の値を求めよ．積分順序を変更してもよい.

$$\iint_D \sin(\pi y^2)dxdy$$

(新潟大 2020) (m20202005)

0.270 次の重積分を，積分の順序を変えて，$\underline{\text{2 通り}}$ に計算せよ.

$$\iint_D 2x^2y\ dxdy, \qquad D = \{(x,y)\,;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\ \}$$

(新潟大 2022) (m20222010)

0.271 空間の $0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ.

(長岡技科大 1991) (m19912104)

0.272 $D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x+y \leqq 1 \,,\; x \geqq 0 \,,\; y \geqq 0 \right\}$ とするとき，次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

(長岡技科大 1992) (m19922104)

0.273 曲面 $z = x^2 + y^2$ の $z \leqq 4$ の部分でできる容器を z 軸正方向を上向きにして水をいっぱいに満たす. 以下の問いに答えよ.

(1) 満たされた水の体積を求めよ.

(2) 容器を静かに 45° 傾けて水をこぼしたとき，残った水の体積を求めよ.

(長岡技科大 1996) (m19962102)

0.274 (1) xy 平面における領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x+y \leqq 1 \,,\, 0 \leqq x-y \leqq 1\}$ を図示せよ.

(2) (1) の D に対して重積分 $\displaystyle\iint_D (x-y)\,e^{x+y}\,dxdy$ を求めよ.

(長岡技科大 1998) (m19982104)

0.275 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \leqq 0$ の部分でできる容器について以下の問いに答えよ.

(1) 水深 $h\,(0 < h \leqq 1)$ まで水を入れたとき，水の量を求めよ.

(2) 水をいっぱいに満たしてから静かに角度 $\theta\,(0 < \theta \leqq 90^\circ)$ 傾けるとき，こぼれる水の量を求めよ.

(長岡技科大 2001) (m20012104)

0.276 xyz 空間において $x^2+y^2 \leqq z \leqq 2$ を満たす部分の体積を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052104)

0.277 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めなさい.

(2) xy 平面で，$t \leqq x^2+y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする. D_t の概形をかき，その面積を求めなさい.

(3) t が正の実数の範囲を動くとき，2 重積分 $V(t) = \displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092103)

0.278 xy 平面上において, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x+1$, $x \leqq y \leqq x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x+y)^2\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2010) (m20102103)

0.279 xy 平面において，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき，その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2012)　　(m20122102)

0.280 xy 平面において，連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい．

(3) 積分順序の変更をして，重積分 $V = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2016)　　(m20162104)

0.281 xyz 空間における曲線 $z = f(x,y) = x^2+y^2$ について下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $z = x^2+y^2$ 上の点 (a,b,a^2+b^2) における接平面の方程式を求めなさい．ただし，曲面 $x = f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は，$f_x,\ f_y$ を f の偏導関数とすると，

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる，

(2) 前問の接平面が点 $(0,0,-1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 $z = x^2+y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172104)

0.282 $a,\ h$ を正の定数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = h - a(x^2+y^2)$ とする．$f(x,y) \geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし，その面積を S とする．また，xyz 空間で，曲面 $z = f(x,y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする．下の問いに答えなさい．

(1) D を xy 平面上に図示しなさい．また，S を a と h で表しなさい．

(2) $V = \dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい．

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

0.283 x, y を実数とし，2 変数関数 $f(x,y)$ を累次積分

$$f(x,y) = \int_y^{y+1} \int_x^{x+1} (3u^2+3v^2)\ dudv$$

で定義する．下に問いに答えなさい．

(1) $f(x,y)$ を求め，x, y で表しなさい．

(2) $f(x,y)$ の x, y についての偏導関数 $f_x,\ f_y$ および第 2 次偏導関数 $f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yy}$ を求めなさい．

(3) $f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(長岡技科大 2019)　　(m20192103)

0.284 xy 平面において，領域 $S,\ T$ を

$$S\ :\ x^2+y^2 \leqq 1$$
$$T\ :\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dxdy$ を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.285 xy 平面において，D を不等式

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい．

(2) $s=x+y,\ t=x-y$ とおくとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.286 (1) 極限 $L = \displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めなさい．

(2) 広義積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \log x dx$ を求めなさい．

(3) 広義積分 $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{x}{1-xy}dy\right\}dx$ を求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222102)

0.287 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\exp\Big(-\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3\Big)dxdy$$

を求めよ．ただし， $\exp(t) = e^{\,t}$ である．

(金沢大 1999)　　(m19992204)

0.288 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数$)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x,y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.289 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D = \left\{(x,y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.290 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1 = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$，$D_2 = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002)　　(m20022202)

0.291 閉領域 $D(R) = \{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq R^2\}$ $(R>1)$ に対して，

$$I_a(R) = \iint_{D(R)} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}dxdy \quad (a>0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_a(R)$ を調べよ.

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.292 領域 $D(R) = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq R^2,\ y \geqq |x|\right\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R) = \iint_{D(R)} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.293 a, b は正の実数とする.

(1) $\dfrac{x}{a} = r\cos\theta,\ \dfrac{y}{b} = r\sin\theta$ $\quad(0<r,\ 0<\theta<2\pi)$ とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad を求めよ.$$

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ を計算せよ. ただし，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ y \geqq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.294 関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad((x,y)\neq(0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0<\varepsilon<1$ とする. 積分 $\displaystyle I(\varepsilon) = \iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} (\sin\varepsilon)I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.295 領域 $D(\varepsilon) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1-\varepsilon,\ |y| \leqq x\}$ $(0<\varepsilon<1)$ に対して
$I(\varepsilon) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\iint_{D(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ．　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ．　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.296 $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする．次の積分の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy$

(金沢大 2007)　　(m20072207)

0.297 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $R_n = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$ に対して，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = 0$ となることを示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007)　　(m20072212)

0.298 (1) 変数変換 $x=u,\ y=uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を求めよ．

(3) $R>1$ とし，$D_R = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく．実数 α について，極限値
$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R} \frac{x^\alpha}{x^2+y^2}dxdy$ が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082203)

0.299 $D = \{(x,y)\ ;\ 0 \leq y < x \leq 1\}$ とする．$0<\alpha<1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^\alpha}dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082207)

0.300 次の問に答えよ．

(1) 変数変換 $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．ただし，$a,\ b$ は正の定数とする．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}\,dxdy,\quad D = \{(x,y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092203)

0.301 $a>0$ とする．座標空間内に球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092208)

0.302 (1) $x = u\cosh v,\ y = u\sinh v$ とおく．

$$1 \leqq u \leqq 2,\ -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geqq 1,\ 1 \leqq x^2-y^2 \leqq 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \dfrac{e^v+e^{-v}}{2}$, $\sinh v = \dfrac{e^v-e^{-v}}{2}$ である．

(2) 変数変換 $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \left\{(x,y)\,|\,x \geqq\ 1,\ 1 \leqq\ x^2-y^2 \leqq\ 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010)　　(m20102203)

0.303 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x,y \geqq\ 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2e^{-x^2-y^2}\,dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,x,y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\,dxdy\ .$$

(金沢大 2010)　　(m20102208)

0.304 関数 $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) $D_a = \{(x,y)\ |\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ 2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\}$ とする.

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.305 xyz空間内の二つの曲面　$x^2+y^2-x=0$ と $z^2=x$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112208)

0.306 (1) 変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq\ 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq\ 2} \log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012)　　(m20122203)

0.307 xyz空間において　, 条件

$$x^2+y^2 \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\,,\ x^2+z^2 \leqq\ 1$$

で定まる立体の体積を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132205)

0.308 $0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ とし,

$$D_\varepsilon = \left\{(x,y)\,\middle|\,x \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 1,\ y \geqq\ (\tan\varepsilon)x\right\},$$

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} xy^2dxdy$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) D_ε を図示せよ.

(2) I_ε を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ.

(金沢大 2013) (m20132208)

0.309 $D = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq x\ ,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 極座標による変数変換を用いて，2 重積分

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2014) (m20142203)

0.310 $D\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid -1 \leqq x+y \leqq 1,\ y-x \leqq 1\right\}$ とするとき, 広義積分

$$\iint_D (x^2-y^2)^2 e^{y-x}dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2014) (m20142206)

0.311 (1) $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1}x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r>0,\ 0<\theta<2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{1}{4} \leqq x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とする.

(金沢大 2015) (m20152203)

0.312 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ \frac{1}{2} \leqq x^2+y^2 \leqq x\right\}\ ,$$

$$E = \left\{(r,\theta)\in R^2\ \middle|\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta\right\}$$

とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T: R^2 \to R^2$ を

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r,\theta)\in E$ のとき $T(r,\theta)\in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152208)

0.313 λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^{\lambda} dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ．

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.314 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leqq\ x + y \leqq\ 5,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v \\ y = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.315 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $\left\{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\right\}$ を R_n と表すとき，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \right) = 0$ を示せ．

(3) 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(金沢大 2016)　　(m20162216)

0.316 a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする．

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時，
関数行列式（ヤコビアン）$\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.317 重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy, \qquad D = \left\{(x, y) \in R^2 \ \middle|\ 1 \leq xy \leq 6,\ 0 < y \leq x \leq 4y\right\}$$

を考える．次の各小問に答えよ．

(1) 変数 u, v を用いて，変数変換 $x = uv,\ y = u/v$ を行なう．このときヤコビアンを求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ．

(金沢大 2016) (m20162224)

0.318 関数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) 領域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq y\leqq\sqrt{3}x,\ x^2+y^2\geqq 1,\ x\leqq 1\right\}$ を図示せよ．

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)\}\,dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2017) (m20172208)

0.319 実数 $t\,(0<t<1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ t\leqq x+y\leqq 1\right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t}\frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\iint_{R_t}\frac{dxdy}{(x+y)^{\lambda}}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ．

(金沢大 2018) (m20182205)

0.320 関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 a,b,c を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

(金沢大 2018) (m20182208)

0.321 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ とし，$x\neq 0$ となる (x,y) に対して関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x,y)-f_x(x,y)$ と $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $0<a<1$ に対し

$$D_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,a^2\leqq x^2+y^2,\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a=\iint_{D_a}\{f_y(x,y)-f_x(x,y)\}\,dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019) (m20192203)

0.322 次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L > 1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq L^2\right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L\to\infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.323 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{2x}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ のすべての極値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の 4 点 $(2, 0)$，$(0, 2)$，$(-2, 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする正方形の周および内部を D とする．このとき，重積分

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202204)

0.324 (1) 集合 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \le 1\right\}$ の概形を描け．

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x - y + 1)\, e^{x+y}\, dx\, dy$ を求めよ．

(3) $\max\{u, v\} = \begin{cases} u & (u \ge v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy\right) dx$ を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.325 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; |y| \le e^{-x^2}, x \ge 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212203)

0.326 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x - 3y$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f のすべての極値を求めよ．

(2) 閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

0.327 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する.

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x \right\}$$

以下の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 関数 $g(x, y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 y^2}{\cos^6 x} dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.328 閉領域 $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2022)　　(m20222209)

0.329 次の重積分の値を極座標を用いて求めよ.

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0}} xydxdy$$

(富山大 2004)　　(m20042304)

0.330 $V = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ x^2 + z^2 \leqq 1\}$ の体積を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042312)

0.331 $a > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqq \dfrac{3}{4} a^2 \right\}$ とする. R^3 内の曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D$$

の面積を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042316)

0.332 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (r \geq 0)$$

により，$(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ．また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052305)

0.333 $E = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 2x + 2y - 1\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_E (xy - y)dxdy$$

(富山大 2005)　　(m20052310)

0.334 次の二重積分を求めよ, $1024\iint_D xydxdy \qquad \left(D\,;\, x^2 \leq y \leq \dfrac{x}{2}\right)$

(富山大 2007)　　(m20072306)

0.335 変数変換 $t = x - y,\ s = x + y - 2$ により, 重積分

$$\iint_D (x+y)dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq y,\ y \leq x \leq 2 - y\}$$

の値を求める. 以下の問いに答えよ.

(1) x と y をそれぞれ, t と s で表し, $\dfrac{\partial x}{\partial t},\ \dfrac{\partial x}{\partial s},\ \dfrac{\partial y}{\partial t},\ \dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて, $\iint_D (x+y)dxdy$ を t と s で変数変換し, その値を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} (x+y)dxdy$ の値を求め, (3) の結果と一致することを確かめよ.

(富山大 2008)　　(m20082304)

0.336 半径 a の球の体積 V を求める. 以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を用いて, V を積分表示せよ.

(2) (x,y,z) の極座標 (r,θ,φ) への変換

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta$$

を用いて, $\dfrac{\partial x}{\partial r},\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi},\ \dfrac{\partial y}{\partial r},\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi},\ \dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta},\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ.

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(4) (1) および (3) の結果を用いて, V を (r,θ,φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し, V を求めよ.

(富山大 2009)　　(m20092304)

0.337 (1) 直交座標の二重積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を変数変換

$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta$

によって, 極座標 $(r,\ \theta)$ の二重積分に変換せよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値を求めよ.

(富山大 2010)　　(m20102305)

0.338　$A = \left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqq\ z \leqq\ 1 - x^2 - y^2 \right\}$ とするとき, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_A 2z(2x^2 - y^2)\,dxdydz$$

(富山大 2010)　　(m20102310)

0.339　4 重積分

$$\iiiint_D x_1 dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4$$

の値を求めよ.

ただし，$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 \leqq\ 1,\ x_1 \geqq\ 0,\ x_2 \geqq\ 0,\ x_3 \geqq\ 0,\ x_4 \geqq\ 0 \right\}$ とする.

(富山大 2015)　　(m20152304)

0.340　$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ のとき，二重積分　$\displaystyle\iint_D x dxdy$ の値を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182304)

0.341　次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと.

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy \qquad (D\ :\ x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y)$$

(富山大 2022)　　(m20222303)

0.342　次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D 2x|y|\ dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1,\ x^2 + y^2 \leqq 2x\}$$

(福井大 2001)　　(m20012409)

0.343　密度 ρ が一様な半径 a の 1/4 円板

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$$

の重心位置を求めよ.

(福井大 2005)　　(m20052405)

0.344　一様（一定）な密度をもつ次の図形の重心の座標 $(x_1\,,\ y_1)$ を求めよ（途中の計算式も書くこと）

$x^2 + y^2 \leqq\ a^2 \qquad (\ a > 0\ ), \quad y \geqq\ 0$

(福井大 2007)　　(m20072406)

0.345　(1)　内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ. ただし，極座標 (r, θ, ϕ) は，直角座標 (x,y,z) を使って，

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\,,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される.

(2)　楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.346 次の量を 3 重積分を使って表し, その値を求めよ.

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x/a + y/b + z/c = 1$ で囲まれる体積.

(福井大 2010) (m20102407)

0.347 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{2-x} xydy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ． また積分領域も図示せよ.

(福井大 2011) (m20112406)

0.348 $\displaystyle\iint_R \left(y - x^3\right) dxdy\,, \quad \left(R : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ.
また積分領域 R も図示せよ.

(福井大 2012) (m20122409)

0.349 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left\{ \int_x^{2x} \sin(x+y)dy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ.
また積分領域も図示せよ.

(福井大 2013) (m20132410)

0.350 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)dydx$ の 積分順序を変更 して，その値を求めよ．また，積分領域も図示 せよ.

(福井大 2014) (m20142408)

0.351 $\displaystyle I = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (R\ :\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a \to \infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ.

(福井大 2015) (m20152406)

0.352 領域 D を，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とする．このとき，$\displaystyle\iint_D dxdy$ の値を求めよ.

(福井大 2015) (m20152432)

0.353 $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}dxdy$ の積分順序を変更することによって，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ.

(福井大 2016) (m20162405)

0.354 以下の積分をおこないなさい.

$$\iint_D dxdy \qquad \text{ただし，} D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

(福井大 2016) (m20162422)

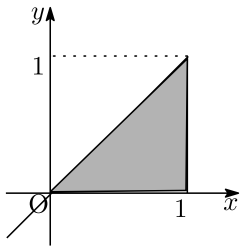
0.355 $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (y - x^3)dydx$ の 積分順序を変更し て，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ.

(福井大 2018) (m20182403)

0.356 $\displaystyle\int_0^{\infty} \left\{ \int_0^1 \sqrt{x}e^{-2y}dx \right\} dy$ を計算せよ.

(福井大 2018) (m20182417)

0.357 下図の灰色で塗られた領域の面積を式 (A) の形に表したとき，$\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ にあてはまる値や式を答えよ（積分の計算を行う必要はない）.



$$\int_{\boxed{③}}^{\boxed{④}} \left\{ \int_{\boxed{①}}^{\boxed{②}} dy \right\} dx \qquad (A)$$

(福井大 2018)　　(m20182421)

0.358　次の重積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

(福井大 2020)　　(m20202405)

0.359　次の重積分を計算せよ．ただし，D は $x^2+y^2=2$ と $y=x^2$ で囲まれた領域である．

$$\iint_D ydxdy$$

(福井大 2021)　　(m20212405)

0.360　次の積分の値を計算せよ．

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ , \qquad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.361　閉領域 $D=\{(x,y)|4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ y \leqq x\}$ を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042505)

0.362　(1)　有理関数 $\dfrac{1}{x^3+8}$ を部分分数に分解し, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$ を求めよ．

(2)　2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)(2x-y)^2dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 1 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ -1 \leqq\ 2x-y \leqq\ 1\}$ の値を求めよ．

(静岡大 2005)　　(m20052502)

0.363　$a>0$ とし，$D(a)=\{(x,y)\mid 0 \leq x \leq a\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$ とおく．
このとき 2 重積分　$\displaystyle I(a)=\iint_{D(a)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$　について，次の問いに答えよ．

(1)　$D(a)$ を図示し，$I(a)$ の値を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062505)

0.364　重積分 $\displaystyle\iint_D (-2x+y)dxdy$ を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid -1 \leqq\ x\,,\ 2x+1 \leqq\ y \leqq\ 3\}$ とする．

(静岡大 2007)　　(m20072505)

0.365　以下の計算をせよ．

(1)　$\displaystyle\int_1^5 \frac{\log x}{x}\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+x^2}$

(3)　$\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

(静岡大 2008)　　(m20082502)

0.366 以下の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$ (2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\,,\ 0\le x\ ,\ 0\le y\}$

(静岡大 2009) (m20092504)

0.367 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\ :\ x-1\leqq\ y\leqq\ 1-x\ ,\ 0\leqq\ x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\Big\{(x,y)\ :\ 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ e^2\Big\}$

(静岡大 2010) (m20102502)

0.368 次の 2 重積分を求めよ. また, 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xe^y\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2\leqq\ y\leqq\ x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$

(静岡大 2011) (m20112502)

0.369 次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy\,,\quad D=\Big\{(x,y)\,\Big|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ \sqrt{y}\leqq\ x\leqq\ 1\Big\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,,\quad D=\Big\{(x,y)\,\Big|\,0\leqq\ y\leqq\ 1\,,\ -1\leqq\ x\leqq\ -y\Big\}$

(静岡大 2012) (m20122501)

0.370 次の積分を計算せよ. 積分領域 D を図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\ \sin(x^2+y^2)\,dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{3}\leqq\ x^2+y^2\leqq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\right\}$

(静岡大 2013) (m20132505)

0.371 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy\,,\quad D=\Big\{(x,y)\,\Big|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\Big\}$ を求めなさい.

(静岡大 2013) (m20132509)

0.372 変数 (r,θ) $(r\ge 0\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ から変数 (x,y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える. また領域 D を

$$D=\{(x,y)\quad ;\ -x\le y\le x\}$$

によって定義する.

(1) (x,y) が領域 D を動くとき (r,θ) が動く範囲を求めよ. また, その対応が 1 対 1 であることを示せ.

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ.

$$\iint_D \exp(-x^2-y^2-xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である.

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.373 3 本の直線 $y = x,\ y = 2x$ および $x = 2$ で囲まれた 3 角形の不均質平板がある（長さの単位は [m] とする）．点 (x, y) における面密度が xy [kg/m^2] で与えられる時，この平板の質量 [kg] を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012606)

0.374 3 点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする三角形を D とする．次の重積分を求めよ．

$$\iint_D xy\ dxdy$$

(岐阜大 2003)　　(m20032604)

0.375 次の多重積分を計算せよ．

$$\iint_D |\ 3x\ |\ dxdy \qquad\qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0)$$

(岐阜大 2004)　　(m20042602)

0.376 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 0$ で囲まれる体積を求めよ．

(岐阜大 2005)　　(m20052603)

0.377 関数 $y = -x^2 + 9$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分を D とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x^2 + 2y)dxdy$$

(岐阜大 2006)　　(m20062606)

0.378 次の重積分を計算せよ．ただし，D は xy 平面上，原点中心で半径 1 の円板とする．

$$\iint_D |\, x + y\, |dxdy$$

(岐阜大 2007)　　(m20072604)

0.379 2 つの円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ および $x^2 + z^2 = 1$ によって囲まれる部分の体積を求めよ．

(岐阜大 2008)　　(m20082605)

0.380 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 y^2 e^{xy} dy\right) dx$

(岐阜大 2008)　　(m20082614)

0.381 (1) n は自然数とする．a, b, c, d を $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ を満たす定数としたとき，関数 $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ の n 階導関数を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \mid 1 \leqq\ x^2 \leqq\ y \leqq\ 4 - x^2\ ,\ 0 \leqq\ x\}$ としたとき，次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y}\, dxdy$$

(岐阜大 2009)　　(m20092603)

0.382 次の (1)〜(3) の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^m (1 - x)^n\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\, dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$　（ヒント：極座標変換）

(岐阜大 2009)　　(m20092612)

0.383 重積分

$$I = \iint_D x \log(x^2 + y^2)\, dxdy\ , \qquad D\ :\ x \geqq\ 0,\ 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4$$

の値を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(岐阜大 2011)　　(m20112602)

0.384 $F(x)$ はすべての x において 2 回微分可能な関数で，$F'(x) = f(x)$ とする． このとき置換微分法により

$$I = \int_a^b x f(x^2) dx$$

の値を F を用いて表せ．ただし，a, b は正の定数とする．また，重積分

$$J = \iint_D \frac{xyf(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ , \quad D\ :\ x, y \geqq\ 0,\ p^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ q^2$$

の値を F を用いて表せ．ただし，p, q は正の定数とする．

(岐阜大 2011)　　(m20112606)

0.385 a, b を正の実数とする．次の広義積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}}\, dxdy\ , \qquad D\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

(岐阜大 2012)　　(m20122602)

0.386 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx\ ,\ t > 0.$$

次の問に答えよ．ただし， $t > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n + 1) = n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.387 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{x^2y^3}{x^2 + y^2} dxdy\ , \quad D = \left\{(x, y)\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 5\right\}$$

(岐阜大 2017)　　(m20172603)

0.388 $a = \log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x) = ax - a - \log x$$
$$g(x) = x^2 - ae^x$$

で定義する．ただし，log は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 [1, 2] における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \sin(g(y))dy \right) dx \ ,$$

ただし，

$$\alpha(x) = ax$$
$$\beta(x) = a + \log x$$

とする．

(4) I の値を求めよ．

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

0.389 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y} dxdy \quad \left(D = \left\{ (x, y) \ \middle| \ 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq 1 \right\} \right)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212703)

0.390 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy \ ,\qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x, \ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \ ,\qquad D = \left\{ (x, y) \ \middle| \ x^2 + y^2 \leqq 1, \ x \geqq 0 \ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.391 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y \sin(x + y) dxdy, \quad D = \left\{ (x, \ y) \ \middle| \ x + y \leqq \pi, \ x \geqq 0, \ y \geqq 0 \right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy dxdy, \quad D = \left\{ (x, \ y) \ \middle| \ \left| x - \frac{1}{\sqrt{3}} y \right| \leqq 1, \ \left| x + \frac{1}{\sqrt{3}} y \right| \leqq 2 \right\}$

(豊橋技科大 2023)　　(m20232703)

0.392 次の 2 つの不等式で表される領域の共通部分の体積 V を求めよ．
$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1, \ \ x^2 + y^2 \leqq a^2$．　ただし，$0 < a \leqq 1$ とする．

(名古屋大 2004)　　(m20042802)

0.393 領域 D : ${r_1}^2 \leq x^2 + y^2 \leq {r_2}^2 \quad (0 < r_1 < r_2)$ における重積分
$\displaystyle\iint_D (a + bx + cx^2 + fxy + cy^2) dxdy$ を求めよ．ただし，a，b，c，f は定数である．

(名古屋大 2005)　　(m20052803)

0.394 $D=\{(x,y):y^2\leq x\leq y\}$ として次の積分の値を求めなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(名古屋工業大 1998） (m19982904)

0.395 関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ , & x^2+y^2\leq 1 \\ 0\ , & x^2+y^2>1 \end{cases}$$

で与えられるとき，重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982905)

0.396 次の積分の値を求めよ． $\displaystyle\iint_K (3x^2+2y)dx\ dy\ ,\quad K:x^2\leq y\leq 2-x$

(名古屋工業大 1999） (m19992903)

0.397 (1) 二次元平面上の第一象限において $0\leq x^2+y^2\leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ． $a>0$ とする．

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)2}dx\ dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと．

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2}dx$$

(名古屋工業大 1999） (m19992904)

0.398 曲面 $z=1-x^2-y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001) (m20012903)

0.399 $D=\{(x,y)|0\leq y\leq x,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ のとき， $\displaystyle I=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(名古屋工業大 2001) (m20012904)

0.400 xy 平面の 5 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D ydxdy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004) (m20042903)

0.401 次の重積分を変数変換の公式を用いて計算せよ．

$$\iint_D 2(x+y)^6(x-y)^8dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0\ ,\ y\geqq\ 0\ ,\ x+y\leqq\ 1\}$$

(名古屋工業大 2006) (m20062904)

0.402 $D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\}$ のとき，重積分 $V = \displaystyle\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dxdy$ を求めよ．
ただし，$\max(x^2, y^2)$ は x^2, y^2 の小さくない方を表す．
（ヒント：領域 D を $x > y$ と $x \le y$ の二つの部分に分けて積分を考えること）

(名古屋工業大 2006) (m20062906)

0.403 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z) dzdydx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dydx$

(名古屋工業大 2007) (m20072902)

0.404 $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax = 0,\ y > 0\}$ $(a > 0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする．

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ．

(2) 領域 $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax \le 0,\ y \ge 0\}$ を極座標で表せ．

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ． $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008) (m20082904)

0.405 (1) 次の不定積分 I を求めよ． $I = \displaystyle\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x + 1)(x^2 - 2x + 2)}\, dx$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ． $J = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{dy}{\sqrt{4 - y^2}} \right) dx$

(名古屋工業大 2009) (m20092903)

0.406 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x(x - 1)}$ を $x - 3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(名古屋工業大 2009) (m20092905)

0.407 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい．

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 5}\, dy \right\} dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい．

$$J = \iint_D e^{-(x^2 - 2xy + 4y^2)}\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \,|\, x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

(a) 変数変換 $s = x - y\,,\ t = \sqrt{3} y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき，J を (s, t) 変数の 2 重積分として表しなさい．ただし K を具体的に表示する必要はない．

(b) (a) の集合 K を求めなさい．

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい．

(名古屋工業大 2010) (m20102904)

0.408 次の積分の値を求めよ.

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2+2}\,dxdy\ , \quad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq\ 1\ ,\ \ x+y \geqq\ 0\right\}$$

(名古屋工業大 2011) (m20112905)

0.409 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \log(x+y)dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ 1 \leqq\ y \leqq\ 2\}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122905)

0.410 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy\ , \quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leqq \sqrt{3}y \leqq\ x\ ,\ x^2+y^2 \leqq\ 5\right\}$$

(名古屋工業大 2013) (m20132902)

0.411 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{x+y}dxdy\ , \quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\,x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1\right\}$$

(名古屋工業大 2014) (m20142902)

0.412 重積分 $I = \displaystyle\iint_D xdxdy\ , \quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq\ 2x,\ y \geqq\ x-1\right\}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152904)

0.413 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\ , \quad D = \left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq\ 2\right\}$$

(名古屋工業大 2016) (m20162903)

0.414 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}dxdy, \quad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq\ x \leqq\ y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017) (m20172902)

0.415 重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2018) (m20182904)

0.416 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} \qquad \text{ただし}\quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 2x^2-1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202904)

0.417 領域 $D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 3,\ x+y \geqq 0\right\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1}dxdy$$

の値を求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212903)

0.418 xy 平面上で，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y = 1$，直線 $y = 2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022)　　(m20222904)

0.419 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．

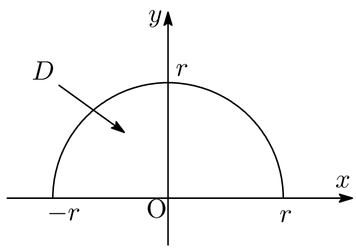
$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232903)

0.420 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$\displaystyle\overline{y} = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy$ （ただし，S は図形 D の面積）

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



(三重大 2004)　　(m20043107)

0.421 空間座標系で，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqq 1$$

をみたす点の集合の作る立体の体積を求めよ.

(三重大 2004)　　(m20043108)

0.422 (1) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け. ただし, $\alpha > 0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053111)

0.423 (1) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha > 0$ とする.

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ.

(三重大 2006)　　(m20063119)

0.424 以下の重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$　　D : $x^2 + y^2 \leqq 1$,　$x > 0$,　$y > 0$

(三重大 2007)　　(m20073105)

0.425 xy 平面上の領域 $D = \{(x, y) \,:\, x + y < 1\,,\ 0 < x\,,\ 0 < y\}$ で定義された関数 $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ について考える.

(1) D における $f(x, y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0, y_0) を求めよ.

(2) D での積分 $\displaystyle I = \iint_D f(x, y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007)　　(m20073118)

0.426 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ.

ただし, $a > 0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $f(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1) = n!$, (ii) $f(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ となることを示せ.

(三重大 2010) (m20103112)

0.427 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ で関数 $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ を考える.

(1) 領域 D における関数 $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(2) 領域 D での積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113108)

0.428 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_R xy\,dxdy \quad (\,R\,:\,x^2+y^2 \leqq 9 \text{ かつ } x \geqq 0\,)$$

(三重大 2011) (m20113113)

0.429 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xy^2\,dxdy \qquad \big(D\,:\,0 \leqq x \leqq y \leqq 1\big)$$

(三重大 2012) (m20123105)

0.430 3 次元空間内で, 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と円柱面 $x^2+y^2=x$ によって囲まれる部分の体積を求めなさい.

(三重大 2013) (m20133108)

0.431 xyz 空間中の曲面 $z = 5-x^2-y^2$, z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒, および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ.

(三重大 2016) (m20163115)

0.432 2 重積分 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2-t^2}dtdx$ の値を求めよ.

(三重大 2017) (m20173116)

0.433 次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

(2) 変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

(3) この 2 次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.

ただし, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.434 次の 2 重積分

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

を求めよ. ここで a は正の実定数とする.

(奈良女子大 2017)　　(m20173205)

0.435 a を正の定数として, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

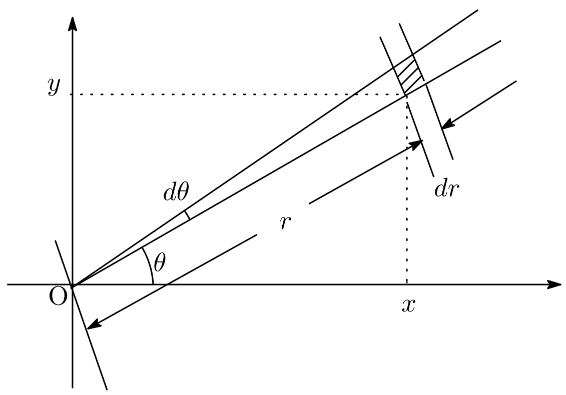
であるから,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し, その結果の平方根をとればよい. このとき, 点 (x, y) の位置ベクトルを $\vec{r}$ として, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく.

(1) x および y を r と θ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を, r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ.



(3) I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4) 前問の面積分を実行し, それにより I の値を求めよ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183205)

0.436 $D = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2\right\}$ として, 次式を求めよ.

$$\iiint_D z^n\, dx\, dy\, dz \qquad (\text{n は自然数})$$

(京都大 1995)　　(m19953303)

0.437 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a>0)$ の $x^2+y^2=ax$ の円柱内の体積を求めよ．

(京都大 1996) (m19963302)

0.438 次のラプラスの積分を考える． $I(a)=\displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\,dx$ 以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換公式を用いて，x^2+y^2 および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006) (m20063304)

0.439 領域 $D=\{(x,y):\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq \sqrt{x^2+y^2}\leqq 2\}$ に対して重積分

$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000) (m20003407)

0.440 直線 $y=x$ と放物線 $y=-x^2+2x$ で囲まれた領域 D を図示し，D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001) (m20013406)

0.441 媒介変数表示された曲線 $C:\ x=3\cos t,\ y=2\sin t\ \ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ を図示し，この曲線で囲まれた図形 D 上の重積分 $\displaystyle\iint_D (xy+1)dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002) (m20023406)

0.442 領域 $D=\{(x,y):0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq \sqrt{x}\}$ 上で重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}(x+y)dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033407)

0.443 閉領域 $D=\{(x,y)\ :\ 1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq x^2\}$ を図示して, 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2+2y)dxdy$$

(京都工芸繊維大 2004) (m20043403)

0.444 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 8,\ y\geqq 0\}$$

(京都工芸繊維大 2005) (m20053403)

0.445 領域 $D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+y}dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063409)

0.446 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.
ただし，$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とする.

(京都工芸繊維大 2008) (m20083404)

0.447 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{2}\leqq\ x\leqq\pi,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103404)

0.448 xy 平面上の図形 D : $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\ r\leqq\ e^{\theta})$ に対して，

重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.449 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\ x^2\right\}$$

に対して．重積分

$$I=\iint_D\sqrt{x^3+1}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153403)

0.450 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+6xy+3xy^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq 1\}$ とする.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223403)

0.451 次の積分の積分値を求めよ.

$$\iint_D\frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D: x^2+y^2\leq 1 \text{ である.）}$$

(大阪大 1995)　　(m19953505)

0.452 S は $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2\leq a^2$ となる領域である．ただし， $a>0$ とする.

(1) 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\iint_S f(x)\,dx\,dy=\iint_S f(y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_S\big(f(x)+f(y)\big)\,dx\,dy$$

(2) $\displaystyle\iint_S x^4\,dx\,dy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_S x^6\,dx\,dy$ を求めよ.

(大阪大 1998）　　(m19983501)

0.453 (1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) ：

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad (r>0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分 $\quad I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分 $\quad J(\alpha,\ \beta) = \displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha} \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^{\beta}} dx\,dy\,dz$

が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．

ただし，$B = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2+y^2+z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007) (m20073506)

0.454 曲線 $y = f(x)$, x 軸，直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする．

(1) 上記の領域を D とするとき，$\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x dx dy}{\displaystyle\iint_D dx dy}$$

で定義される．

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}$$

となることを証明せよ．

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ．

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする．

(大阪大 2011) (m20113505)

0.455 曲面 $S\ :\ x^2 + y^2 - z^2 + x + y + 2 = 0\ (z > 0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S と平面 $z = 2$ の交線の長さを求めよ．

(2) 曲面 S と平面 $z = 2$ に囲まれた領域の体積を求めよ．

(3) 点 (x, y, z) が曲面 S 上にあるとき，$x + y - 2z$ の最大値を求めよ．

(大阪大 2016) (m20163508)

0.456 関数 $w(t)$ は初期条件「$t = 0$ のとき $w = 3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{3}{7}w(x + y) + \frac{1}{17}w(x - 2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x, y) dx dy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 4\right\}$$

(大阪大 2020)　　(m20203505)

0.457 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 1-x\}$ とするとき，次の積分を求めよ．

$$\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$$

（大阪府立大 2001）　　(m20013602)

0.458 累次積分

$$I=\int_0^1\left(\int_y^1 y^2e^{x^4}dx\right)dy$$

の計算を実行しよう. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I を二重積分とみたとき, 積分する領域（ただし, 境界を含む）を xy 平面上に図示せよ.

(2) 積分順序を交換することにより, I の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103601)

0.459 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)^{n/2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし. 任意の自然数 ℓ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^\ell e^{-t^2}=0$ となることは証明なしに用いてもよい.

(1) 極座標への変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.

(2) J_0 の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103602)

0.460 次の積分 (1),(2) の値を求めよ. ただし, 集合 D,E を正の実定数 $R,\ a,\ b,\ c$ により

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\,|\,x^2+y^2\leq R^2\right\},\quad E=\left\{(x,y,z)\in R^3\,|\,ax^2+by^2+cz^2\leq 1\right\}$$

と定める.

(1) $\displaystyle\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$　　　(2) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$

(大阪府立大 2011)　　(m20113603)

0.461 領域 D を　$D=\left\{(x,y)\in R^2\ \middle|\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$　とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.　　　(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163609)

0.462 2 次元平面での領域 D を

$$D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 0\leqq x+y\leqq 1\}$$

とおく. このとき, 各問に答えよ

(1) $x=u(1-v),\ y=uv$ とおく. 点 (x,y) が領域 D 上を動くとき, この変換により点 (u,v) はどのような領域を動くか. uv 平面上で動きうる範囲を図示せよ.

(2) (1) の変換のヤコビ行列式の値を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D(x+y)^{10}dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2018)　　(m20183606)

0.463　3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ．

(2)　定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} dxdydz$$

の値を求めよ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.464　次の積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2\, dx\, dy$

(2)　$\displaystyle\iint_A (\,|x| + |y|\,)\, dx\, dy \quad \left(A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \le 1\right\}\right)$

(神戸大 1997)　　(m19973806)

0.465　$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \le x, y \ge 0\right\}$　とするとき，

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973807)

0.466　次のような変数変換について以下の問いに答えよ．

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

ただし，$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$　$E = \{(u, v) | u^2 + v^2 \le 1\}$ とする．

(1)　$u^2 + v^2 \le 1$ が $x^2 + y^2 \le 1$ に移ることを証明せよ．

(2)　ヤコビアンを求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_D dxdy$ ，$\displaystyle\int_E \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$　を求めよ．

(4)　$\displaystyle\int_D dxdy = \int_E \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$　は成立しない．何故か．

(神戸大 1999)　　(m19993804)

0.467　次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x + y)^4 dxdy, \quad D = \{(x, y) \,|\, x^2 + 2xy + 2y^2 \le 1\}$$

(神戸大 2001)　　(m20013806)

0.468　R を正の実数とし，$D_R = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　次の積分を計算せよ．　$\displaystyle I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $\lim_{R\to\infty} I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ． $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(神戸大 2002)　　(m20023802)

0.469 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \left(D = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \ : \ x^2+y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003)　　(m20033805)

0.470 次の重積分を計算せよ．

(1) $\iint_D x dxdy, \qquad D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,$ ただし，$a, b > 0$

(2) $\iint_D \sin(x+y) dxdy,$ 　　D は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\iint_D (x^2+y^2) dxdy, \qquad D : x^2+y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003)　　(m20033806)

0.471 $\varepsilon > 0$ とし，$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x^2-y^2}{x^4+y^4} dxdy$$

(神戸大 2004)　　(m20043804)

0.472 次の各問に答えよ.

(1) 積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ.

(2) 次の D 上の重積分を, $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\,,\ \ D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq x\}$$

(神戸大 2004)　　(m20043805)

0.473 次の計算をしなさい.

(1) $\sin^{-1} x$ を sin の逆関数とするとき
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\iint_{x,y\geq 0,\, x+y\leq 1} xydxdy$

(4) $\iint_V e^{-x^2-y^2} dxdy$
ここで V は第 1 象限 $V = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005)　　(m20053802)

0.474 次の重積分を求めよ． $\int_{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}} x^2 y\, dxdy$

(神戸大 2006)　　(m20063803)

0.475 次の定積分を計算せよ.

(1) $\iint_D xy\, dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \mid \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid |x|+|y|\leq 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid y\geq x,\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.476　以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0\leqq\ y\leqq\ x\leqq\ 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ x^2+y^2\leqq\ 1$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 2,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 2$

(神戸大 2007)　　(m20073808)

0.477　次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}} \qquad (D=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3|x^2+y^2+z^2\leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.478　(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ.

(2) 球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ と円柱 $x^2+y^2\leq x$ の共有部分の体積を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093804)

0.479　$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ とおく. 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D |x|\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D |x+y|\,dxdy$

(神戸大 2009)　　(m20093810)

0.480　$\displaystyle D=\left\{(x.y)\ \middle|\ y\leq 3x\,,\ y\leq \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\,,\ y\geq \frac{1}{2}x\,,\ y\geq 3x-10\right\}$

とするとき, D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dxdy$ を計算せよ.

(神戸大 2010)　　(m20103808)

0.481　次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\sin(\pi\,|x-y|)dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,|x+y|\leq 1,\ |x-y|\leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1+x^2+y^2)dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x+y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}.$

(神戸大 2011)　　(m20113806)

0.482　重積分

$$V=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\,. \quad D=\{(x,y)\in R^2\,|\,1\leqq\ x\leqq\ 2,\ 0\leqq\ y\leqq\sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) D が変数変換 $x = u,\ y = uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ.

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) V の値を求めよ.

(神戸大 2011) (m20113808)

0.483 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$$

(神戸大 2012) (m20123804)

0.484 $D = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4\ ,\ 1 \leqq\ z \leqq\ x^2+y^2\right\}$ とおく．積分

$$\int_D \frac{2x^2+y^2+x}{z}dxdydz$$

の値を求めよ.

(神戸大 2013) (m20133804)

0.485 二重積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}dxdy$ について以下の問に答えよ.

(1) この二重積分に対応する積分領域を図示せよ.

(2) I の値を求めよ.

(神戸大 2014) (m20143804)

0.486 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq x\right\}$ とするとき，積分

$$\int_D x^2 dxdy$$

の値を求めよ.

(神戸大 2014) (m20143807)

0.487 領域 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2+y^2 < 4,\ x+y > 0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$$

を計算せよ.

(神戸大 2015) (m20153804)

0.488 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ.

(神戸大 2016) (m20163804)

0.489 (1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ. $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \leqq\ x+y \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y\right\}$

(3) 変数変換 $x = st,\ y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ. $E = \left\{(s,t) \;\middle|\; 1 \leqq\ s \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ t \leqq\ 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする. $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016) (m20163809)

0.490 $a, b, c > 0,\ V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ とするとき，積分 $I = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173802)

0.491 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$ （ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.492 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2 \leqq 1} (x-y)^2 dxdy$ の値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183804)

0.493 (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

ただし，$D = \{(x, y) \mid x, y \in R,\ 0 \leqq x^2+y^2 < \infty\}$ とする．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ．

(神戸大 2018)　　(m20183809)

0.494 xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy = 1$, $xy = 9$ と 2 本の直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.495 (1) xy 平面上の領域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 A, B を次のように定める．

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4,\quad 0 \leq z\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.496 xy 平面上の閉領域 D を

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

と定め,

$$z = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V = \int_D |x^2 - y^2| dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021) (m20213806)

0.497 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ .\ 1 \leq 3x - 2y \leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 領域 D の概形を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + y)\left\{\log(3x - 2y)\right\}^2 dx\, dy$ の値を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x - 7y}}\, dx\, dy$ の値を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223804)

0.498 n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x + y)^2 (x - y)^n dxdy\ , \qquad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223808)

0.499 (1) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2,\ \ y \geq x,\ \ y \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; xy \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2 - y^2} \cos(ax^2 + ay^2) dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である．

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023) (m20233804)

0.500 次の積分を計算せよ．ただし，a は定数で，$a > 0$ である．

$$\iint_D x^2 y\ dxdy \qquad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(鳥取大 1997) (m19973906)

0.501 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K y\ dxdy\ , \quad K : 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$$

(鳥取大 2000) (m20003905)

0.502 次の積分を求めよ．ただし $a>0$ とする． $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqq 2ax}(x^2+y^2)^2\ dxdy$

(鳥取大 2001)　　(m20013905)

0.503 $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$ の 3 つの直線に囲まれた領域で次の積分を計算しなさい．

$$\iint \left(x^2-xy\right) dxdy$$

(鳥取大 2004)　　(m20043903)

0.504 次の計算をせよ．

$$\iint_D (1-x^2-y^2)dxdy \quad \left(\text{ただし } D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}\right)$$

(鳥取大 2005)　　(m20053903)

0.505 次の積分を計算せよ．

(1) $I_1=\displaystyle\int \frac{1}{a^2x^2-b^2}dx$, $a>0$, $b>0$　　(2) $I_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx$, $a>0$

(鳥取大 2006)　　(m20063903)

0.506 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1 \quad (a,b>0)\right\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ の値を求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073906)

0.507 次の平面領域 D における二重積分 $\displaystyle\int_D y^2dxdy$ を計算せよ．

(1) $D\ :\ x>0,\ y>0,\ \dfrac{1}{2}x+y<1$.　　(2) $D\ :\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1$.

(鳥取大 2008)　　(m20083904)

0.508 次の各積分を求めよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\, dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x|\leq y\leq 1} \sqrt{y^2-x^2}\, dxdy$

(鳥取大 2009)　　(m20093913)

0.509 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント : $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy$ であるから，
x,y の 2 重積分を求めればよい．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.510 (1) 実数 t に対して，　$t=\tan\theta$　かつ　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta=\arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ を $x=\sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とする．

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する． 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqq x^2+y^2\leqq R^2\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.511 (1) 曲線 $y=\cosh x$ $(0\leqq x\leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.512 $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.513 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ．

(3) 積分 $I(c)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2cx\,dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c，$I(c)$ を用いて表せ．

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ．

(広島大 2010)　　(m20104102)

0.514 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2011)　　(m20114103)

0.515 以下の問いに答えよ．

(1) 次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める．

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}+\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める．

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.516　一様な密度を持つ半球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z \geq 0)$ の重心の座標を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124111)

0.517　実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める．

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1)　f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2)　f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3)　$\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である．

(4)　$\ell=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.518　$0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B \;\middle|\, x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$B(r)$ の体積を求めよ．

(2)　$B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3)　$B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.519　積分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184107)

0.520　面 $z=x^2+y^2$ と面 $z=x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(広島大 2022)　　(m20224103)

0.521　円柱面 $x^2+y^2=bx$ と球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234103)

0.522　$D=\{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq x,\ y \geqq -x\}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　xy 座標平面上に D を図示せよ．

(2)　極座標変換により，D は D' にうつされる．D' を極座標を用いて表せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2001) (m20014203)

0.523 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0, y\geqq 0, x^2+y^2\leqq 1\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2002) (m20024204)

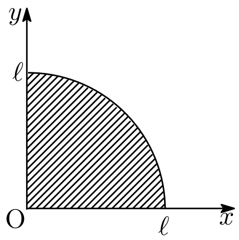
0.524 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\ \alpha\text{は正の定数とする})$$

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4,\ x+y\geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xdxdy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005) (m20054201)

0.525 下図のように，半径 ℓ の円の 1/4 である扇形の一様な板片を，円の中心であった部分が原点と重なり，直線部分が x 軸と y 軸に重なるように置いてある．このとき，この板片の重心の位置座標（x 座標と y 座標の値）を求めよ.



(広島市立大 2006) (m20064203)

0.526 2 重積分 . $\displaystyle S=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\}$ を求めることによって,

$\displaystyle I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を求めたい. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $S=I^2$ を示せ.

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換して S を求めよ. また, I を求めよ.

(広島市立大 2008) (m20084201)

0.527 累次積分 $\displaystyle I=\int_0^1\left\{\int_x^1 e^{y^2}dy\right\}dx$ に関して以下の問いに答えよ

(1) 積分領域を図示せよ.

(2) 積分順序の変更を行う. $\displaystyle I=\int_a^b\left\{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} e^{y^2}dx\right\}dy$ と書き換えたとき, a, b, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ を求めよ.

(3) I を計算せよ.

(広島市立大 2009) (m20094202)

0.528 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いて, 2 重積分

$$S=\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,1\leqq x^2+y^2\leqq 4\right\}$$

の値を求めよ.

(広島市立大 2010) (m20104203)

0.529 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする. ただし, $x^2+y^2 \leq 9$ である. 線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す. このとき, z を x,y の関数で表せ.

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく. 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる. ただし, $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 9\}$ である. この 2 重積分を計算することにより, V の値を求めよ.

(広島市立大 2011) (m20114203)

0.530 2 変数関数 $f(x,y) = \sin(x+2y)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ.

また, 勾配ベクトルの具体的な値を $(0,0)$, $(0,\pi/4)$, $(0,\pi/2)$ において求めよ.

(2) 座標平面上の 4 点 $(0,0)$, $(0,\pi/2)$, $(\pi,0)$, $(\pi,-\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）. 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ の値を求めよ.

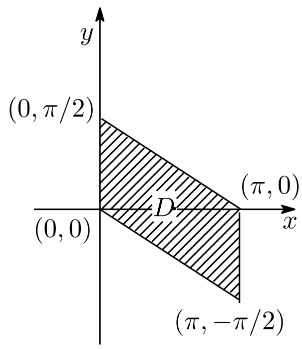


図 1

(広島市立大 2012) (m20124204)

0.531 $D = \left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \leq \sqrt{3}y\right\}$ とおく.

変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて,

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

を求めよ.

(広島市立大 2013) (m20134202)

0.532 次の問に答えよ.

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする. このとき, 行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r,θ で表せ.

(2) (1) で求めた J に対して, $I = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ.

(徳島大 1999) (m19994402)

0.533 $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2000) (m20004402)

0.534 (1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a} f(x+y)dxdy = \int_0^a xf(x)dx,\quad D_a = \{(x, y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq a\}$$ を示せ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)^2}dxdy,\quad D_1 = \{(x, y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$$

(徳島大 2001) (m20014402)

0.535 $D = \{(x, y)\ :\ y \geqq\ x^2\ ,\ y \leqq\ x+2\}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034402)

0.536 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板を $D(a) = \{(x, y) \in R^2\ ;\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2\}$ とする．

(1) 2 重積分 $\displaystyle I(a) = \iint_{D(a)} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ．

(2) 平面の全体における広義積分 $\displaystyle I = \iint_{R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ．

(徳島大 2004) (m20044402)

0.537 累次積分 $\displaystyle I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ について, 次の問に答えよ．

(1) 2 重積分を用いると $\displaystyle I = \iint_D y^2 e^{x^2} dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ．

(2) I を求めよ．

(徳島大 2005) (m20054403)

0.538 平面上の図形 $D = \{(x, y)\ :\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1,\ -2 \leqq\ y \leqq\ 2\}$, $S = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\iint_D dxdy$ と $\displaystyle\iint_S dxdy$ を求めよ． (2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ． (3) $\displaystyle\iint_S xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2007) (m20074403)

0.539 $D = \{(x, y)\ :\ y \geqq\ x,\ x \geqq\ 0,\ y \leqq\ 2\}$ に対して，二重積分 $\displaystyle I = \iint_D y^2 e^{-y^4}\,dxdy$ を考える．

(1) I を累次積分で表せ．

(2) (1) の累次積分の積分順序を変更せよ．

(3) I の値を求めよ．

(徳島大 2008) (m20084403)

0.540 (1) $f(x, y) = x + y + \sin(x^2 + y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ．

(2) $a > 0$ に対して $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_y(x, y)\,dxdy$ を求めよ．

(徳島大 2009) (m20094403)

0.541 $0<a<1,\ D_a=\left\{(x,y)\ ;\ a^2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とする. 行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $I(a)=\displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.542 $D=\{(x,y)\,;\,1 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$ とする.　二重積分 $I=\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $u=x-y,\ v=x+y$ とおく. x,y を $u,\ v$ で表せ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする. D' を図示せよ.

(4) I を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114403)

0.543 $a>0$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2 \leqq\ a^2\ ,\ x \geqq\ 0\ ,\ y \geqq\ 0\right\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2012)　　(m20124407)

0.544 $0<a<\dfrac{1}{2}$ とし, xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,y)\ ;\ y \leqq\ x \leqq \dfrac{1}{2},\ a \leqq\ y \leqq \dfrac{1}{2}\right\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $I_a=\displaystyle\iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right)dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について, $\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2} I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.545 $D=\{(x,y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x+y \geqq\ 1\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $u=x+y,\ v=\dfrac{y}{x+y}$ とおく. x,y を u,v の式で表せ. また, 行列式 $J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 v\sin(\pi v)dv$ を求めよ.

(3) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}e^{-(x+y)}\sin\left(\dfrac{\pi y}{x+y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\bigl(x(u,v),\ y(u,v)\bigr)|J(u,v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.546 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.547 (1) $D = \{(x,y) \mid y \leq 2x,\ x \leq 2y,\ x+y \leq 3\}$ とする，D を図示せよ．

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D y\,dxdy$

(高知大 2008)　　(m20084502)

0.548 R^3 で，球 $S\ :\ x^2+y^2+z^2 \leqq 5^2$ と円柱 $C\ :\ x^2+z^2 \leqq 4^2,\ -5 \leqq y \leqq 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094502)

0.549 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する．

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x\,,\ x \leq 2y\,,\ x+y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ．

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x,y) = \frac{2x-y}{3}\,, \qquad v = \psi(x,y) = \frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x,y) = (\varphi(x,y),\ \psi(x,y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ．

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ．

(4) (3) の重積分の値を求めよ．

(高知大 2010)　　(m20104502)

0.550 $D = \bigl\{(x,y); y^2 \leqq x \leqq y, 0 \leqq y \leqq 1\bigr\}$ とする．

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2000)　　(m20004604)

0.551 $D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq \pi^2\}$ とするとき, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

(愛媛大 2004)　　(m20044606)

0.552 次の積分を計算せよ. $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy \qquad D: x^2+y^2 \geqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x+2,\ 0 \leqq x \leqq 1$

(愛媛大 2004)　　(m20044607)

0.553 (1) 関数 $f(x,y)=x-x^3-2xy^2$ の極値を求めよ.

(2) $D=\{(x,y)\ :\ 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y,\ 2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 3\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^2ydxdy$$

(愛媛大 2005)　　(m20054603)

0.554 $D=\{(x,y)\,;\,1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

(愛媛大 2006)　　(m20064604)

0.555 積分の順序を交換することにより，次の反復積分の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 y^2e^{x^2}dxdy$

(愛媛大 2006)　　(m20064613)

0.556 a を正の定数として，$D=\{(x,y)\ :\ -a \leqq\ x \leqq\ a,\ -a \leqq\ y \leqq\ a\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D e^{|x-y|}dxdy$

(愛媛大 2007)　　(m20074604)

0.557 $x-y$ 平面の領域 $D\ :\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1$ 上で，曲面 $z=xe^{-y}$ と平面 $z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074613)

0.558 (1) $\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ が偏微分可能であるとき，$J(u,v)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ とおく．次の $\varphi,\ \psi$ に対して $J(u,v)$ を求めよ.

(a) $\varphi(u,v)=e^u\cos v\ ,\quad \psi(u,v)=e^u\sin v$

(b) $\varphi(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}\ ,\quad \psi(u,v)=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}$

(2) $D=\{(x,y)\ ;\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$$

(愛媛大 2008)　　(m20084610)

0.559 (1) 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\sin(xy)\,dxdy$$

(愛媛大 2009)　　(m20094603)

0.560 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy$$

(愛媛大 2010)　　(m20104604)

0.561 以下の問に答えよ．

(1) 次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos\frac{y}{x}dx\right) dy$$

(2) $D = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114605)

0.562 $D = \{(x, y)\,;\, 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy$$

(愛媛大 2011)　　(m20114610)

0.563 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) 空間における領域

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqq a^2\ \ 0 \leqq z \leqq f(x, y)\right\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0 < a < 1$ とする．

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.564 次の累次積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3}\,dy\right) dx$$

(愛媛大 2014)　　(m20144604)

0.565 $D = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy$$

(愛媛大 2015)　　(m20154604)

0.566 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y^2 + y}\,dydx$$

(愛媛大 2015)　　(m20154607)

0.567 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq 2y \leqq 2\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \log(1+y^2)dxdy$$

(愛媛大 2017) (m20174604)

0.568 円柱面 $x^2+y^2=4$ の内部にある円柱面 $x^2+z^2=4$ の表面積 S を求めよ,

(愛媛大 2017) (m20174610)

0.569 $D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leqq y \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy$$

(愛媛大 2018) (m20184604)

0.570 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2021) (m20214604)

0.571 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x \geqq 1,\ y \geqq 2,\ xy \leqq 4\right\}$ とする.

(1) D を図示せよ.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xe^{xy}dxdy$ を求めよ.

(愛媛大 2022) (m20224609)

0.572 $V: x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $(a>1)$ において，次の積分を求めよ.

(1) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(2) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$$

(九州大 1996) (m19964702)

0.573 (1) 領域 $D=\{(x,y) \mid 0 \leq x+y \leq 1\ ,\ 0 \leq x-y \leq 1\}$ を座標平面に図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$ の値を計算せよ.

(九州大 1997) (m19974703)

0.574 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ.

ただし， $D=\{\,(x,y) \mid 0 \leq y-x \leq y+x < +\infty\,\}$ である.

(九州大 1998) (m19984705)

0.575 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ ,\ r \geq 0)$ とする.

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ.

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \qquad x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ z \geqq 0\ \}$

D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である. このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ. (九州大 1999) (m19994703)

0.576 xy 平面上の点 (x,y) と, uv 平面上の点 (u,v) との間に

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$$

という対応関係がある. このとき, xy 平面上の 3 点 $A(0,0),B(1,0),C(1,\dfrac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を, 上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として, 次の問いに答えよ.

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ.

(2) 図形 P の面積を求めよ.

(九州大 2000) (m20004701)

0.577 次の積分の計算をしなさい.

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/4}dxdy,\quad ただし, D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 4\}.$$

(九州大 2001) (m20014702)

0.578 xyz 空間内の円柱面 $T\ :\ x^2+y^2=x$ と曲面 $S\ :\ z=\sqrt{x^2+y^2}$ について, 次の設問に答えよ.

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ.

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ.

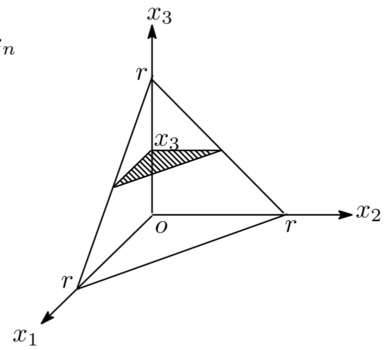
(九州大 2003) (m20034703)

0.579 正の数 r と整数 $n\geq 1$ に対して

$$K_n(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \mid\ x_i\geq 0\ \ (1\leq i\leq n)\ ,\ \sum_{i=1}^n x_i\leq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$(ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積)は次で与えられる.

$$|K_n(r)|=\int\cdots\int_{K_n(r)} 1\ dx_1\cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004) (m20044701)

0.580 有名な公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad (a>0)$

の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}=\frac{d}{da}\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\right)=\int_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial a}e^{-ax^2}\right)dx=-\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである．

(1) 任意の $h > 0$ に対して，不等式 $\quad 0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2} - 1}{h} + x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$, $\quad x \in \mathbb{R} \quad$ を示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx < \infty$ を示しなさい．

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい．

(九州大 2006) (m20064705)

0.581 2 変数関数 $z = x^2 - y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z = 0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる立体図形：
$0 \leqq\ z \leqq\ x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq\ 1$ の体積を求めよ.

(3) $z = x^2 - y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取られる部分：
$z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq\ 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007) (m20074702)

0.582 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ.

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007) (m20074707)

0.583 xyz 空間において, $\quad z = e^{-(x^2+y^2)} \quad$ で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 Σ と $\quad z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2 \quad$ によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である.

(2) 曲面 Σ と $\quad z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a \quad$ によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において, $\quad y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a \quad$ で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ.

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ.

(九州大 2008) (m20084708)

0.584 3 次元空間において二つの曲面 $A\ :\ x^2+y^2+z^2=1$, $B\ :\ x^2+y^2=x$ を考える.

(1) これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ.

(2) 曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ.

(九州大 2008) (m20084711)

0.585 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\ ;\ x=t\cos\theta\ ,\ y=t\sin\theta\ ,\ z=r\ ,\ 0\leq t\leq r\ ,\ 0\leq r\leq 3\ ,\ 0\leq\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+1$$

とし, $S=V\cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}\qquad \max\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010) (m20104705)

0.586 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく.

(1) 1 次変換 $u=x+y$, $v=x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ .

(2) (1) の変数変換において, ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$$

を求めよ.

(九州大 2012) (m20124710)

0.587 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2\leqq\ y$$

(九州大 2015) (m20154704)

0.588 a は $a>0$ なる定数とする. xy-平面内の領域 D と, D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を, 次のように定義する.

$$D=\{(x,y)\mid 0<y<x<a\}$$

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $0<x<a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ.

$$\int_0^x f(x,y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x,y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ.

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.589 $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する.

$$f(x,y)=\frac{y}{(xy+1)^2(y^2+1)}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $y>0$ なる y を固定し，a を任意の正の定数として，

$$g(y,a)=\int_0^a \frac{1}{(xy+1)^2}dx$$

とおく．このとき，$g(y,a)$ を求めよ.

(2) 領域 $D_1=\{(x,y)\mid x>0,\ y>1,\ xy<1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ.

(3) 領域 $D_2=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ.

(九州大 2018)　　(m20184708)

0.590 2 次元実平面上の閉区間 $D,\ D_+$ を

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4\leqq y^2\leqq x^2-1 \ \text{かつ}\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9\right\}$

$D_+=D\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqq 0 \ \text{かつ}\ y\geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xydxdy$　　　(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(九州大 2019)　　(m20194706)

0.591 $x>0,\ y>0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する.

$$f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)\ ,\qquad g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{t\to+0} t\log t=0$$

(3) 領域 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0<x^2+y^2<1,\ 0<y<x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.592 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$　について考える.

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) 以下の条件下のもとで $f(x,y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.593 領域 $R=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq y \leq 2x\right\}$ に対する積分　$I=\displaystyle\iint_R (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2-3xy}\,dxdy$　を求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204704)

0.594 $0<A<B\leq 1$ とするとき，領域 D を $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ A\leq x\leq B,\ x^2\leq y\leq x\right\}$ とし，
$f(x,y)=\dfrac{y+y^2}{x^2+y^2}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．
ただし，逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．

(1) 関数 $g(x,y)=y-x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x,y)dx$ を求めよ．ただし，$x>0,\ y>0$ とする．

(3) 関数 $h(x)=2\ \arctan(x)-2x+x\log(x^2+1)$ の微分を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy=H(B)-H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214708)

0.595 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 次の広義積分は収束することを示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(2) $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\leq x,\ 0\leq y\leq 1\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_1=\iint_{D_1} e^{-x^2y}\,dxdy$$

(3) $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_2=\iint_{D_2} e^{-x^2y}\,dxdy$$

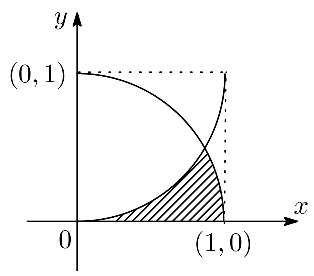
(九州大 2021)　　(m20214710)

0.596 第 1 象限において，円 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-1)^2=1$ および x 軸で囲まれる部分を A とする（図の斜線部）．

(1) 2 つの円の第 1 象限内の交点を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int x\cdot e^{2x}dx$　を求めよ．

(3) 重積分　$\displaystyle\iint_A x^3\cdot e^{x^2+y^2}dxdy$　を求めよ．



(九州大 2022)　　(m20224707)

0.597 球の内部の微小部分での密度が，中心からの距離に反比例するとき，球全体の平均密度は表面の密度の 3/2 倍であることを示しなさい．

（佐賀大 2000）　　(m20004905)

0.598 次の 2 重積分を求めよ． $I=\iint_D y\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\ :\ y^2 \leq x \leq y+2\}$

(佐賀大 2003) (m20034919)

0.599 重積分 $\displaystyle\iint_{\{-1\leq x+y\leq 1\,,\,-1\leq x-y\leq 1\}}(x^2-y^2)e^{-(x+y)}dxdy$ を計算せよ．

(佐賀大 2003) (m20034920)

0.600 以下の重積分を計算せよ．

$$\iint_D 3xdxdy \qquad D=\{\ x^2+y^2\leq 1\ ,\ x\geq 0\}$$

(佐賀大 2004) (m20044919)

0.601 $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy\ , \qquad D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq 1\ ,\ 0\leq x-y\leq 1\}$
を計算せよ．

(佐賀大 2004) (m20044920)

0.602 次の 2 重積分を求めよ．

$$I=\iint_D (px^2+qy^2)dxdy \qquad D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\} \quad (p,q\ \text{は定数})$$

(佐賀大 2004) (m20044921)

0.603 球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ と円柱 $x^2+y^2\leq x$ の共通部分の体積を求めよ．

(佐賀大 2005) (m20054905)

0.604 次の定積分を求めよ．

$$\iint_D dxdy\ x^2y \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ x+y\leq 1\}$$

(佐賀大 2005) (m20054911)

0.605 重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\mid y^2\leq x\leq y+2\}$ を計算せよ．

(佐賀大 2005) (m20054916)

0.606 放物面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2x$ で囲まれた立体の体積を求めよ．

(佐賀大 2005) (m20054934)

0.607 $f(x), g(x)$ は無限回微分可能な実数値関数で，$g(x)\geq 0$ とする．
$D=\{(x,y)\,;\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq g(x)\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{d\,g(x)}{dx}\ \frac{d^2f(y)}{dy^2}\ dxdy$$

ただし，$f'(0)=0,\ f(g(1))=3,\ f(g(0))=0$ である．

(佐賀大 2006) (m20064903)

0.608 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy \qquad (\ D\ :\ x^2+y^2\leq 1\ )$

(佐賀大 2006) (m20064910)

0.609 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid 0\leq y<x\leq 1\}$ を計算せよ．

(佐賀大 2006) (m20064918)

0.610 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$,　$D\,:\,1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ を計算せよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064940)

0.611 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　（ 不定積分．積分定数を C とせよ．）

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$　$\left(\text{但し, } D=\left\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq \sqrt{x}\ \right\}\right)$

(佐賀大 2007)　　(m20074907)

0.612 $x>0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x>1$ とする.

$$f(x)=(x-1)f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ.

$$f(n)=(n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094903)

0.613 図 (a) に示すような原点を中心とし，半径 1 から半径 2 までを領域とするドーナツ状の平面 S が存在し，面密度が $\rho=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{r^2}$ （ただし r は原点から (x,y) までの距離）で与えられるとき，この平面全体の質量を求めよ.

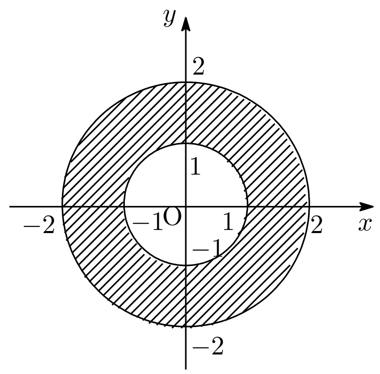


図 (a)

(佐賀大 2009)　　(m20094917)

0.614 $\displaystyle\int_1^2 dy\int_0^{5-\frac{5}{2}y} f(x,y)dx$ の積分領域を示し，積分順序を変更せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094923)

0.615 空間内で $x^2+y^2=a^2$　$(a>0)$ と表示される円柱の xy 平面 $(z=0)$ より上，かつ，平面 $z=x$ より下にある部分の体積を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094925)

0.616 次の積分を求めよ．

$$\iint_D x\,dxdy \qquad (D : x^2+y^2 \leq 4,\ x+y \geq 2)$$

(佐賀大 2010)　　(m20104904)

0.617 図 1 に示す三角形の面密度が $\rho(x,y)=\dfrac{y}{x+1}$ で与えられるとき，この三角形の質量 M と重心の座標 $(g_x,\,g_y)$ を求めよ．ただし，重心の座標は，三角形の領域を S としたとき，

$$g_x=\frac{\displaystyle\iint_S x\rho(x,y)\,dx}{M}\ ,\quad g_y=\frac{\displaystyle\iint_S y\rho(x,y)\,dx}{M}$$ で与えられる．

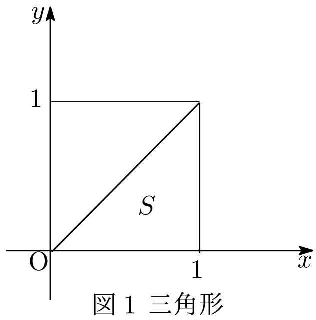


図 1 三角形

(佐賀大 2011)　　(m20114913)

0.618 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\leq x\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \log(x+y+1)dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124903)

0.619 次の重積分を計算せよ．

$$\int_0^2\left\{\int_0^4 (4-x^2-y)dy\right\}dx$$

(佐賀大 2012)　　(m20124914)

0.620 次の 2 重積分を変数変換を用いて求めよ．

$$\iint_{1\leqq x^2+y^2\leqq 4}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^3}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134906)

0.621 $\displaystyle\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$ の積分順序を変更して計算せよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134918)

0.622 $D=\big\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\big\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y(e^x-1)}{x}dxdy$ を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144915)

0.623 次の 2 重積分を 2 つの方法を使って計算せよ．

$$\iint_D ydxdy\,, \qquad D=\{x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq o \quad (a>0)\}$$

(1) 逐次積分（累次積分）を使って計算せよ．

(2) 2 次元極座標に変換して計算せよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154914)

0.624 次の積分について，問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x dx$ を求めよ.

(3) $D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \cos(x+y) dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164903)

0.625 次の二重積分について以下の問いに答えよ.

ただし，$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leqq\ x - 2y \leqq\ 3,\ 0 \leqq\ x + y \leqq\ 1\right\}$ とする.

$$\iint_D (x-2y)e^{x+y} dxdy$$

(1) 積分領域 D を図示せよ.　　(2) 二重積分を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164915)

0.626 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$ を求めよ.　　(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ を求めよ.

(3) $D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ として，2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164927)

0.627 次の重積分の値を求めよ.

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{2+x^2+y^2} dxdy$　（ただし，D は $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ で表される領域とする.）

(佐賀大 2017)　　(m20174902)

0.628 xy 平面上の集合 $\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 < R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x, y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R > 2$ を満たすとする.

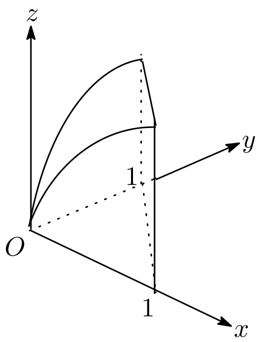
(1) $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい.

(2) 集合 D を $D = \left\{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$ を求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184903)

0.629 図に示されている，曲線 $z = \sqrt{x+y}$ と平面 $x+y=1$ および三つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めよ.



(佐賀大 2018)　　(m20184911)

0.630 円柱面 $x^2+y^2=1$ (z は任意) と 2 平面 $z=y$ および $z=0$ で囲まれた立体について考える．次の問いに答えよ.

(1) 円柱面と 2 平面で囲まれた領域 D を式で表せ.

(2) 円柱面と 2 平面で囲まれた立体の体積を求めるための積分の式を示せ.

(3) (2) の積分を求めよ.

(佐賀大 2018)　　(m20184918)

0.631 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$$

(佐賀大 2021)　　(m20214902)

0.632 $D = \{(x, y) \mid 1 \geq x + y,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ の値を求めよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214918)

0.633 重積分 $\displaystyle\iint_D (x + y)^2\, dxdy \qquad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ について $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ として計算せよ.

(佐賀大 2021)　　(m20214926)

0.634 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D \left(x + \frac{2}{y}\right) dxdy \qquad (D : 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq e^2)$$

(佐賀大 2022)　　(m20224908)

0.635 (1) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{1 + y^4}\, dxdy$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ とするとき, $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy$ を求めよ.

(佐賀大 2022)　　(m20224917)

0.636 重積分 $\displaystyle\iint_D \sin 2x\, dxdy \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ を求めなさい.

答えだけでなく途中経過 も記載すること.

(佐賀大 2022)　　(m20224929)

0.637 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle I(R) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ 　　注：問 (1) の結果を引用してもよい.

(長崎大 2008)　　(m20085005)

0.638 $D = \{(x, y) \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x + y \leqq\ 1\}$ とするとき, 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ を求めよ.

(長崎大 2008)　　(m20085009)

0.639 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき, 領域 D を図示し, 2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\, dxdy$ を求めよ.

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.640 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.641 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{3x+2y}\,dxdy\,,\quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を求めよ．

(長崎大 2010)　　(m20105014)

0.642 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D xy(x-y)dxdy\,,\quad D\,:\,0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$$

(長崎大 2011)　　(m20115011)

0.643 次の二重積分を求めなさい．

$$\iint_D xydxdy \qquad \text{ただし，}\quad D\,:\,x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ 4$$

(大分大 2005)　　(m20055104)

0.644 $\displaystyle\iint_D \frac{1+x-y}{1+x+y}dxdy$ の値を求めよ．$D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq\ x+y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 1\}$

（熊本大 2001）　　(m20015204)

0.645 $x = r\cos\theta\,,\ y = 2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065201)

0.646 xy 平面上の集合 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-\dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ．

(熊本大 2006)　　(m20065203)

0.647 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(熊本大 2007)　　(m20075202)

0.648 次の重積分の値を求めるために，以下の小問 (1) と (2) について答えなさい．

$$\iint_{4 \leq x^2+y^2 \leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 $r,\ \theta$ を用いて変数変換をする，この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(2) 変数 $r,\ \theta$ とヤコビアン J を用いて，式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大 2014)　　(m20145203)

0.649 以下の積分を計算せよ．ただし，領域 D は図 4 に示す通りである.

$$I = \iint_D xydxdy$$

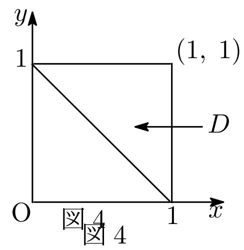


図 4

(熊本大 2018)　　(m20185202)

0.650 次の積分について，以下の問に答えなさい.

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\, dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\right)$$

を求めなさい.

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい.

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい.

(熊本大 2021)　　(m20215202)

0.651 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{(x^2+y)^2} dxdy$ に対して，次の各問に答えよ.
ただし，$D = \{(x,y) | \max(1, x^2) \leqq\ y \leqq\ 4, x \geqq\ 0\}$ とする.

(1) D を図示せよ.　　(2) I の値を求めよ.

(宮崎大 2001)　　(m20015303)

0.652 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ ，　$D\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2$　の値を，次の指示に従って求めよ.

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ.

(3) ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ.

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.653 以下の各問に答えよ.

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \leq x \leq e\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

と定義する. 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy dx dy$$

(宮崎大 2005)　　(m20055304)

0.654 $x > 0,\ y > 0$ に対して $u(x, y) = x^y$, $v(x, y) = x^2 + y^2$ とおく.
このとき, ヤコビ行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J|$ の値を求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065302)

0.655 平面内の集合 D を $D = \{(x, y) \mid x - 1 \leqq\ y \leqq\ x + 1\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\}$ と定義する.

(1) D を xy 座標平面上に図示せよ.　(2) 次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$

(宮崎大 2006)　　(m20065304)

0.656 (1) 平面内の集合 D を, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq\ y \leqq\ 1,\ y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$ と定義する.
集合 D を座標平面上に図示せよ.

(2) (1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dx dy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.657 (1) 平面内の領域 $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0 \right\}$
を xy 平面上に図示せよ. ただし, a, b は正の定数とする.

(2) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta\ \ (r \geqq\ 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき, 領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し, またそれを図示せよ.

(3) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dx dy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.658 重積分

$$I = \iint_D (1 + xy) dx dy\ , \quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leqq\ x \leqq\ 2y\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2009)　　(m20095304)

0.659 xy 平面上で $x = 2,\ y = 1,\ y = x^2$ によって囲まれた領域を D とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 座標平面上に図示せよ.

(2) 重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x + y)\, dx dy$ の値を求めよ.

(宮崎大 2010)　　(m20105304)

0.660　重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq\ 1\}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1)　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおいたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2011)　　(m20115304)

0.661　次の 2 重積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_D (x^3+y^3)dxdy\ ,\quad \text{ただし，}D=\left\{(x,y)\,\middle|\,-1\leqq\ x\leqq\ 1\ ,\ -1\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$$

(宮崎大 2012)　　(m20125302)

0.662　重積分

$$I=\iint_D (x+y^2)dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ x^2,\ x-y\geqq\ 0\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2013)　　(m20135303)

0.663　重積分

$$I=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ y\geqq\ x\right\}$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2014)　　(m20145302)

0.664　重積分

$$I=\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x^2+\frac{y^2}{4}\leqq\ 1\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　値域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2015)　　(m20155304)

0.665　重積分

$$I=\iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ y\leqq\ x,\ x+\frac{y}{2}\leqq\ 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 等式 $I=\int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}}\left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}}\sin\dfrac{2x+y}{9}dx\right)dy$ の空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ.

(3) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.666 重積分

$$I=\iint_D x\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2017)　　(m20175305)

0.667 座標空間において, 原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を, 以下の手順で求める.

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち, $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す.

また, 球 B の表面 (球面) のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z=f(x,\ y)$ とする.

さらに, D を xy 平面内の領域とみなし, 重積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z=f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ.

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと, I は

$$I=\int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}}\left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}}\boxed{\quad オ\quad}\,d\theta\right)dr$$

と書き直せる. 空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{オ}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) I を計算することによって, $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

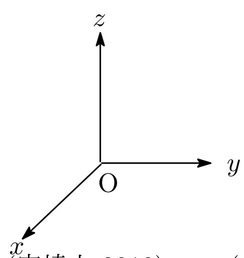
0.668 空間において, 方程式 $2x+y+2z-2=0$ で表される平面を α とする. これについて, 次の各問に答えよ.

(1) 平面 α を, 右図のような座標空間の中に図示せよ.

(2) 平面 α, および, 次の 3 つの平面

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

で囲まれた部分の体積を, <u>重積分を用いて</u>求めよ.



(宮崎大 2019)　　(m20195304)

0.669 重積分

$$I=\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2\right\}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.670　2 変数関数 $f(x,y)=\sqrt{x}\,y^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) 2 階までの偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$ をすべて求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2x\right\}$ の値を求めよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215303)

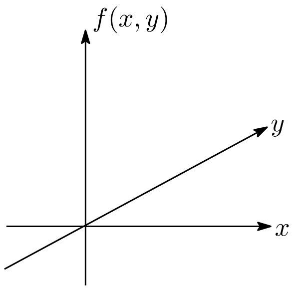
0.671　重積分 $I=\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$ の値を求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225303)

0.672　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい．

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D=\left\{x+y\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\right\},\ \ f(x,y)=x$$

(1) この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい．



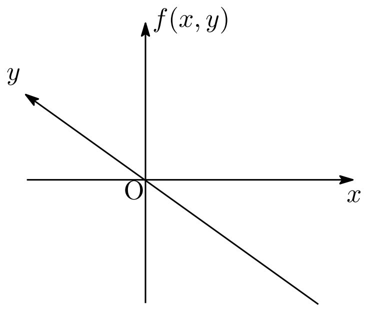
(2) この重積分 I の値を積分計算により求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135412)

0.673　以下の重積分 I について，次の問いに答えなさい．

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy\ ,\quad D=\left\{x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0\right\},\quad f(x,y)=x$$

(1) この重積分 I に相当する集合を以下の座標空間上に図示しなさい．



(2) この重積分 I の値を積分計算により求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145417)

0.674　次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1\int_{-2}^4\left(x^3\cdot\sqrt{3y+1}\right)dxdy$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185433)

0.675 次の積分を計算せよ.

$$\iint_D (-x+2y)(2x+2y)\,dxdy\ , \qquad D=\left\{\,(x,y)\ \middle|\ 1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4\,\right\}$$

(鹿児島大 2021) (m20215416)

0.676 $D\ :\ 0\leqq\ y\leqq\ x\leqq\ 1$ により定義される領域を D として，次の重積分を計算せよ.

$$I=\iint_D \left(2x+3y^2\right)dxdy$$

(室蘭工業大 2016) (m20165515)

0.677 積分せよ.

$$\iint_D 2ydxdy \quad , \quad D\ :\ 1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq 2x^2$$

(室蘭工業大 2017) (m20175512)

0.678 次の積分の値を求めよ.

$$I=\iint_D \frac{1-3y^2}{x^2}dydx \qquad D=\{1\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq x\}$$

(室蘭工業大 2018) (m20185506)

0.679 以下の積分の値を求めなさい．ただし，$\mathbb{R}$ はすべての実数の集合とする.

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \qquad \text{ただし，} A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+y\le 2\right\}$$

(室蘭工業大 2018) (m20185514)

0.680 球 $x^2+y^2+z^2\leqq\ 4$ と円柱 $x^2+y^2\leqq\ 1$ の共通部分の体積を求めよ.

(岡山県立大 2005) (m20055604)

0.681 次の累次積分の順序を交換し，その値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$

(岡山県立大 2006) (m20065604)

0.682 変数変換を用いて次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D x^2y^2dxdy \qquad D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(岡山県立大 2007) (m20075605)

0.683 次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\ :\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$$

(岡山県立大 2008) (m20085604)

0.684 以下の設問に答えよ. なお, <u>解答には導出過程を含むこと</u>.

領域 $D:|x-2y|\le 1\ ,\ |x+3y|\le 1$ のとき, 次の手順にしたがって, $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy$ を求めよ.

(1) $x-2y=u\ ,\ x+3y=v$ とし, $x,\ y$ を, u と v を用いて表せ.

(2) $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv$ の関係を用いて，$\displaystyle\iint_D (x+y)^2 dxdy$ を求めよ．

(香川大 2005)　　(m20055701)

0.685 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ．

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ．

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ．

(3) この曲面上の $x = 2,\ y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする． V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ．
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.686 $z = x^2 + y^2$ について次の問いに答えよ．

(1) $w = \log(z)$ の関係があるとき，2 階偏導関数 $w_{xx},\ w_{xy},\ w_{yx},\ w_{yy}$ を求めよ．

(2) 曲面 z と平面 $x + y = 2$，ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ． ただし，体積 V は計算で求めなくともよい．

(香川大 2016)　　(m20165702)

0.687 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D xydxdy \qquad D\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq a^2$$

(香川大 2017)　　(m20175703)

0.688 以下の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x + 3y + 1)dxdy \qquad D = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq 2x\}$$

(香川大 2018)　　(m20185703)

0.689 次の 2 重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leqq 4x,\ y \geqq 0$

(香川大 2020)　　(m20205703)

0.690 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (x+y)\ dxdy \qquad D\ :\ x + y - 2 \geqq 0,\ 1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 4$$

(香川大 2021)　　(m20215704)

0.691 円柱 : $x^2 + y^2 \leq 1$ のうち放物曲面 : $z = 2 - x^2 - y^2$ と平面 : $z = 0$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

(香川大 2022)　　(m20225704)

0.692 次の問に答えよ．

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a > 0)$.

$$I = \iint_D y\, dxdy$$

(2) 平面 $z=y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2+y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a>0)$.

(島根大 2005) (m20055813)

0.693 $u=3x+y,\ v=x-3y$ と変数変換することにより，2 重積分
$\displaystyle\iint_D xdxdy\,,\quad D=\{(x,y)\ :\ 0 \leq 3x+y \leq 1,\ -1 \leq x-3y \leq 0\}$ を求めよ.

(島根大 2007) (m20075807)

0.694 $u=u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(x,t)dx=1$ が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (>0) とする.

(島根大 2007) (m20075811)

0.695 次の重積分を求めよ．a は正定数とする. $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ ただし D は $(x,y)-$ 平面内にある円 $(x-a)^2+y^2 \leq a^2$ の上半分，すなわち $y>0$ を満たす部分である.

(島根大 2008) (m20085804)

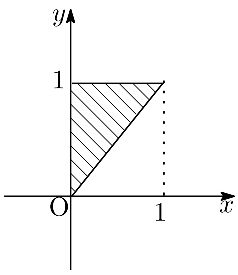
0.696 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3\int_1^2 \left(2xy-x^2\right)\,dydx$ (2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2y} y^2e^{xy}\,dxdy$

(島根大 2008) (m20085808)

0.697 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ.

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ.



(3) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\right\}dx$ を計算せよ.

(島根大 2010) (m20105813)

0.698 m,n は自然数とし，

$$I(m,n)=\iint_D(x+y)^{m-1}x^{n-1}y\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\ :\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\right\}$$

を定める．次の問いに答えよ.

(1) 次の変数変換を行うことによって，$I(m,n)$ を u と v についての重積分に書き直せ.

$$u=x+y\,,\qquad v=\frac{y}{x}$$

(2) 積分値 $I(m,n)$ を求めよ.

(島根大 2013) (m20135803)

0.699 次の問いに答えよ.

(1) $0 < r_1 < r_2$ とし, $D_1 = \left\{(x,y) : {r_1}^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ {r_2}^2\right\}$ と定める. このとき,
積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy$ の値を求めよ.

(2) $0 < r$ とし, $D_2 = \left\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leqq\ r^2\right\}$ と定める. このとき,
広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ.

(島根大 2014) (m20145805)

0.700 $D = \left\{(x,y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4,\ y \geq x\right\}$ とする.

(1) 変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2},\ y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える. この変換により, D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right)dxdy$ の値を求めよ. ただし $\exp(x) = e^x$ である.

(島根大 2015) (m20155807)

0.701 (1) $R > 0$ とする. $\Omega(R) = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき,
重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ を求めよ.

(3) α を定数とし, $(x,y) \neq (0,0)$ に対して $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2}$ と定める. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(島根大 2016) (m20165804)

0.702 (1) $D = \{(x,y) : 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1\}$ とする. 変数変換 $x = u - uv,\ y = uv$ により, D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ.

(2) D は問 (1) と同じとする. 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ を計算せよ.

(島根大 2017) (m20175807)

0.703 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき, 重積分

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2 - y^2)dxdy$$

の値を求めよ.

(島根大 2018) (m20185808)

0.704 $g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり,

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x + y \leqq \beta\}$$

とする. このとき,

$$\iint_D g(x+y)dxdy = \int_\alpha^\beta xg(x)dx$$

となることを証明せよ.

(島根大 2019) (m20195808)

0.705 $f(x,y) = \dfrac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a>0$ に対して，$D(a)=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ とおく．

2 重積分　$I(a)=\displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.706 次の二重積分を計算せよ．　$\displaystyle\iint_{\substack{x+y\ \leqq\ 1\\ x,y\ \geqq\ 0}} (x^2+y^2)\,dxdy$　　(首都大 2008)　　(m20085906)

0.707 (1) $x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2007)　　(m20076004)

0.708 原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2008)　　(m20086004)

0.709 原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分を B とする．

このとき，$\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096004)

0.710 累次積分 $I=\displaystyle\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dy\right\} dx$ の値を計算したい．

(1) $I=\displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy$ となるような D を不等式で表し図示せよ．

(2) 積分の順序を交換して累次積分 I の値を求めよ．

(滋賀県立大 2010)　　(m20106004)

0.711 (1) $x^2+y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2011)　　(m20116004)

0.712 適当な変数変換を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy\ ,\quad 但し，D : 0 \leqq\ x-y \leqq\ x+y \leqq\ 1$$

(滋賀県立大 2012)　　(m20126004)

0.713 関数 $z=x^2+xy+y^2$ のグラフと xy 平面，および円筒 $x^2+y^2=R^2$ で囲まれた領域の体積を求めよ．ただし，R は正の実数である．

(滋賀県立大 2013)　　(m20136004)

0.714 不等式 $x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146004)

0.715 D を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ （$a,\ b$ は正の実数）で与えられる領域とするとき，$x=ar\cos\theta,\ \ y=br\sin\theta$ とおくことにより，$\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2015) (m20156004)

0.716 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 2x\right\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D x^2dxdy$$

(滋賀県立大 2022) (m20226002)

0.717 平面上の閉領域 D を，

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqq\ x\leqq\ y,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$$

と定める．D における積分 $I=\displaystyle\int_D e^{y^2}dxdy$ について，下の問いに答えよ．

(1) 閉領域 D を図示せよ．途中の過程も記入せよ．

(2) 積分 I を，累次積分 $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d e^{y^2}dx\right)dy$ の形で表し，a,b,c,d を求めよ．なお，a,b,c,d は定数とは限らない．計算経過も記入せよ．

(3) 積分 I の値を計算せよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015) (m20156104)

0.718 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\sqrt{y}\ ,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2007) (m20076406)

0.719 次の重積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2\leqq\ y\leqq\ x+2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\}$

(東京海洋大 2008) (m20086405)

0.720 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x(x+y)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x-1\leqq\ y\leqq\ 1-x,\ x\geqq\ 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2009) (m20096405)

0.721 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2\leqq\ y\leqq\sqrt{x}\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq\ 1\ ,\ x\geqq\ 0\ ,\ y\geqq\ 0\}$

(東京海洋大 2010)　　(m20106405)

0.722 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid y^2\leqq\ x\leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4\}$

(東京海洋大 2011)　　(m20116405)

0.723 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqq\ y\leqq\sqrt{1-x^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\ 1\right\}$

(東京海洋大 2012)　　(m20126406)

0.724 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 2\right\}$ に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ の値を求めよ．

(2) 積分の順序を入れ替えることにより，重積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_x^1 y^2e^{xy}dy\right)dx$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2016)　　(m20166409)

0.725 (1) $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ \sqrt{x}\leqq y\leqq x\right\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D 2y\log x\ dxdy$ の値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\mid 0\leqq x+y\leqq 2,\ 0\leqq x-y\leqq 1\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_E (x^2-y^2)\ dxdy$ の値を求めよ．

(東京海洋大 2021)　　(m20216410)

0.726 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{y}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_E \log(x^2+y^2+9)dxdy,\qquad E=\left\{(x,y)\ \middle|\ 2\leqq x^2+y^2\leqq 5,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$

(東京海洋大 2022)　　(m20226405)

0.727 次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D -2xe^{1-y}dxdy\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1\ ,\ 0\leqq\ y\leqq\ 1-x^2\}$

(和歌山大 2007)　　(m20076506)

0.728 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ を求めなさい．

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{5^2}=3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい．

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)

0.729 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を，4 次の項まで求めなさい．

(2) 曲線 $x^4+3x^2+2xy^2+4y^3-10=0$ の $(x,y)=(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい．

(3)　2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+x+1}\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ x\leq y\leq x+1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096502)

0.730　次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\frac{\pi}{2}\,,\ 0\leqq\ y\leqq\ x\}$$

(和歌山大 2010)　　(m20106509)

0.731　2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x-1}\,dxdy\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\ x\right\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126505)

0.732　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D e^{x-y}dxdy\ ,\qquad D\,:\,\left\{0\leq x\leq 2\,,\ 0\leq y\leq\frac{x}{2}\right\}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136504)

0.733　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D (x+2y)e^y dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2x\}$$

(和歌山大 2014)　　(m20146506)

0.734　次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D x\cos y\,dxdy\,,\quad D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq\pi,\ x\leq y\leq 2x\}$$

(和歌山大 2015)　　(m20156504)

0.735　次の 2 重積分の値を求めなさい.　$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq x\right\}$

(和歌山大 2016)　　(m20166503)

0.736　(1)　次の重積分を，極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ によって，r と θ の積分に変数変換しなさい.

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\right\}$$

(2)　(1) の積分の値を求めなさい.

(和歌山大 2018)　　(m20186503)

0.737　座標平面上で直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2$ で囲まれる部分を D とする．次の I の値を求めなさい.

$$I=\iint_D (x+2y)\ dx\ dy$$

(和歌山大 20221)　　(m20216504)

0.738　平面の領域 D を $x=0,\ y=0,\ x+y=2$ で囲まれた部分とする．次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x+y)dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226504)

0.739 次の広義積分が収束するような実数 s の値の範囲を求めよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \geqq 1} (x^2+y^2)^s \, dxdy$$

(和歌山大 2022) (m20226505)

0.740 関数 $f_n(x,y) = \sin\sqrt{x^n+y^n}$（$n$：自然数）について，次の問いに答えよ，

(1) 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f_1(x,0)}{\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

(3) 自然数 m に対して $I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{(f_1(x,0))^m}{\sqrt{x}}\,dx$ とするとき，I_m と I_{m-2} の関係式を求めよ．また m は奇数として I_m を求めよ.

(4) $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_2(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(京都府立大 2008) (m20086702)