[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：8 ベクトル

0.1 以下の問いに答えよ．ただし，ベクトルの内積を "$\cdot$"，外積を "$\times$" と表すものとする．

(1) 以下の文章では，平面の方程式を導いている．空欄（1）から（3）に適切な式を入れよ．
原点 O より平面 S に垂直におろした点を G（以下，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と呼ぶ），平面 S 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ は垂直であることから，両ベクトル間には（　1　）の関係がある．ここで，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,g_3)$ とすると，平面 S の方程式は x,y,z,g_1,g_2,g_3 を用いて，(　2　) で表される．また，平面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ と，原点 O から平面 S までの距離 p を用いると前式は，（　3　）で表される．

(2) 単位法線ベクトルが $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ で $(1,1,1)$ を通る平面を求めよ．

(3) 同一平面上に異なる 3 点 A,B,C が与えられたとき，外積を用いてこの 3 点より平面の方程式を求める方法を述べよ．

(4) 3 点 $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(0,3,1)$ によって与えられる平面の方程式を求めよ．

(北海道大 2004)　　(m20040102)

0.2 次式の三次元ベクトルに関して，次の各設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}p\\1\\q\end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を求め，二つのベクトルの関係を調べなさい．

設問 2. $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するときの p と q を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような p と q を求めなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180102)

0.3 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が 1 次従属となるとき，以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1\\-p\\0\end{bmatrix}$$

(1) p を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で $\boldsymbol{c}$ を表しなさい．

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに直交し，大きさが 1 のベクトルを求めなさい．

(4) (3) で求めたベクトルと，$\boldsymbol{c}$ の内積を求めなさい．

(5) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190103)

0.4 次の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ について，以下の設問に答えよ

$$\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix},\quad \overrightarrow{c}=\begin{bmatrix}1\\p\\2p\end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また，$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表しなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200102)

0.5　3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい．

平面 1　:　$x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2　:　$x+y=0$

(1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい．

(2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること．

(3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210101)

0.6　次の 3 次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について，以下の設問に答えなさい．

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}2p\\3\\p\end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$ が直交するとき，p の値を求めなさい．

(2) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合で表しなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220102)

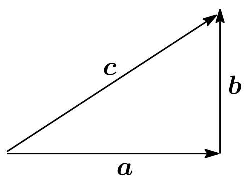
0.7　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ をベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の内積とし，$||\boldsymbol{a}||$ を $\boldsymbol{a}$ の長さとする．このとき $||\boldsymbol{a}||^2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ であり，また，零ベクトル $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交すれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ であった．

(1) $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3},2)$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1,2)$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ とする．$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交するとき

$$||\boldsymbol{c}||^2=||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2 \quad \text{（ピタゴラス（三平方）の定理）}$$

を示せ．



(北見工業大 2008)　　(m20080204)

0.8　ベクトル $\overrightarrow{N}=(2,2,-1)$ に直交し，点 $(-1,2,3)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(北見工業大 2011)　　(m20110207)

0.9　平面 $x+y+z=0$ および平面 $x+2y+3z=0$ と直交し,原点を通る平面の方程式を求めよ．

(北見工業大 2012)　　(m20120207)

0.10　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が一次従属であるとき a の値を求めよ．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$$

(北見工業大 2012)　　(m20120208)

0.11 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(北見工業大 2014)　　(m20140205)

0.12 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合 $h\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$ で表すとき，係数 h, k を求めよ

(北見工業大 2016)　　(m20160204)

0.13 ベクトル $\overrightarrow{N}=(1,2,-1)$ に直交し，点 $(0,1,2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

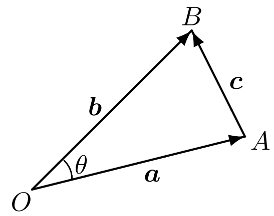
(北見工業大 2017)　　(m20170207)

0.14 3つのベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{v}|,|\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\phi \qquad (a)$$

で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (b)$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (c)$$
$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \qquad (d)$$
$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，
3つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\quad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\quad \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ.

(岩手大 1996)　　(m19960303)

0.15 3次元空間内の3点 A,B,C の各々の座標を $(a,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を2辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997)　　(m19970304)

0.16 次の2つのベクトルの和と差が直交するように，x を定めよ．

$$\boldsymbol{a}=(9,4)\ ,\ \boldsymbol{b}=(4,x)$$

(岩手大 1998)　　(m19980309)

0.17 次の 2 つのベクトルの内積 $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$（スカラー積）および外積 $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$（ベクトル積）を求めよ。
$\overrightarrow{A}(2,3,4)$, $\overrightarrow{B}(3,-2,0)$

（岩手大 2004）　　(m20040307)

0.18 xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(2) 3 点 $A,\ B,\ C$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(3) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(4) (3) で求めた平面が，球 $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=r^2 \quad (r>0)$ に接しているとき，r の値を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.19 xyz 空間の点 $P(0,0,t)$ を通り, ベクトル $\vec{a}=(2,2,1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z=11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t>0$ とする.

(1) 平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2) 球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4) 球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100301)

0.20 xyz 空間に 2 点 $A(5,3,4)$, $B(1,-1,2)$ を直径の両端とする球 S と点 $C(-1,-3,1)$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 球 S の方程式を求めなさい.

(2) 2 点 A,B を通る直線に垂直で，球 S の中心を通る平面の方程式を求めなさい.

(3) 2 点 A,B を通る直線に平行で，点 C を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S が交わる点の座標を求めなさい.

(岩手大 2011)　　(m20110301)

0.21 xyz 空間内に 4 点 $A(-3,-3,1)$, $B(2,-8,1)$, $C(-2,-3,-2)$, $D(2,1,4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 4 点 $A,\ B,\ C,\ D$ を通る球 S の方程式を求めなさい.

(2) 球 S の中心を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい.

(3) 点 C を通り，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ に垂直な平面 α の方程式を求めなさい．また，平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=z-2$$

との交点の座標を求めなさい.

(4) 点 D から平面 α に直線を引き，α との交点を E とするとき，線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい．このとき，線分 DE の長さを求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120301)

0.22　方程式 $x^2+y^2+z^2-2x-8y-4z-4=0$ で表される球 S について，次の問いに答えなさい.

(1) 球 S の中心座標と半径を求めなさい.

(2) 球 S が xy 平面と交わってできる図形は円である．この円の中心座標 P と半径を求めなさい.

(3) 球 S が yz 平面と交わってできる円の中心座標を Q とするとき，2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S との交点座標を求めなさい.

(岩手大 2013)　　(m20130301)

0.23　xyz 空間内に 2 点 $A(1,0,0)$, $B(2,1,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) 点 A を通り，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(2) 点 B を通り，直線 ℓ に垂直な平面が y 軸と交わる点の座標を求めなさい.

(3) 点 B を中心とし，原点 O を通る球 S の方程式を求めなさい.

(4) 球 S と直線 ℓ が交わる 2 つの点の座標を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140301)

0.24　xyz 空間内に 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ を求めなさい．その結果を用いて，3 点 A, B, C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(2) 平面 α の方程式を求めなさい.

(3) 原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい.

(4) 接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい.

(岩手大 2015)　　(m20150301)

0.25　3 次元空間上に存在する 3 点 $A(12,12,0)$, $B(0,12,12)$, $C(12,0,12)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 3 点からなる三角形 ABC の重心 G の座標を求めなさい.

(2) 重心 G を中心とする半径 4 の球面の方程式を示しなさい.

(3) 上の (2) で求めた球面の半径が 4 から毎秒 2 で増加するとき，球面が原点 $O(0,0,0)$ に達するまでの時間を求めなさい.

(岩手大 2016)　　(m20160301)

0.26　3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0,1,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(1,1,0)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(3) 原点を通り，(2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

(岩手大 2017)　　(m20170301)

0.27　点 O を原点とする xyz 座標空間において，中心が点 $(2,\ -1,\ -2)$ で，点 O を通る球面を S とする．次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S と xy 平面の交わりは円になる. この円の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になる. k の値を求めなさい.

(岩手大 2018) (m20180301)

0.28 3 次元直交座標系 (x, y, z) において, 中心が点 $(-1, 2, 4)$ で半径 5 の球面を S とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S の中心の x 座標が毎秒 2 で増加するとき, その球面の方程式を求めなさい. ただし, 時刻 $t=0$[秒] のときの中心は点 $(-1, 2, 4)$ とする.

(3) 上の (2) で求めた球面 S と平面 $x=4$ との交わりが半径 4 の円になるときの時刻 t[秒] を求めなさい.

(岩手大 2019) (m20190301)

0.29 3 次元直交座標系 (x, y, z) において $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14=0$ が球を表すとき, 次の問いに答えなさい. ただし, k は実数とする.

(1) k の範囲を求めなさい.

(2) この球は, xy 平面と交わらないことを示しなさい.

(3) この球が, yz 平面, zx 平面 と交わり, かつ, yz 平面との切口の面積が, zx 平面との切口の面積の 2 倍となるときの k の値を求めなさい.

(岩手大 2020) (m20200301)

0.30 (1) 点 $A(-3, 2, 6)$, 点 $B(5, 2, 0)$ を直径の両端とする球面 C の方程式を求めなさい.

(2) 球面 C と yz 平面の交わりは円になる. この円の中心座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 C と x 軸の交点は 2 点存在する. この交点間の距離を求めなさい.

(岩手大 2021) (m20210301)

0.31 原点 O の xyz 空間に点 $A(2, 1, 3)$, 点 $B(3, -2, 1)$ が与えられている. このとき, 次の問いに答えなさい.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい. ただし, $0 \leqq \theta < \pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい.

(4) 点 $C(-1, -2, 3)$, 点 $D(5, 6, 5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい.

(5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい.

(岩手大 2022) (m20220301)

0.32 平面 $2x+y+2z=0$ と球面 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい. ただし, 空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には, その証明もしなさい.

(秋田大 2003) (m20030403)

0.33 方程式 $x+y-z=0$ を満たす 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で, 互いに一次独立になるものを一組挙げよ.

(秋田大 2005）　(m20050402)

0.34 ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,-1)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交することを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面上にある点 (x,y,z) を，媒介変数 s と t を用いた式で表しなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{p}=(3,1,2)$ が (2) の平面に投ずる正射影を $\boldsymbol{q}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ と書くとき，係数 α と β を求めなさい.

(秋田大 2012)　(m20120402)

0.35 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とする．また $\boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトルとする．このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすように $\boldsymbol{c}$ を定めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を満たすとする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ のなす角を求めなさい.

(秋田大 2014)　(m20140403)

0.36 ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,3)$, $\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3},1)$ に対して，$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}$ と直交するように定数 k を定めなさい.

(秋田大 2016)　(m20160401)

0.37 平面上に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があるとする．ただし，これらのベクトルの大きさ（長さ）はいずれも 0 ではなく，互いに平行ではないとする．また，t を実数とする．以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ が最小になるときの t の値を，内積を用いて表しなさい.

(2) (1) で求めた t の値が 0 であるとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の図形的関係を答えなさい.

(秋田大 2017)　(m20170401)

0.38 平面上の原点 O と点 A, B, C の 4 点を考える．この 4 点は互いに異なり，どの 3 点も一直線上にないとする，$0 \leqq t \leqq 1$ なる t に対し，OA, OB, CB, CA をそれぞれ $t:1-t$ に内分する点を P, Q, R, S とする．また，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{SR}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, t を用いて表せ.

(2) 四角形 $PQRS$ の対角線の交点を X とする．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化するとき，X が描く図形はどのようなものか説明せよ.

(秋田大 2019)　(m20190402)

0.39 平面上の 3 点 $P(2t^2-t+3,\ t^2+2t)$, $Q(2t^2+3,\ t^2)$, $R(3t^2+t+7,\ -t^2-2t-8)$ があり，t は 0 でない実数とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) P, Q, R は 1 直線上にあることを示せ.

(2) $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$ とおくとき，k の範囲を求めよ.

(3) P, Q, R, A の 4 点が，ある順序に等間隔で並んでいるとする．ただし，A は P と R 間にあり，Q と異なる点である．このとき，t の値を求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200402)

0.40 xyz 座標空間に 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ があるとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい．

(2) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい．

(3) (2) の平面に関して，点 $D(0,0,1)$ と対称な点を E とする．点 E の座標を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220402)

0.41 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える． 球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き， その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする． この時, 各ベクトルの成分は
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$,
$\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$ と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　　(m20040503)

0.42 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q : $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.43 xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ．

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ．

(3) 領域 R の面積を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110501)

0.44 xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2,0,a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある．以下の問に答えよ．ただし，a, r はそれぞれ実数であり，$r>0$ とする．

(1) S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ.

(2) S_1 と S_2 が交線をもつとき, 交線を含む平面の方程式を求めよ.

(3) $a=0,\ r=\sqrt{3}$ のとき, S_1 と S_2 の交線を C とする. 交線 C の方程式を求めよ.

(4) 点 $Q(0,0,\sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする. 点 R が交線 C 上を動くとき, 点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019)　(m20190502)

0.45 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(2,1,k),\ B(0,2,0),\ C(2,0,0)$ がある. ただし, k は正の実数である. 線分 $BC,\ OC$ の中点をそれぞれ $D,\ E$ とする. $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ.

(2) $\angle DAE=30^\circ$ となるときの　k を求めよ.

(3) $k=1$ のとき, 原点から点 $A,\ B,\ C$ を通る平面におろした垂線を ℓ_1 とし, 平面との交点を H とする.

(a) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ と表すとき, 実数 $s,\ t$ を求めよ.

(b) 点 $A,\ D$ を通る直線を ℓ_2 とするとき, 直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 の最短距離を求めよ.

(東北大 2020)　(m20200501)

0.46 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, 点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする. また, 点 A, 点 B を直径の両端とする球面を S とする. 以下の問に答えよ.

(1) 線分 AB 上に点 P があり, 点 A と点 P の間の距離を s とする. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ.

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし, 球面 S の方程式を示せ.

(3) $\boldsymbol{a}=(0,0,1),\ \boldsymbol{b}=(0,2,1)$ のとき, 点 $D(0,0,d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする. ただし, d は $d>1$ を満たす実数である.

(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする. 点 T の座標を $(p,q,0)$ と表すとき, p および q が満たす方程式を求めよ.

(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し, その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ.

(東北大 2021)　(m20210504)

0.47 次の $\mathbf{R}^3$ の 3 つのベクトルについて以下の問に答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ z \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) これらが一次従属であるための x,y,z についての必要十分条件を求めよ.

(2) (1) の条件が満たされるとき, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が, この 3 つのベクトルの一次結合で表されるための x,y,z についての必要十分条件を求めよ.

（お茶の水女子大 1999）　(m19990608)

0.48 (1) 4次元の実数ベクトル空間 R^4 のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の中に一次独立なものは何本あるか？

(2) 上のベクトルが張る R^4 の線形部分空間に対する直交補空間を示せ．ただし，内積は通常のユークリッド内積とする．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000610)

0.49 v_1, v_2, v_3 を3次元内積空間 $\mathbb{R}^3$ の長さ1のベクトルで，どの2つも互いに直交するものとする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル x は，

$$x = (x, v_1)v_1 + (x, v_2)v_2 + (x, v_3)v_3$$

と表されることを示せ．ただし，(,) は $\mathbb{R}^3$ の内積を意味する．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル a, b を

$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$b = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

と表すとき，$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010606)

0.50 3次元空間におけるデカルト座標系で表される，点 $O(0,0,0)$，点 $A(1,2,3)$，点 $B(-3,1,-2)$ について，以下を求めよ．

(1) $\angle AOB$ の大きさ　(2) $\triangle AOB$ の面積

(お茶の水女子大 2016)　(m20160616)

0.51 半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001)　(m20010702)

0.52 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ $(a > 0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ．

(2) (1) の表面上の点 $(x.y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0 > 0$ とする．

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ2点 P_1, P_2 は，それぞれ $\left(\dfrac{a}{2}, -a\right)$，$\left(-\dfrac{a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x, y) 成分を持つとする．点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ．

(東京大 2007)　(m20070704)

0.53 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1,3,1)$, $B(2,4,3)$, $C(3,-3,-1)$ を通る平面を α とする．

(a) 平面 α の方程式を求めよ．

(b) 点 $P(1,1,1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．

(a) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1:V_2$ を求めよ．

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である．

(東京大 2011)　　(m20110703)

0.54 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ．

(5) 任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して，

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ．

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.55 3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1) (a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

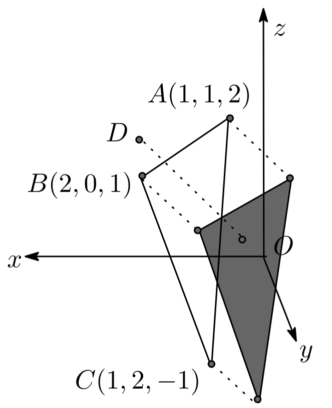
(b) 頂点 A と頂点 B, C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2) 下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1,1,2)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,-1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1,1,1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1,-1,-1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．
ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x+3d_y+d_z-9>0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.56 点 $P(1,2,3)$ から平面 $\pi: x+2y+2z=2$ に下ろした垂線の足を H とするとき，線分 HP の長さを求めなさい.

(東京農工大 2006)　　(m20060901)

0.57 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$ とおく．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表されるか表されないかを判定し，表される場合は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(電気通信大 2008)　　(m20081002)

0.58 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(2,1,3)$，$\mathrm{B}(1,1,2)$，$\mathrm{C}(3,0,1)$，$\mathrm{D}(2,-1,2)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ．

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211001)

0.59 a , b は正の定数で，$3a>b$ を満たすとき，空間内に頂点を $(0,0,a)$，底面を $x^2+y^2\leq 1$, $z=0$ とする円錐 K を考える．また，点 $(0,2,b)$ を通る x 軸に平行な直線および点 $(0,-1,0)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α の方程式を求めよ．

(2) 平面 α と円錐 K の交わりのうちで，x 座標が最大となる点を求めよ．

(横浜国立大 1992）　(m19921102)

0.60 ３次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0<\theta<\pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993）　(m19931102)

0.61 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x,y)=(1,2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X',Y')=(1,2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい．

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　(m20011203)

0.62 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に関する以下の問いに答えなさい.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-3\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示しなさい.

(2) 以下の手順に従って, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ から, 互いに直交する大きさ 1 の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めなさい.

(a) $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$ を求める.

(b) $\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{u}_1$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ を求め, $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$ を求める.

(c) $\boldsymbol{a}_3$ の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_3$ を求め, $\boldsymbol{u}_3=\dfrac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ を求める.

(千葉大 2010)　(m20101202)

0.63 三次元ユークリット空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され, 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられている. このとき, 以下の問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として，行列 $A^T A$ を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列である．

(3) 行列 $A^T A$ の逆行列 $\left(A^T A\right)^{-1}$ を求めなさい．

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \boldsymbol{c}$ を求めなさい．

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め，このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$，及び，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき，点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり，かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し，行列 $A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい．

(千葉大 2015)　　(m20151202)

0.64 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている．

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda \cos\theta \cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda \cos\theta \sin\varphi\ ,\ \lambda \sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E = (0, -a, h)$, $a > 0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda \to \infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda \to \infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.65 X をベクトル空間とする．n 個のベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が X で線形独立（１次独立ともいう）とする．このとき，要素 $x \in X$ が $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の線形結合（１次結合ともいう）で表せるとすると，その線形結合の係数は一意に定まることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001305)

0.66 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ が１次独立か否かを判定せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011307)

0.67 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b\cos(\omega t + \phi)$, $y = b\sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる．ここに，ω, ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ が得られる．$\vec{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\vec{\alpha}$ と $\vec{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ の絶対値 $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.68 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の組に実数（スカラー）値を対応させる演算 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が以下を満たすものとする．

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{x}=0$ の場合に限る.

さらに $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$ が成り立つ. このことを証明済みとして, $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqq|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ を示せ.

（筑波大 2004） (m20041318)

0.69 ベクトル $\boldsymbol{u}=(1,-2,-1)$, $\boldsymbol{v}=(2,3,1)$, $\boldsymbol{w}=(0,1,1)$ について以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が線形独立であることを示せ.

(2) ベクトル (a,b,c) が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の線形結合で表されるとき a , b , c の関係を求めよ.

(筑波大 2005) (m20051306)

0.70 (1) 2 つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{2},1,1)$, $\vec{b}=(0,-1,-1)$ のなす角を求めなさい.

(2) 2 つのベクトル $\vec{x}=(1,0,3)$, $\vec{y}=(2,-1,1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい. 解答する単位ベクトルは一つでよい.

(3) 3 点 $A(2,1,-3)$, $B(3,1,-1)$, $C(1,4,4)$ を通る平面の方程式を求めなさい.

(筑波大 2006) (m20061324)

0.71 上空の 2 機の航空機 A,B がそれぞれ一定の速度ベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ で飛んでいる. この 2 機のある時刻の位置ベクトルはそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ であるとする. このとき航空機 A,B が最接近するときの A,B 間の距離を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を用いて表せ.

(筑波大 2007) (m20071322)

0.72 球面 $C:x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ.

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2007) (m20071332)

0.73 以下の 4 つの列ベクトルがあるとする.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$$

(1) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次独立となる条件を述べなさい.

(2) 次に (1) と異なり, 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次従属だと仮定する. このとき, ベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の線形結合として表せますか？表せる場合はその式を示しなさい. 表せない場合はその理由を説明しなさい.

(筑波大 2008) (m20081301)

0.74 1 直線上にない 3 点 O, A, B をとり，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．また，ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|$ $(= \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})})$ のように表し，$a = |\overrightarrow{a}|$, $b = |\overrightarrow{b}|$ とする．

O, A, B を含む平面上の任意の点 P は，適当な実数 p, q により：

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のように表すことができる．これについて，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が線分 AB（両端 A, B を含む）の上にあるとき，$(*)$ の p, q はどのような条件を満たすか．

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき，$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ．

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.75 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x + y + z = 0$ および $W_2 : x + y - z = 0$ について以下の設問に答えよ．

(1) W_1 , W_2 に垂直な直線を l_1 , l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1 , l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1 , l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする$)$ を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101310)

0.76 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

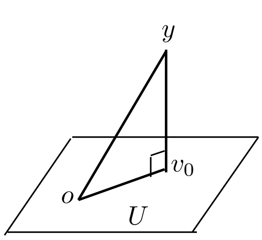
(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101321)

0.77 U をベクトル $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, 1)$ と $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 2, 0)$ が張る線形部分空間とする．そのとき，点 $\boldsymbol{y} = (10, 20, 2)$ から最も近い U 上の点 $\boldsymbol{v}_0$ を求めよ．



(筑波大 2012)　　(m20121308)

0.78 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき，ベクトル $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ.

(2) 次の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中で，一次独立であるベクトルの数が最大となる一次独立ベクトルの組を 1 つ示せ．また，その他のベクトルを一次独立ベクトルの線形結合により表せ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}-3\\4\\-4\\1\end{bmatrix},$$

(筑波大 2019) (m20191308)

0.79 以下に示す実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_3,\ \boldsymbol{\nu}_4,\ \boldsymbol{\nu}_5$ について，線形独立となる組合せを一つ挙げなさい．このとき，残り全てのベクトルを線形独立なベクトルの一次結合として表しなさい.

$$\boldsymbol{\nu}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_5=\begin{pmatrix}3\\1\\6\\5\end{pmatrix}$$

(筑波大 2022) (m20221313)

0.80 3 つの空間ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\2a\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\2a\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$$

が一次従属（線形従属）であるような a を求めよ.

(埼玉大 2000) (m20001403)

0.81 次のベクトルについて，以下の問に答えよ.

$$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}=(2,1,1),\quad \overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}=(1,2,1),\quad \overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}=(1,1,2)$$

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めなさい. (2) $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めなさい.

(2) PA, PB, PC で張られた平行六面体の体積を求めなさい.

（埼玉大 2001） (m20011406)

0.82 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する.

次の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して不等式 $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leq||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して不等式 $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||\leq||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021403)

0.83 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の 1 次結合（線形結合）として表せ.

（埼玉大 2004） (m20041406)

0.84 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071405)

0.85 原点を通る 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルを 1 つ求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131406)

0.86 原点 O と 2 点 $A(1,4,2),\ B(-2,2,3)$ において, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ として以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ の成分を求めよ.

(2) 原点 O, 点 A および点 B で作られる三角形の面積を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(埼玉大 2015) (m20151406)

0.87 以下のベクトルの各組は一次独立か, もしくは一次従属か答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(埼玉大 2017) (m20171404)

0.88 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ.

(埼玉大 2019)　　(m20191405)

0.89 3 点の座標が $A(-1,3,0)$, $B(1,0,1)$, $C(2,2,-2)$ で与えられている時，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ.

(図書館情報大 1994)　　(m19941603)

0.90 平面 π : $2x+3y+4z-12=0$ と点 A:(1,2,3) について，以下の $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$ を求めよ.

(1) π は x 軸と点 $\boxed{\text{ア}}$, y 軸と点 $\boxed{\text{イ}}$, z 軸と点 $\boxed{\text{ウ}}$ でそれぞれ交わる.

(2) π に垂直で長さが 1 の法線ベクトルは $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3) A と π との距離は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(図書館情報大 2002)　　(m20021608)

0.91 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(茨城大 2007)　　(m20071702)

0.92 ベクトルの内積 $(2-i, 3+i, 4-i)\cdot(1-i, 2, -3i)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位である.

(山梨大 2003)　　(m20031804)

0.93 次の 4 つのベクトルの中から．一次独立なものは最大でいくつ取ることができるか答えなさい.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011)　　(m20111804)

0.94 A を n 次正方行列とし $\boldsymbol{x}$ を n 次元列ベクトルとする. ある正の整数 k があって $A^{k-1}\boldsymbol{x} \neq 0$, $A^k\boldsymbol{x} = 0$ であるとする. このとき k 個の列ベクトル

$$\boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x}, \ A^2\boldsymbol{x}, \cdots, \ A^{k-1}\boldsymbol{x}$$

は一次独立であることを証明せよ.

(信州大 2003)　　(m20031903)

0.95 α, β, γ を互いに異なる数とし, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次で定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \end{pmatrix}$$

このとき, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示し, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2004)　　(m20041903)

0.96 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, が 1 次独立であることを示せ．また，

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2020)　　(m20201907)

0.97 座標空間において, 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ を通る平面を α とし, 原点 $O(0,0,0)$ から平面 α に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) α の方程式を求めよ.

(3) H の座標を求めよ.

(4) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052004)

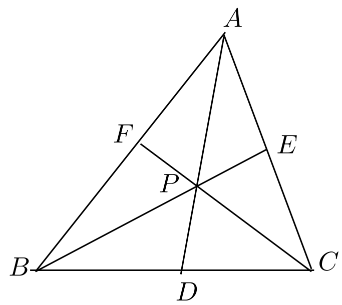
0.98 点 $P_0(a,b,0)$ の位置から，速度 $\boldsymbol{v}_0 = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{k}$ で投げ出された質量 m の質点の軌跡を求めよ．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z 軸上の長さ 1 の基本ベクトルであり，重力加速度は g（$-z$ 方向）とする．

(新潟大 2011)　　(m20112009)

0.99 (1) 右図のように三角形 ABC の各頂点から対辺を結ぶ線分が一点 P で交わるとする．このとき，各線分の間に

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

の関係が成立することを証明せよ.



(2) この三角形において，

「$AF : FB = 2 : 3,\ AE : EC = 4 : 3$」のとき，

ベクトル $\overrightarrow{AP}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ で表せ.

(新潟大 2011)　　(m20112016)

0.100 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において $ax + by + cz + d = 0$ で与えられる平面 H を考える．平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする．また，$\boldsymbol{v} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$（H と直交する長さ 1 のベクトル）を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交することを示せ．また $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ．ただし，$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す.

(3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|$ で与えられることを説明せよ.

(4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大 2012)　　(m20122015)

0.101 ユークリッド空間内に 3 点 $P(-1,3,1)$, $Q(2,1,3)$, $R(5,-4,2)$ がある．2 点 P と Q を通る直線を ℓ とするとき，次の各問いに答えよ.

(1) ℓ の方程式を求めよ.

(2) R と ℓ の距離を求めよ.

(3) ℓ に関して R と対称な点 R' の座標を求めよ.

(4) R と R' を直径の両端とする球面の方程式を求めよ.

(5) R と R' を通る球面の中心の軌跡の方程式を求めよ. なお, 球面の中心とは, 球面の定める球の中心のことである.

(新潟大 2013)　　(m20132005)

0.102 ふたつのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} c \\ -3 \end{pmatrix}$ が 45° の角度をなすときの c の値を求めよ.

(新潟大 2015)　　(m20152010)

0.103 三つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を辺として持つ平行六面対の体積 V を求めよ.

(新潟大 2016)　　(m20162003)

0.104 平面 $2x + 4y - z = 3$ について, 点 $(2, 5, 0)$ と対称な点の座標を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172011)

0.105 三角形 ABC と点 P が $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ とおく. このとき, $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ.

(2) 点 P が三角形 ABC の内部にあることを示せ.

(3) 面積の比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192011)

0.106 球 : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ に接する平面のうちで, 点 $A(0, 0, 3)$ を通るものについて次の問に答えよ.

(1) このような平面で y 軸と平行なものの方程式を求めよ.

(2) このような平面のうちで x 軸 , y 軸のいずれとも交わるものを考える. それぞれの交点を P , Q とするとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

(長岡技科大 1992)　　(m19922106)

0.107 以下の問いに答えよ.

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ について, $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角, $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ のなす角, $\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角を求めよ.

(2) 一直線上にない 3 つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある. A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき, 次の式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942105)

0.108 空間の点 (a, b, c) に関する点対称移動で，点 (x, y, z) が移される点の座標をかけ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952104)

0.109 $a > 0$ とする．

(1) 平面において，x 軸からの距離と点 $(0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲線の方程式を求めよ．

(2) 空間において，xy 平面からの距離と点 $(0, 0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲面 S_1 の方程式を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x + y + z = 0$ からの距離と点 $(1, 1, 1)$ からの距離が等しいような点からなる曲面を S_2 とする．S_2 と平面 $x + y + z = 3$ とで囲まれる部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972105)

0.110 xyz 空間に 4 点 $O(0, 0, 0),\ A(1, -2, -1),\ B(-2, -5, 0),\ C(2, 1, 0)$ をとる．以下の問に答えよ．

(1) 直線 AB と yz 平面との交点を求めなさい．

(2) 3 点 A, B, C を通る平面と x 軸との交点を求めなさい．

(3) 三角形 OBC の面積を求めなさい．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2006)　　(m20062102)

0.111 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ A(x - \alpha)^2 + By^2 \leqq 1\right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \ \middle|\ \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

と平面 $H = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \ \middle|\ x + z = 1\right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

0.112 3 次元空間 $O - xyz$ に 3 点 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 3, 1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042306)

0.113 空間に位置ベクトル $\overrightarrow{a}$ が示す点 A と位置ベクトル $\overrightarrow{b}$ が示す点 B がある.

(1) 点 A を通る直線 ℓ のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表せ．ただし，直線 ℓ の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とする．

(2) 直線 ℓ のうち，$\overrightarrow{b}$ に平行な直線のベクトル方程式を媒介変数を用いずに表せ．

(3) 点 B を通る平面 S のベクトル方程式を求めよ．ただし，平面 S の単位法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とする．

(4) 点 A から平面 S までの最短距離を媒介変数を用いずに表せ．

(富山大 2013)　　(m20132303)

0.114 ベクトル $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \\ i \end{pmatrix}$ ，$b = \begin{pmatrix} 1+0.5i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

であるとき，$a+b,\ a-b,\ (a,b),\ (b,a),\ \|a+b\|,\ \|a-b\|,\ \|a\|,\ \|b\|$ を計算し，三角不等式 ($\|(a,b)\| \leqq \|a\|+\|b\|$) およびシュワルツの不等式 ($|(a,b)| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$) が成り立つことを示せ．

(福井大 2000)　　(m20002410)

0.115 2つのベクトル $\boldsymbol{a} = (1,2,2)$ ，　$\boldsymbol{b} = (2,0,-1)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを求めよ．

(福井大 2000)　　(m20002411)

0.116 3つの点 $A(0,1,1),\ B(-1,-1,2),\ C(2,3,1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002412)

0.117 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.118 三つのベクトル $\mathbf{A}\ (2,-3,4),\ \mathbf{B}\ (1,2,-1),\ \mathbf{C}\ (3,-1,2)$ を3辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012414)

0.119 $(0,-2,0)$ を中心とする球上の点 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が3つの座標軸と交わる点をそれぞれ A,B,C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.120 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=k$ (一定，$k \neq 0$) のとき, xyz 直交座標系上の平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ が, 一つの定点を通ることを証明し, その定点を求めなさい. ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ とする.

（福井大 2004）　　(m20042415)

0.121 次の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣接する 2 辺とする平行四辺形がある. この平行四辺形の面積を求めよ. ただし, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は, 各々 x , y , z 方向の基本ベクトルである.

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1$,　　$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$

(福井大 2005)　　(m20052407)

0.122 (1) 次の3つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(福井大 2007)　(m20072408)

0.123　3 次元の列ベクトルのつくる線形空間（R^3）において，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をベクトルとする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次従属であるか一次独立であるかを示せ．

(2) もし一次従属であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は，直線上にあるか，あるいは平面上にあるかを示せ．

(3) もし一次独立であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を正規直交化せよ．ただし，正規直交化とは $\vec{p}$ は $\vec{a}$ の一次結合，$\vec{q}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合，$\vec{r}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の一次結合であるような正規直交系 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ をいう．

(福井大 2007)　(m20072412)

0.124　2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (-1, 1, 0)$ と $\boldsymbol{B} = (0, 1, -1)$ のなす角を求めよ．

(福井大 2009)　(m20092409)

0.125　座標空間上に 4 点 $A = (1, 0, -1)$，$B = (4, 2, -1)$，$C = (-1, 3, 0)$，$D = (2, 1, 3)$ がある. このとき, 有向線分 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ から定まる平行六面体の体積 V を求めよ．

(福井大 2010)　(m20102418)

0.126　次のベクトル群が一次独立か一次従属かどうか判断せよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(福井大 2011)　(m20112419)

0.127　4 つの列ベクトルがある．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 4 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ が一次従属となるようにベクトル $\boldsymbol{d}$ の未知数 x を決定せよ．

(2) $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合として表せ，(すなわち，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ の関係式を求めよ)

(福井大 2012)　(m20122412)

0.128　実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．　空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$，$\boldsymbol{v} = (0, 2, 1)$，$\boldsymbol{w} = (1, -1, 0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{t} = (1, 4, 4)$ を $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ の線形結合（一次結合）で表せ．

(2) $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ が線形独立（一次独立）であるか否かを判定せよ．

(福井大 2013)　(m20132404)

0.129 次の 3 つのベクトルがある．ただし，x は定数とする．以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が一次従属となるように定数 x を求めよ．

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が一次独立で相互に直交するベクトルとなるように定数 x を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152408)

0.130 空間に 3 点 $P,\ A,\ B$ がある．点 A から直線 PB に下ろした垂線と，直線 PB との交点を R とする．

(1) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PA},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PB}$ とするとき，

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\,\boldsymbol{b}$$

となることを示せ.

(2) $P(3,\ -6,\ 9),\ A(-3,\ 2,\ 5),\ B(-1,\ -3,\ 8)$ に対して，R の座標を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152412)

0.131 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ を一次独立なベクトル，さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ.

(福井大 2015)　　(m20152429)

0.132 x を実数とする時以下の 3 つのベクトルが一次従属となる x を求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182404)

0.133 x, y, z を実数とする．以下のベクトルがそれぞれ直交するときの x, y, z を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182405)

0.134 ベクトル $\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B},\ \overrightarrow{C}$ は一次独立であるとする．これら $\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B},\ \overrightarrow{C}$ の一次結合である以下のような 3 つのベクトル $\overrightarrow{P},\ \overrightarrow{Q},\ \overrightarrow{R}$ を考える．

$$\overrightarrow{P} = \alpha\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}$$

ただし，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は定数とする．

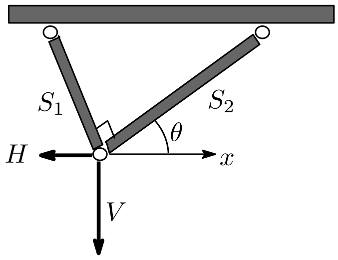
上記の 3 つのベクトル $\overrightarrow{P},\ \overrightarrow{Q},\ \overrightarrow{R}$ が一次独立であるためには，定数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に関して，

$\alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \neq 0$ が成り立たなければならないことを証明せよ．

(福井大 2018)　　(m20182414)

0.135 図のように水平で剛な天井にピン支持されたトラスが荷重を支えている.

ただし θ は水平方向 (x 軸) からの角度



(1) 部材力 S_1, S_2 と外力 H, V との間のつり合式を行列とベクトルを用いた形で示せ.

(2) $H = 10\text{kN}$, $V = 20\text{kN}$, $\theta = 30^\circ$の時 , 部材力を求めよ.

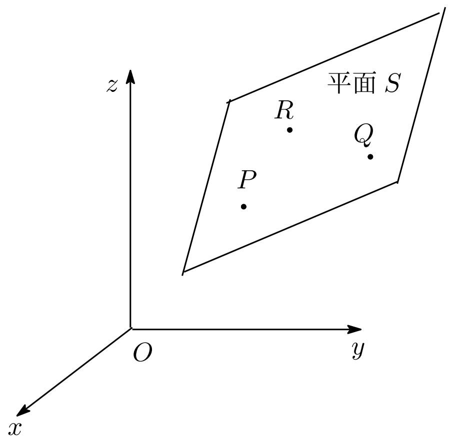
(福井大 2018) (m20182433)

0.136 以下のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような実数 x のうち, $x > 0$ を満たすものを求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202407)

0.137 xyz 空間に平面 S がある. 平面 S 上には 3 点 P, Q, R がある. 点 P の座標は $(1, 1, 1)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-1, 1, 2)$ である. このとき, 平面 S の方程式を求めよ. ただし, 平面 S の方程式を表すために用いてよい変数は x, y, z のみととする（解答の過程でこれら以外の変数を用いた場合でも, 最終的な答えは x, y, z のみを用いて表すこと）. 考え方と計算過程を明記すること.



(福井大 2020) (m20202418)

0.138 以下のベクトルがそれぞれ直交するときの実数 x を求めよ. また, そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2021) (m20212408)

0.139 以下のベクトル $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ を考え. $\boldsymbol{h} = x\boldsymbol{f} + y\boldsymbol{g}$ を成立させる実数 x と y が存在するか否かを調べることにより, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ が一次独立か一次従属かを判定せよ.

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021) (m20212418)

0.140　空間内の 3 点 $P_1(1,-2,1),\ P_2(-2,3,5),\ P_3(2,-5,-7)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1)　点 P_3 を通りベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2)　点 P_1 を通り直線 ℓ と直交する平面 M の方程式を求めよ．

(3)　直線 ℓ と平面 M の交点の座標を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072507)

0.141　平面 $\pi\ :\ ax+2y-z=6$ と直線 $l\ :\ \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{7}$ について以下の問いに答えよ．

(1)　π と l が平行となるように a の値を定めよ．

(2)　平面 π 内にあって直線 l と平行で l に最も近い直線 m の式を求めよ．

(3)　2 直線 l, m の距離を求めよ．

(静岡大 2008)　　(m20082504)

0.142　4 点 $A(1,2,3),\ B(-2,1,3),\ C(-1,-2,1),\ D(2,1,-3)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1)　3 点 A, B, C を含む平面 α の式を求めよ．

(2)　点 D を通り，平面 α に垂直な直線の式を求めよ．

(3)　$AB,\ AC,\ AD$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092501)

0.143　原点を通り, 直線 $\ell_1\ :\ \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+5}{1}$ と直交する直線を ℓ_2 とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　直線 ℓ_2 の方程式を求めよ.

(2)　2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 を含む平面の方程式を求めよ.

(静岡大 2010)　　(m20102503)

0.144　xyz 空間内に 4 点 $A(1,0,2),\ B(-1,1,1),\ C(0,2,6),\ D(4,2,-1)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面 π の方程式を求めよ．

(2)　平面 π と点 D の距離を求めよ．

(3)　点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(静岡大 2011)　　(m20112503)

0.145　空間内に 4 点 $A(1,1,1),\ B(2,3,2),\ C(-2,0,3),\ D(0,2,5)$ をとる．3 点 A, B, C を含む平面を π とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　平面 π の方程式を求めよ．

(2)　点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ．

(3)　点 D と平面 π との距離を求めよ．

(4)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(5)　四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(静岡大 2013)　　(m20132501)

0.146 二つの平面 $x+y+z=1$ と $x+3y-z=1$ との交線を表す方程式を求めよ．

(岐阜大 2001) (m20012609)

0.147 座標平面の点 $(3,4)$ を通り，直線 $2x+y-3=0$ と角度 45° で交わる直線の方程式を求めよ．

(岐阜大 2003) (m20032606)

0.148 xyz 空間における平面 π : $x+2y+3z-5=0$ および直線 g : $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{2}$ について，次の問に答えよ．

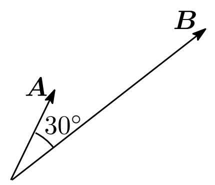
(1) 平面 π の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 直線 g の単位方向ベクトルを求めよ．

(3) 平面 π と直線 g の交点の座標を求めよ．

（岐阜大 2004） (m20042605)

0.149 $\boldsymbol{A}=(a,1)$, $\boldsymbol{B}=(b,3)$ で表されるベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ のなす角が 30°, 内積が 6 であるとき，$b>a>0$ を満たす a,b の値を求めよ．



(岐阜大 2006) (m20062607)

0.150 2つのベクトル $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(2,1,2)$ とのなす角 α を求めよ．
（ただし，$0^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$とする）

(岐阜大 2006) (m20062618)

0.151 次の 3 点 $A(1,1,2)$, $B(-3,2,1)$, $C(1,-1,-3)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(岐阜大 2007) (m20072606)

0.152 質点が力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けながら，点 P から点 Q まで変位したとき，この力が質点に与える仕事量 W は，$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ （内積）で与えられる．$\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $P(3,2,-1)$, $Q(2,-1,4)$ のとき仕事 W を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ である．

(岐阜大 2007) (m20072618)

0.153 次の 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるために x が満たすべき条件を答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\x-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\x-1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}x-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008) (m20082606)

0.154 2 平面 $x+2y-3z=-1$, $3x-y-2z=4$ のなす角を求めよ．

(岐阜大 2009) (m20092608)

0.155 m を定数として 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\m\end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は線形独立（一次独立）であることを示せ．また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（一次従属）になるような定数 m の値を求め，そのとき，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の線形結合（一次結合）で表せ．

(岐阜大 2017)　　(m20172606)

0.156　k を定数として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \\ -3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, が一次従属となるような k の値を求めよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222604)

0.157　ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角 θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ を満たすとき，点 (x, y) の存在する領域を x，y に関する不等式で表せ.

(豊橋技科大 1996)　　(m19962706)

0.158　x，y，z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1)　$\triangle ABC$ の重心を G，$\overrightarrow{OG} = \boldsymbol{g}$ としたとき，$\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表せ.

(2)　$\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ.

(3)　四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ.

(豊橋技科大 1996)　　(m19962707)

0.159　以下の問に答えよ.

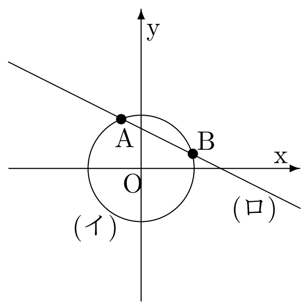
(1)　以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，円と直線の交点をそれぞれ A，B とする.

$x^2 + y^2 = 5$　$\cdots$　（イ）

$x + 2y = 3$　$\cdots$　（ロ）

(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ.

(b) 線分 AB の長さを求めよ.



(2)　以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている.

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$　$\cdots$　（ハ）

$x + 2y + 3z = 7$　$\cdots$　（ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ.

(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982710)

0.160　平面上の点 $A(1,2)$ を，点 $B(3,4)$ を中心として時計回りに 90 度回転させた．回転後の点 A の座標を求めよ.

(豊橋技科大 1999)　　(m19992706)

0.161　列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて，列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ を表せ.

(豊橋技科大 2003)　　(m20032706)

0.162　空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,2)$ がある. 以下の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ を成分で表し, それぞれの大きさを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 3 点を通る平面を α とするとき, 原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

（豊橋技科大 2004） (m20042706)

0.163 (1) 球面 S : $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$ の中心 P の座標と半径を求めよ.

(2) 直線 : $x=2y-2=-z+1$ と直交し，点 $(a,0,0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ.

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ.

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）.

(豊橋技科大 2007) (m20072704)

0.164 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ 0,\ -2)$, $\boldsymbol{b}=(3,\ 2,\ -2)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ がある．ただし，$c_1,\ c_2,\ c_3$ は実数である．$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交し，$\boldsymbol{c}$ の大きさは 9 である．$\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) 直交座標空間内に，点 $D(3,\ -4,\ 2)$ を通りベクトル $\boldsymbol{p}=(1,\ -1,\ 0)$ に平行な直線がある．さらに点 $E(5,\ -6,\ 4)$ を中心とした半径 6 の球がある．直線と球との交点の座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2012) (m20122702)

0.165 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ について，以下を求めよ.

ア．内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

イ．それぞれの大きさ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

ウ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，かつ大きさが 6 であるすべてのベクトル $\boldsymbol{c}$

(豊橋技科大 2016) (m20162705)

0.166 xyz 空間において，同一直線上にない 3 点 (x_1,y_1,z_1) , (x_2,y_2,z_2) , (x_3,y_3,z_3) を通る平面の方程式を求めよ.

(名古屋大 1999） (m19992802)

0.167 3 次元空間内において，平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を考える．以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_X，$\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトルを e_Y，e_X と e_Y のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_Z とし，e_X, e_Y, e_Z を基本ベクトルとする新たな直交座標系を考える．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて e_X, e_Y, e_Z を表せ．ただし，e_X, e_Y, e_Z はこの順に右手系をなすものとする.

(2) 設問 (1) で求めた e_X, e_Y, e_Z を基本ベクトルとする直交座標系における $\boldsymbol{b}$ の成分 $(b_X,\ b_Y,\ b_Z)$ を求めよ.

(3) ある直交座標系において $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ と成分表示されるものとする．この直交座標系の xy 平面上において放物線 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)=(t,t^2,0)$ を考える．ただし，t は実数とする．放物線 $\boldsymbol{p}$ を e_X, e_Y, e_Z を基本ベクトルとする直交座標系の成分で表せ．ただし，これら 2 つの直交座標系の原点は互いに一致するものとする.

(名古屋大 2015)　　(m20152803)

0.168　自然な内積を持つ $\mathbb{R}^4$ のベクトル　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\\2\end{pmatrix}$,　$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\k\\4\\3\end{pmatrix}$,　$\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\p\\-16\\q\end{pmatrix}$　は

i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが成す角は $\dfrac{\pi}{3}$ であり,　　ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次従属である

という条件をみたす．このとき次の問に答えよ．

(1)　k を求めよ．　　(2)　p , q を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062901)

0.169　3 次元数ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ とする. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1\,,\ \boldsymbol{a}_2\,,\ \boldsymbol{a}_3\}$ から, グラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法ともいう）により $\mathbb{R}^3$ の正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1\,,\ \boldsymbol{u}_2\,,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を構成しなさい.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102902)

0.170　4 点 $P(1,3,2),\ Q(1,1,a+2),\ R(4,0,2),\ S(a+1,6,-3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102906)

0.171　(x,y,z) 空間における次の 2 直線の距離を求めよ.

$$\frac{x-5}{2}=-\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{4}\ ,\qquad \frac{x-3}{8}=y+7=-\frac{z+2}{5}$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132904)

0.172　空間内の直線 $x-6=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ を含み，点 $(7,8,10)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2015)　　(m20152905)

0.173　次の行列 A の列を左から $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ とする.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&5\\-2&1&4&-4&-15\\-1&-2&-3&4&7\end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ から一次独立なものを取り出すとき，その最大個数 r を求めよ.

(2)　$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ から r 個の一次独立なものを, 前の方から順に取り出せ.

(3)　(2) で選ばなかったものを，(2) で選んだものの一次結合で表せ.

(名古屋工業大 2019)　　(m20192904)

0.174　座標空間において 3 つの平面

$$x+3z=a,\qquad x+(a+1)y-z=-1,\qquad x+6y-9z=a-6$$

の共通部分が直線 l であるとき，定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2023)　　(m20232905)

0.175 次の４つのベクトルの中から，一次独立な３つのベクトルの組を全てあげ，その理由を示しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2002)　　(m20023114)

0.176 ３点 $P_1(3,-2,-1), P_2(1,3,4), P_3(2,1,-2)$ を通る平面の方程式を求めよ．また，その平面と原点 O との最短距離を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033108)

0.177 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,2,-1)$, $\boldsymbol{b}=(4,1,2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう２辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003)　　(m20033109)

0.178 ベクトル $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ に対して, $\vec{b}-k\vec{a}$ と $\vec{a}$ が垂直となる k の値を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053103)

0.179 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1\ :\ \frac{x-1}{2}=y=\frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0,1,2)$ を含む平面の式を求めよ.

(2) l_1 および原点 $O(0,0,0)$ を含む平面の式を求めよ.

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta \leq 90^\circ$ とする .

(三重大 2005)　　(m20053116)

0.180 直交座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ に関して，それぞれの位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OA}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OB}=b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OC}=c\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$$

で与えられる三点 A,B,C がある．以下の問に答えよ．

(1) 二点 AB 間の距離を求めよ．　　(2) AB と AC のなす角を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ はどのような三角形であるかを答えよ．

(三重大 2006)　　(m20063105)

0.181 空間ベクトル $\boldsymbol{m}=(1,-3,1)$ と $\boldsymbol{n}=(3,2,-2)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う２辺とする平行四辺形の面積を求めなさい．

(3) 点 $A=(1,4,0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063110)

0.182 (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{6},1)$ がなす角 θ を求めなさい．

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい．

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006)　　(m20063112)

0.183 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$ が一次独立であるかどうかを調べよ.

(2) $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, 1)$ が一次独立であるかどうかを調べ，一次従属ならば，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せ.

(三重大 2007)　　(m20073101)

0.184 3 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，3 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, 1)\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(2, 1, 0)\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0, 0, 1)$$

を考える．以下の問いに答えなさい．ここで，上付き添え字 ^{t} は転置を表す.

(1) 方程式 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ から λ_1, λ_2, λ_3 を未知数とする連立方程式を導出しなさい.

(2) (1) の連立方程式を解くことにより，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が互いに一次独立であることを示しなさい.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合で一意に表せることを証明しなさい.

(三重大 2007)　　(m20073112)

0.185 3 次元空間における正規直交系 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて，3 点 P, Q, R の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ が，それぞれ，以下のように表されている.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\,, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3\,, \quad \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

(1) $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ への正射影（点 Q から原点と P を通る直線に下ろした垂線の足を表す位置ベクトル）を，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合で表しなさい.

(2) ベクトル $\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ が，$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ と垂直になるように，α, β を決めなさい.

(三重大 2007)　　(m20073113)

0.186 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x\,,\ A_y\,,\ A_z)$ とベクトル $\boldsymbol{B} = (B_x\,,\ B_y\,,\ B_z)$ が与えられている．以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって構成される平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角度を θ とした場合に，$\cos\theta$ の値を求めよ.

(三重大 2012)　　(m20123103)

0.187 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0, 1, 2)$ と点 $B(3, 3, 0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ.

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.188 xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 2)$, $B(3, 4, 3)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい.

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい.

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.189　空間ベクトルである $\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)$ と $\overrightarrow{b} = (-1, -2, 1)$ について，(1)〜(3) に答えなさい．

(1)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角度を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\overrightarrow{c}$ を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に 60°の角度をなし　，大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\overrightarrow{d}$ を求めよ．

(三重大 2014)　　(m20143109)

0.190　3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A(0, 1, 1)，点 B$(-a,\ 0,\ 1)$，点 C$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq\ t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　$\angle ACB = \theta,\ t = \pi$ とした場合，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2)　(1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3)　$\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.191　(1)　$2x + y + 2z = 3$ で表される平面 A と，$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2)　$x + y + z = 1$ で表される平面 A と，$2x + y + z = 1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3)　ある平面に点 A, B, C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a, b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c, d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173102)

0.192　ベクトル $\overrightarrow{a} = (4, -3)$，$\overrightarrow{b} = (1, -7)$ について，以下の問いに答えよ．

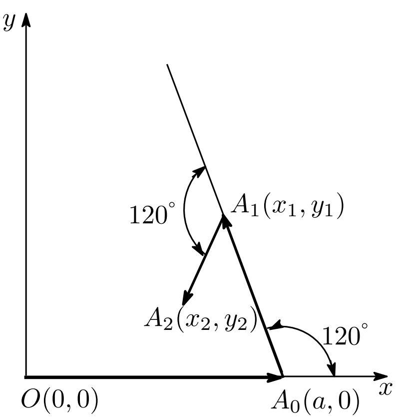
(1)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

(2)　点 $P_0(3, 4)$ を通り，$\overrightarrow{a}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173111)

0.193　図に示すように原点 $O(0, 0)$ から x 軸上を点 $A_0(a, 0)$ に向かうベクトル $\overrightarrow{OA_0}$ がある．次にベクトル $\overrightarrow{A_0A_1}$ を，点 A_0 を始点とし，長さが $\overrightarrow{OA_0}$ の 1/2，向きを $\overrightarrow{OA_0}$ から 120°（反時計回り）方向とするベクトルとして定義する．さらにベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$ を点 A_1 を始点とし，長さが $\overrightarrow{A_0A_1}$ の 1/2，向きを $\overrightarrow{A_0A_1}$ から 120°（反時計回り）方向とするベクトルとして定義する　．以降同じ操作を行ってベクトルを定義していくものとして，以下の設問に答えよ．

(1)　点 A_1 の座標 (x_1, y_1) を求めよ．



(2) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を点 A_{n-1} の座標 (x_{n-1}, y_{n-1}) と a を使って表せ.

(3) この操作を繰り返したとき，点 A_n が漸近する座標 (x, y) を求めよ.

(三重大 2020)　　(m20203105)

0.194 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい.

(2) 楕円 E 上の点 $(0, 2, 0)$ をとおり，$\overrightarrow{n} = (0, 1, 3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい.

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい.

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.195 $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と，$2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある．この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい.

(1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい.

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい.

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい.

(三重大 2022)　　(m20223105)

0.196 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次のように定めます.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立ですか.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立ですか.

(3) x と y の間にどのような関係があれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ は一次従属ですか.

(奈良女子大 2001)　　(m20013209)

0.197 $\mathbf{R^3}$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は一次独立であることを示せ．また，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$ は一次従属であることを示せ.

(2) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}\}$ が一次独立になるための x, y についての条件を求めよ.

(奈良女子大 2003)　　(m20033206)

0.198 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を実数とするとき，次の不等式を証明せよ.

(1) $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$

(2) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \geqq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(奈良女子大 2003)　　(m20033207)

0.199 実ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{d}$ および $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で示せ.

(2) どのような実ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ も $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せることを示せ.

(奈良女子大 2004)　　(m20043206)

0.200 実ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とする．実ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して，$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ となるための条件を求めよ.

(奈良女子大 2004)　　(m20043207)

0.201 3 次行列 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&k&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ と，ベクトル　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

に対して次の問いに答えよ．ただし k は実数である.

(1) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ を求めよ.　　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ は一次独立であることを示せ.

(3) $A\boldsymbol{c}$ が $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ の一次結合として表されるとき，k の値を求めよ.

(奈良女子大 2008)　　(m20083201)

0.202 3 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

と，ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．ただし，a は実数である.

(1) 行列 A^2 および B^2 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A^2\boldsymbol{v}$ と $B^2\boldsymbol{v}$ は一次独立であることを示せ.

(3) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}$ と $B\boldsymbol{v}$ が一次従属となるときの a の値を求めよ.

(奈良女子大 2009)　　(m20093201)

0.203 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし，a は実数である．

(1) $A\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(2) 2つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2$ は a の値にかかわらず一次独立となることを示せ．

(3) 3つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2$, $A\boldsymbol{v}_3$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143205)

0.204 ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立となることを示せ．

(2) a を実数とするとき，3つのベクトル $a\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$, $-\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_3$, $a\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153206)

0.205 a を実数とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4\}$ が一次独立とならないような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223201)

0.206 $\boldsymbol{R}^4$ の3つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が1次独立であるかどうかを調べよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183402)

0.207 平面上に2点 A , B がある．線分 AB を直径とする円を考え，その中心を C , 半径を R とする．

(1) 2点 A , B の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とし，円周上の任意の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ としたとき，

$$(\ \overrightarrow{p}\ -\ \overrightarrow{a}\ )\cdot(\ \overrightarrow{p}\ -\ \overrightarrow{b}\ )=0$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(2) この点 P における接線を l とする．接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とし，円の中心点 C の位置ベクトルを $\overrightarrow{c}$ としたとき，

$$(\ \overrightarrow{p}\ -\ \overrightarrow{c}\ )\cdot(\ \overrightarrow{q}\ -\ \overrightarrow{c}\ )=R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(3) 2点 A , B の座標をそれぞれ $(2,4)$, $(4,2)$ とする．接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973504)

0.208 3次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(2) 上式で表された球面上の1点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ1のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q,　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする．　$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の2つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053503)

0.209 正六角形 $ABCDEF$ において，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$ とし，辺 CD の中点を点 P，辺 DE の中点を点 Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ．

(2) 線分 CQ と線分 FP の交点を R とするとき，$\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ．

(3) 線分 AR と対角線 CF の交点を点 S とするとき，$CS:SF$ を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073504)

0.210 原点を $(0,0)$ として，$\overrightarrow{a}=(1,1)$, $\overrightarrow{b}=(-2,0)$, $\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る角 θ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．また，そのとき $\overrightarrow{c}$ と $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ は互いに直交することを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083511)

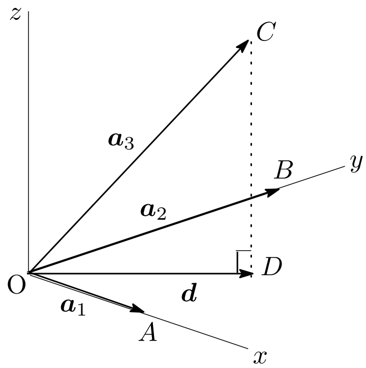
0.211 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は空間の3次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2, λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1, λ_2, λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 $O - xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点 A に対し $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}$, y 軸上の点 B に対し $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OB}$, 空間内の点 C に対し $\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OC}$ とする．点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．



(大阪大 2018)　　(m20183506)

0.212 3 次元空間の原点 O と 3 点 A, B, C を，$(0, 0, 0)$, $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ を用いて示せ．

(2) 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて示せ．

(大阪府立大 2008)　　(m20083604)

0.213 3 次元の実数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2r-3 \\ -r+6 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，r は実数とする．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立（線形独立）であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底でないとき，$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合（線形結合）で表せるか．表せるなら，$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ．そうでないなら，理由を述べ，$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せないことを説明せよ．

(大阪府立大 2017)　　(m20173601)

0.214 $A = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3)$ は 3 次正方行列
（$\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ はそれぞれ行列 A, B の第 j 列，$\boldsymbol{e}_j$ は 3 次単位行列の第 j 列 ）とし，
写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{b}_1)$, $f(\boldsymbol{b}_2)$, $f(\boldsymbol{b}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の式として表せ．

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2$ ならば $\{f(\boldsymbol{b}_1),\ f(\boldsymbol{b}_2),\ f(\boldsymbol{b}_3)\}$ は 1 次従属であることを示せ．

(大阪府立大 2019)　　(m20193608)

0.215 次のベクトルの組は一次独立かそれとも一次従属であるか調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(神戸大 1997) (m19973808)

0.216 A を n 次の正則行列，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 1 次独立な n 次元列ベクトルとし，$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{b}$ とおくとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ も 1 次独立であることを示せ.

(神戸大 1997) (m19973809)

0.217 n を 3 以上の自然数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ が全て零ベクトルでなく，内積 $\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{y}\cdot\vec{z}$, $\vec{z}\cdot\vec{x}$ は全て 0 とする．このとき $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ は一次独立であることを示せ.

(神戸大 2002) (m20023804)

0.218 ベクトル空間において，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとする．次の各問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ.

(神戸大 2007) (m20073801)

0.219 二つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, 1, 5)$ と $\boldsymbol{B} = (1, 3, 1)$ があるとき，以下の問いに答えよ. 但し，(a, b, c) の a, b, c はそれぞれ $x-$ 成分，$y-$ 成分，$z-$ 成分を表す.

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $J = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ を求めよ.

(2) xy 平面上にあり，$\boldsymbol{A}$ に垂直で長さが 1 で，x 成分が負のベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})/|\boldsymbol{A}|^2$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ の間の角度を計算せよ.

(鳥取大 2007) (m20073907)

0.220 次の 3 つのベクトルが 1 次従属となるように m の値を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

(鳥取大 2007) (m20073919)

0.221 正の実数 b, c が $bc = 1$ を満たすとして，空間の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $B(b, 0, b)$, $C(c, c, 0)$ を考える．三角形 ABC を含む平面 α 上に点 H を，線分 OH が α と垂直になるようにとるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 点 H の座標を b で表せ.

(2) 線分 OH の長さの最大値を求めよ．また，そのときの b の値を求めよ.

(3) 点 H が三角形 ABC の内部に存在するための b の条件を求めよ.

(岡山大 2014) (m20144004)

0.222 三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB = \alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014107)

0.223 4 点 $A(1,0,7)$, $B(2,1,8)$, $C(1,0,3)$, $D(2,2,9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

(広島大 2001)　　(m20014108)

0.224 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える． ただし，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする．以下のそれぞれの命題について，正しければ証明を与え，誤りであるならば反例をあげよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば，$\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である．

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である．

(3) $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が f の相異なる固有値であり，$\boldsymbol{a}_i$ が λ_i に対する固有ベクトルであるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である．

(広島大 2010)　　(m20104104)

0.225 三角不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は任意のベクトルである．

(広島大 2016)　　(m20164106)

0.226 3 次元空間における点 P, Q, R を考える．原点を O とするとき，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たしているとする．ここで，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．このとき，P, Q, R は同一直線上にあることを示せ．

(広島大 2018)　　(m20184110)

0.227 空間内の原点を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ をもつ直線を ℓ とする．ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ を ℓ と平行なベクトル $\boldsymbol{b}$ と，ℓ と直交するベクトル $\boldsymbol{c}$ により，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ と表すとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074204)

0.228 座標平面上に楕円 $C\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える．また，$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル全体のなす空間の正規直交基底とする．原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P，原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると，

$$\frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2}+\frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(広島市立大 2011)　　(m20114205)

0.229 3 次元直交座標 xyz での平面と直線の交点について考える．

(1) 3 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を通る平面 A の方程式を求めよ．

(2) 点 (x_0, y_0, z_0) は $x_0+y_0+z_0 \neq 0$ を満たす点とする．2 点 $(0,0,0)$, (x_0, y_0, z_0) を通る直線 B の方程式を求めよ．

(3) 平面 A と直線 B の交点を求めよ．

(広島市立大 2012)　　(m20124206)

0.230 3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,-1,0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ．

(2) 2 点 $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ を通る直線 ℓ と平面 π の交点の座標を求めよ．

(3) 直線 ℓ を含み，平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ．

(広島市立大 2013) (m20134205)

0.231 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,1)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ とするとき，

(1) $|\boldsymbol{c}|=5$ であるような t の値を求めよ．

(2) $|\boldsymbol{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．

(山口大 2000) (m20004303)

0.232 三角形 $P_0P_1P_2$ において P_i の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とする． 一辺 P_1P_2 の中点 M_0 の位置ベクトルと，中線 P_0M_0 を $2:1$ に内分する点 G の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ を用いて表しなさい．

（山口大 2004） (m20044307)

0.233 方程式 $6x+2y+3z=6$ で表される平面に関して以下の問いに答えなさい．

(1) 上記の平面の概略を図示しなさい．

(2) ベクトル $(6,2,3)$ は上記の平面と直交することを示しなさい．

(3) 座標原点と上記の平面との距離を求めなさい．

(山口大 2009) (m20094302)

0.234 次の 3 つのベクトルに垂直な単位ベクトルを求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2014) (m20144302)

0.235 一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．
さらに辺 CD 上で $CN=2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい．

(2) $\angle MAN=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい．

(山口大 2021) (m20214303)

0.236 ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して，

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$$

により定義する． $\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば． $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ．

(3) (2) の $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ．

(高知大 2018)　　(m20184503)

0.237　平面中の点 $P_1,\ P_2$ のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ $(x_1,\,y_1)$，$(x_2,\,y_2)$ とする．これら 2 つの点 P_1，P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2 = \theta$ とする場合，$\cos\theta$ を 2 つの点の座標で表すとどのようになるか．

(愛媛大 2007)　　(m20074618)

0.238　3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

で生成される部分空間

$$V = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}\}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ が V の基底となることを示せ．

(3) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$ を満たす実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を 1 組求めよ．

(4) $\begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{bmatrix} \in V$ となるような実数 a を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174606)

0.239　2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく．

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

また，$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく．

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0$ であることは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ．

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ に対し，${}^tA = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする．A が

$$ {}^tAA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} $$

を満たすとき，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ．

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.240 a, b, c を実数とし $ac \neq 0$ とする．$xyz-$ 空間において，3 点 $A(a, 0, 0), B(b, c, 0), C(0, 0, 1)$ を通る平面の方程式を $z = f(x, y)$ とする．次の設問に答えなさい．

(1) 関数 $f(x, y)$ を a, b, c を使って表しなさい．

(2) (x, y) が単位円周 $S = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を動くとき，関数 $f(x, y)$ が最大値をとる点を $P \in S$ とし，原点を O とすると，2 直線 OP と AB が互いに直交することを示しなさい．

（九州大 2001）　　(m20014704)

0.241 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を用いて

$$ S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2} $$

と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.242 空間の 4 点 $O = (0, 0, 0),\ A = (1, 2, -1),\ B = (1, 2, 1),\ C = (1, 1, 1)$ を考える．2 点 O, A を通る直線を ℓ, 3 点 O, A, B を通る平面を π とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 B から直線 ℓ へ下ろした垂線の足を P とする．

$e_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2 = \dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2) 点 C から平面 π へ下ろした垂線の足を Q とする．

$$ \overrightarrow{OQ} = \alpha e_1 + \beta e_2 $$

が成り立つ実数 α と β を求めよ．また，点 Q の座標を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064711)

0.243 xyz-空間に，4 点 $P(-1,1,1)$, $Q(-1,2,2)$, $R(0,2,0)$, $S(1,-1,-1)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ．

(2) xyz-空間において平面の方程式は，一般に，適当な定数 a,b,c,d により $ax+by+cz=d$ と表される．3 点 P,Q,R を通る平面の方程式を求めよ．

(3) 点 S から，3 点 P,Q,R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする．ベクトル $\overrightarrow{SH}$ を求めよ．

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094708)

0.244 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ を含む平面 α が, 座標の原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している．

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき, 平面 α を表す方程式を求めよ．

(2) 点 P が球面 β 上にないとき, 平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ が満たすべき条件を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104703)

0.245 $a,\ b,\ c,\ r$ を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=a\}$$

$$\text{平面 } S_2 = \{(x,y,z) \mid -2x+y+z=b\}$$

$$\text{平面 } S_3 = \{(x,y,z) \mid 2x+5y+rz=c\}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 任意の $a,\ b,\ c$ の値に対して常に 3 つの平面の共通部分 ： $S_1\cap S_2\cap S_3$ が 1 点となるための r に関する条件を求めよ．

(2) r が前問 (1) の条件を満たさないとする． このとき，以下の (i) と (ii) のそれぞれについて，$S_1\cap S_2\cap S_3$ は「空集合」「1 点」「直線」「平面」のいずれになるかを答えよ．「空集合」となる場合には，その理由を示すこと．それ以外の場合には，集合 ： $S_1\cap S_2\cap S_3$ を具体的に求めること．

　(i) $a=b=c=0$ の場合．

　(ii) $a=1,\ b=2,\ c=3$ の場合．

(九州大 2018)　　(m20184706)

0.246 二直線

$$\ell_1 : \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + u\mathbf{a}$$

$$\ell_2 : \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + v\mathbf{b}$$

は，交わらず，また平行でもないとする．次の各問に答えよ．

(1) ℓ_1 上の点 F と ℓ_2 上の点 G の位置ベクトルを

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{a}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{b}$$

とする．このとき，点 F と G を通過する直線が $\ell_1,\ \ell_2$ と直交するときに満たす関係式を求めよ．

(2) ℓ_1 と ℓ_2 に直交する直線がちょうど一本存在することを示せ.

(九州大 2020)　　(m20204702)

0.247 ベクトル $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ に対して $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ とおくとき，λ, $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034804)

0.248 次に示す 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ について各問に答えよ.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ のベクトルの一次結合により零ベクトルをつくり, これらのベクトルが一次従属であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ の各ベクトルを他の 2 つのベクトルの一次結合で表しなさい. また, この 3 つのベクトル系の階数が 2 であることを説明しなさい.

（佐賀大 2004）　　(m20044926)

0.249 次の (1),(2) に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のなす角は鋭角であるか鈍角であるかを判定せよ.

(2) 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

が直交するときの x の値を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054902)

0.250 $\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\nu}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のときに以下の問に答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{\nu}_1 , \boldsymbol{\nu}_2)$ を計算せよ.

(2) ベクトルの長さ $||\boldsymbol{\nu}_2||$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$ と $\boldsymbol{\nu}_3$ のなす角を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054929)

0.251 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ $(r \leq n)$ が $\mathbb{R}^n$ の 0 でないベクトルのとき，このどの 2 つも互いに直交すると仮定すると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立であることを示せ.

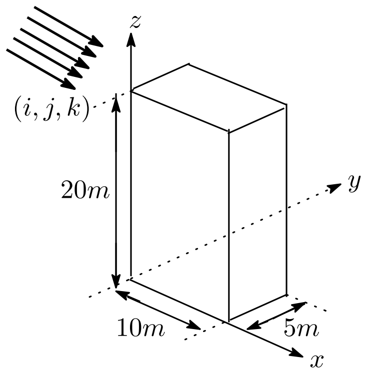
(佐賀大 2006)　　(m20064922)

0.252 直方体のビルに太陽光があたっている.

ビルに対して，右図のように $x-y-z$ 座標系を設定したときに，太陽光はベクトル (i,j,k) と平行な方向に進行するものとする．ただし,

$$i^2+j^2+k^2=1$$

であるとする．このビルにできる影の面積を i,j,k により表せ．なお，地表面は完全な平面になっているものとする，また，$i>0,\ j>0,\ k<0$ とする.



(佐賀大 2007)　　(m20074929)

0.253 O を原点とする座標空間内に 2 点 $A,\ B$ があり, $O,\ A,\ B$ は同一直線上にないとする. 点 B から直線 OA におろした垂線の足を H として,

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA} \qquad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$$

とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HB}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(2) 点 $A,\ B$ の座標を $(-1,2,5),\ (-3,11,13)$ とおくとき, 点 H の座標を求めよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104916)

0.254 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\x\\-1\end{pmatrix}$$

が一次従属になるような x を求めよ．さらに，その x に対するベクトル $\boldsymbol{c}$ をベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ.

(佐賀大 2011)　　(m20114914)

0.255 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,2,3),\ \boldsymbol{b}=(2,1,2)\in\boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する長さ 3 の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であることを示せ.

(佐賀大 2012)　　(m20124905)

0.256 x,y,z 軸からなる 3 次元空間内の平面 $\ell x+my+nz=1$ への原点 $(0,0,0)$ からの最短距離を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134905)

0.257 2 つの直交する大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ が次のように与えられているとき，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ を 2 つ求めよ.

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{k}$ のいずれかを用いて，次のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の一次結合で表せ.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2013)　　(m20134907)

0.258 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ を $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 1)$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{c} = (1, 3, 2)$ が 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{d} = (4, t, -3)$ が 1 次従属であるような定数 t を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134914)

0.259 次のベクトルの組は 1 次独立であるかを調べよ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2014)　　(m20144907)

0.260 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ であるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164917)

0.261 R を実数全体の集合とする．R^3 のベクトル $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (0, 3, -1)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(2) r 個の 1 次独立なベクトルを 1 組答えよ．また，その組に含まれるベクトルの 1 次結合によって，他のベクトルを表せ.

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ によって生成される部分空間を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ とする．R^3 のベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ に属するための $\boldsymbol{v}$ の成分に関する条件を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164928)

0.262 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．次の $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルについて，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ が一次従属となるように k の値を定めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174919)

0.263　次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184913)

0.264　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ について，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の長さを求めよ.

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ とベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の内積を求めよ.

(3)　3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立なベクトルか 1 次従属なベクトルかを示せ.

(佐賀大 2021)　　(m20214904)

0.265　平行六面体 $ABCD-EFGH$ の体積を v とし，また，この六面体の各面の対角線の交点を $PQRSTU$ とし，平行六面体 $APQR-STGU$ の体積を v' とするとき，以下の問に答えよ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\mathbf{c}$ を用いて v を表しなさい.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\mathbf{c}$ を用いて v' を表しなさい.

(3)　v を用いて v' を表しなさい.

(佐賀大 2021)　　(m20214924)

0.266　二つのベクトル $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ の内積を求めよ.

$\overrightarrow{A}=(2,3,4)$　,　$\overrightarrow{B}=(5,-1,2)$　　　$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（長崎大 2004）　　(m20045010)

0.267　図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, 2×2 行列を $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

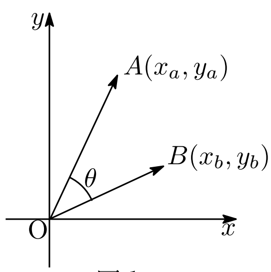


図 1

(1)　$<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2)　$|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x,y で表しなさい。

(3)　$\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,

$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4)　$\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

0.268 次のベクトルについて以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合（線形結合）で表せ.

(長崎大 2008) (m20085004)

0.269 ベクトル $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{b} = (3, -1, 2)$ の場合, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(長崎大 2008) (m20085018)

0.270 平面 P が $x + y - z + 1 = 0$, 直線 f が $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{4}$ で与えられるとき, 平面 P と直線 f の交点を求めよ.

(長崎大 2010) (m20105016)

0.271 2 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定義するとき，次の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(3) 2 次元空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ.

(長崎大 2011) (m20115014)

0.272 $\boldsymbol{R}^3$ において, ベクトル $\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立（一次独立）かどうかを調べなさい.

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底かどうかを調べなさい.

(3) $\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ と $\overrightarrow{a_3}$ の線形結合（一次結合）で表されるかどうか調べなさい．表される場合にはその線形結合を求め, 表されない場合にはその理由を説明しなさい.

(熊本大 2010) (m20105202)

0.273 3 次元空間内に原点 O を一つの頂点とする三角形 OAB がある．点 A と点 B の直交座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とし，線分 OA と線分 OB のなす角を θ として，以下の問に答えなさい.

(1) 線分 OA および OB の長さを $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のように書くことにする．このとき，線分 AB の長さの 2 乗 $\overline{AB}^2$ を $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, および θ を用いて表しなさい.

(2) $\cos^2\theta \leq 1$ であることを利用して，次の不等式

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \qquad ①$$

が成り立つことを示しなさい.

(3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し，そのとき三点 O, A および B はどのような位置関係にあるか述べなさい.

(熊本大 2014) (m20145202)

0.274 次に示す 3 つの 3 次元ベクトル，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ について以下の問いに答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立（1 次独立）であることを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}_1$ を正規化しなさい．

(3) グラム・シュミットの直交化を用いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ を正規直交化しなさい． ただし，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ の順に正規直交基底を求めなさい．

(熊本大 2016) (m20165201)

0.275 点 $(2,\ -1,\ 3)$ を通り，$(1,\ 5,\ -2)$ の方向ベクトルをもつ直線の方程式を求めよ．

(熊本大 2020) (m20205202)

0.276 3 点 $(1,2,3)$, $(1,-1,2)$, $(2,3,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(熊本大 2021) (m20215204)

0.277 3 点 $O(0,0,0), A(1,2,1), B(2,0,-1)$ がある．2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6,1,5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ．

(宮崎大 2001) (m20015305)

0.278 ベクトル

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ と表現する．このとき，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)$，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3)$，$(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の長さをそれぞれ求めよ．

(3) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ と向きが同じで，長さ 1 のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{w}_3$$

を満たす実数 a, b, c をそれぞれ求めよ．

(宮崎大 2017) (m20175302)

0.279 $O-x,y,z$ 座標系における二つの平面

$$x+2y+2z=3 \qquad\qquad 3x+3y+z=1$$

に関して以下の問いに答えよ．

(1) 二つの平面の交線の方向ベクトルを求めよ．

(2) 二つの平面の交角を求めよ．

（鹿児島大 2001） (m20015413)

0.280 ベクトル $\boldsymbol{a}=(4,3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

（鹿児島大 2001） (m20015414)

0.281 以下の問いに答えよ.

(1) 空間内の一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ を通り, 方向を示す単位ベクトル（方向余弦）が (λ,μ,ν) である直線の方程式は, 次式 $(*)$ で与えられることを示し, パラメーター s は点 P_0 から点 (x,y,z) までの有向距離を表すことを示せ.

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}=s \qquad (*)$$

(2) 空間内の異なる二点 (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1) を通る直線の方程式は, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

(3) 空間内の一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ から直線 $(*)$ への垂直距離 h は, 次式で与えられることを示せ.

$$h^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-\{\lambda(x_1-x_0)+\mu(y_1-y_0)+\nu(z_1-z_0)\}^2$$

(鹿児島大 2005) (m20055403)

0.282 頂点の座標が, A 点 $(1,0,1)$, B 点 $(2,0,1)$, C 点 $(3,3,5)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積と法線方向の単位ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2005) (m20055414)

0.283 空間に $o-xyz$ 直交座標系をとる．空間内の平面の方程式は

$$ax+by+cz+d=0\ , \quad (a,b,c)\neq 0 \qquad (1)$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ は式 (1) で与えられる平面と垂直であることを示せ.

(2) 式 (1) を $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ で割って，

$$lx+my+nz=p\ , \quad (p\geq 0) \qquad (2)$$

と表すことができる．このとき p は原点 O からこの平面への垂直距離を表すことを示せ.

(3) 空間内の一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$ から式 (2) で表される平面への距離 h は，次式で与えられることを示せ.

$$h=|\ lx_1+my_1+nz_1-p\ |$$

(鹿児島大 2006) (m20065404)

0.284 ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,1,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,1)$ のどちらにも垂直で大きさが $2\sqrt{6}$ のベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めなさい.

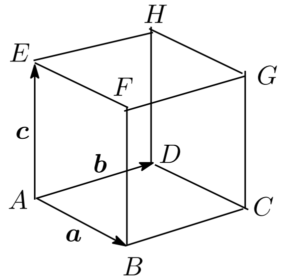
(鹿児島大 2006) (m20065407)

0.285 ベクトル $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}$ は互いに直交していることを示せ.

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_2}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A_3}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2006) (m20065415)

0.286 右図の立方体 $ABCD-EFGH$ において，ベクトル $\overrightarrow{ED}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ.
ただし，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$ は，互いに直交しており，その長さはともに l である.



(鹿児島大 2007) (m20075403)

0.287 xyz 空間内の 4 点 $A(1,1,6)$, $B(2,-1,2)$, $C(-3,2,1)$, $D(x,-2,3)$ を考える.

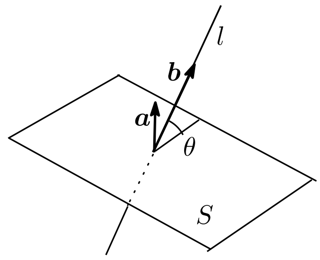
(1) $\overrightarrow{d} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) とするとき, $\overrightarrow{d}$ の x, y, z 成分を求めなさい.

(2) 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあるとき, x の値を求めなさい.

(鹿児島大 2007) (m20075408)

0.288 次のベクトルに関する問いに答えよ.

(1) 右図のように, $\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり, $\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 θ ($\leq 90^\circ$) で交わる直線 l の上に存在するベクトルである. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ.



(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ.

$S_1 \,:\, x + 2y + 2z = 3$ $\qquad$ $S_2 \,:\, 3x + 3y = 1$

(鹿児島大 2008) (m20085403)

0.289 4 点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(x,y)$, $D(-2,0)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ が平行四辺形である様に点 $C(x,y)$ の座標を求めなさい. また, その平行四辺形の面積を求めなさい.

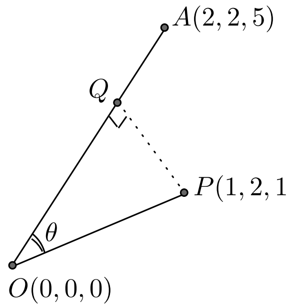
(鹿児島大 2008) (m20085407)

0.290 図の様に点 O を原点として, 点 $A(2,2,5)$, 点 $P(1,2,1)$ がある. 点 P から直線 OA におろした垂線の足を点 Q とする. この時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 図の様に直線 OA と直線 OP の成す角度を θ とする時, $\cos\theta$ を求めなさい.

(2) 直線 OQ の長さを求めなさい. 求めた長さを用いて, ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めなさい.



(鹿児島大 2009) (m20095407)

0.291 空間に直交座標系 (x,y,z) をとる. 以下の設問に答えなさい.

(1) 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ および $(0,0,1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

(2) この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (l,m,n)$ $\quad (\sqrt{l^2+m^2+n^2} = 1)$ を求めよ.

(3) 座標原点からこの平面までの距離 s を求めよ.

(鹿児島大 2009) (m20095415)

0.292 原点 $O(0,0)$, 点 $A(4,-1)$, 点 $B(2,2)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めなさい.

(2) 角 AOB を θ とする時, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい.

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095419)

0.293 直交座標系 $O-XYZ$ において，点 $A(1,-3,2)$ を含む平面 C_A : $-2x+y+3z-1=0$，点 $B(1,-1,-2)$ を含む平面 C_B : $3x+2y+z+1=0$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．平面 C_A の点 A を通る法線の方程式，平面 C_B の点 B を通る法線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 両平面の交線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2011)　　(m20115404)

0.294 ベクトルに関する以下の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について，$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}\neq 0$ が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，求める θ の範囲は $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする．

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.295 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは互いに直交になり，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$ であるとき，$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$ を求めよ．ただし，“$\times$”はベクトルの外積を表し，$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ である．$|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表す．また，θ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へのなす角である．

(2) $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ -2,\ 3)$，$\boldsymbol{c}=(1,\ 2,\ -7)$ であるとき，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}=10$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，“$\cdot$”はベクトルの内積を表し，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ である．また，外積について $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$ にもなる．

(鹿児島大 2012)　　(m20125409)

0.296 直交座標系 $O-XYZ$ において，平面 C_A : $x+y=0$ と平面 C_B : $5y+z=0$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．さらに，両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ．

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして，点 $P(1,2,1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125410)

0.297 3 次元の空間に直交座標 x 軸，y 軸，z 軸を考える．点 $A(2,2,2\sqrt{2})$，点 $B(3,3,-3\sqrt{2})$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 原点を O とした時，$\angle AOB$ を求めなさい．

(2) 原点 O から線分 AB に垂線を下ろしたとき，その足を点 P とする．線分 AP と線分 PB の長さの比を求めなさい．また，その時の点 P の座標も求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125414)

0.298 x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2,1)$ と点 $B(2,-1)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい．

(2) 座標平面の原点を O としたとき，$OA \perp OQ$ かつ $OA = OQ$ となるような，第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めなさい．また，$\angle AOB$ を θ としたとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125419)

0.299 直交座標系 $O-xyz$ において，$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$，$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$ および $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A，点 B および点 C を通る平面 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 原点 O から平面 C_1 に垂線を下ろしたときの交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を求めよ．

(3) 点 $E(3, 1, 1)$ を通る平面 C_2 ：$x + py + qz = 0$ と平面 C_1 が直交するとき，p および q の値を求めよ．

(鹿児島大 2013)　　(m20135404)

0.300 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$ と $\overrightarrow{b} = (4, 5, 6)$ がある．以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさと，ベクトル $\overrightarrow{a}$ に平行で同じ向きの単位ベクトルを求めなさい．

(2) 二つのベクトルの内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{b}$ のベクトル $\overrightarrow{a}$ に正射影したベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135408)

0.301 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1, 2, 1)$，点 $B(-1, 1, 2)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と OB のなす角 θ を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2014)　　(m20145409)

0.302 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1, 0, 1)$ および点 $B(-2, 2, 0$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle OAB$ において $\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(2) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ

(3) 原点 O を中心とする半径 R の球面：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ が直線 ℓ と点 Q で接するとき，半径 R ならびに点 Q の座標を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155404)

0.303 下記の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A を構成する三つの縦ベクトルは線形独立かどうかを調べよ．

(2) 直交座標系 $O-xy$ において，行列 A の各要素からなる三直線：$a_ix + b_iy = c_i \quad (i = 1, 2, 3)$ の交点を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155405)

0.304 直交座標系で $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする．ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない．$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.305 $O-xyz$ 座標系において，次の法線ベクトルをもつ二つの平面に関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{n}_1 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の単位ベクトルを表す．

(1) 二つの平面が直交することを示せ．

(2) 二つの平面に平行な直線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2016)　　(m20165404)

0.306 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような a を求めなさい．

(2) 前問で求めた a の値を用いて，$\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2016)　　(m20165408)

0.307 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(0,2,0)$ および点 $C(-1,-2,3)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) この 3 点を通る平面の方程式を求めよ．

(2) 求めた平面に直交な法線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2017)　　(m20175404)

0.308 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような x_1 と y_1 の関係を求めなさい．

(2) (1) で求めた関係において，x_1 が整数であり，かつ，y_1 が 1 桁の自然数のなる解 x_1, y_1 を求めなさい．

(鹿児島大 2017)　　(m20175408)

0.309 ２つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対し，$|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=5$ のとき，次の内積と絶対値を求めなさい．

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$　　　　(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$

(鹿児島大 2017)　　(m20175417)

0.310 原点 $O(0,0,0)$ を有する直交座標系 xyz において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(1,1,0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ.

(2) 原点 O を中心とし, 表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ.

(3) 点 O, A, B を含む平面に平行で, 点 $C(1,1,1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2018) (m20185404)

0.311 O を原点とする座標平面上に点 $P(1,2)$, 点 $Q(3,3)$, 点 $R(a,b)$ があるとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を 2 辺とする四角形 $OPQR$ が平行四辺形となるときの a と b の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ が直交し $\left|\overrightarrow{OR}\right| = 1$ であるときの a と b の値を求めなさい. ただし, $a > 0$ とする.

(鹿児島大 2018) (m20185408)

0.312 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (\sqrt{3}, 1)$, $\boldsymbol{B} = (\sqrt{3}, -1)$ のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を求めなさい. (鹿児島大 2018) (m20185417)

0.313 3 次元の直交座標系 $O - xyz$ において, 点 $A(1,2,-1)$, 点 $B(2,1,1)$, 点 $C(-1,4,5)$ がある. ただし, 点 O は xyz 座標系の原点 $(0,0,0)$ である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ.

(2) 線分 BC の中点を点 D とする. 点 A, D を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

(3) 線分 OA, OB, OC とこれらに平行な辺で囲まれる平行六面体の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2018) (m20185423)

0.314 O を原点とする直交座標系の 2 点 P, Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 45°のときの a の値を求めなさい.

(2) $a = 2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185427)

0.315 直線 $\dfrac{x-1}{2} = y - 8 = \dfrac{z-8}{3}$ と xy 平面との交点を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185438)

0.316 点 $O(0,0,0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O{-}xyz$ において, 点 $A(0,1,0)$, 点 $B(1,0,2)$ がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A と点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ.

(3) 点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の長さ d を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215404)

0.317 以下の問いに答えなさい.

(1) 平面 P の方程式を $x + y + \alpha z + 1 = 0$, 平面 Q の方程式を $x + \alpha y + z - 1 = 0$ とする. 平面 P と Q のなす角が直角となるような α の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形従属となるような実数 β の値をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215408)

0.318 (1) 空間内の 3 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$ を通る平面の方程式を求めなさい. ただし, ここでの座標系は直交座標系とする.

(2) 原点から平面までの最短距離を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215421)

0.319 直交座標系 $O-xyz$ において, 点 $A(1,1,-1)$, 点 $B(2,-2,1)$ および点 $C(-1,4,-3)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB と線分 AC を隣り合う 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2) 点 A, 点 B, 点 C を通る平面の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2022) (m20225404)

0.320 座標平面上の点 $P(a,a)$, 点 $Q(1,1)$, 点 $R(3,2)$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とベクトル $\overrightarrow{PR}$ が直交するときの a の値を求めなさい. ただし, $\overrightarrow{PQ}$ は零ベクトルではないものとする.

(2) $a=-1$ とするときの三角形 PQR の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225408)

0.321 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ が直交するように x を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075504)

0.322 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{v}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{r}=(0,-3,2)$ がある. $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$ としたとき, 関係式 $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{r}$ を満たす係数 α, β, γ を求めなさい.

(室蘭工業大 2016) (m20165503)

0.323 以下の 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が一次独立であるとき, 実数 x が満たす条件を求めよ.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016) (m20165514)

0.324 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2017) (m20175501)

0.325 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$ が互いに直交するとき，これらのベクトルは 1 次独立であることを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{a}_1 \neq 0$, $\boldsymbol{a}_2 \neq 0$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r \neq 0$ とします.

(室蘭工業大 2017)　　(m20175502)

0.326 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (1,\ 2,\ 3)$, $\boldsymbol{v} = (3,\ 2,\ 1)$ と直交する単位ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225506)

0.327 三次元座標空間において．ベクトル $(1,2,2)$ に垂直で点 $(1,1,-1)$ を通る平面 a, ベクトル $(1,2,2)$ に垂直で点 $(1,-1,-1)$ を通る平面 b, ベクトル $(3,-4,1)$ に垂直で点 $(1,0,1)$ を通る平面 c の 3 つの平面がある．これらの平面に関する以下の問いに答えよ,

(1) 平面 a を表す式を求めよ.

(香川大 2009)　　(m20095702)

0.328 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属になる m を求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} m \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(香川大 2017)　　(m20175704)

0.329 以下に示すベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方と直交する単位ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(香川大 2019)　　(m20195704)

0.330 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ に垂直で $x = 3$, $y = 6$ を通る直線を求めよ.

(香川大 2020)　　(m20205704)

0.331 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ の線形結合（1 次結合）で表せ.

(香川大 2021)　　(m20215705)

0.332 次に示す $\boldsymbol{R}^3$ の基底をグラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法）を用いて正規直交化せよ.

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(香川大 2021)　　(m20215706)

0.333 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ とする．このとき,

(1) $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は 1 次独立であることを示せ.　(2) $\boldsymbol{a_4}$ を $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ の 1 次結合で表せ.

(島根大 2007)　　(m20075802)

0.334 次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(島根大 2012)　　(m20125804)

0.335 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ に対して，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であり，かつ $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

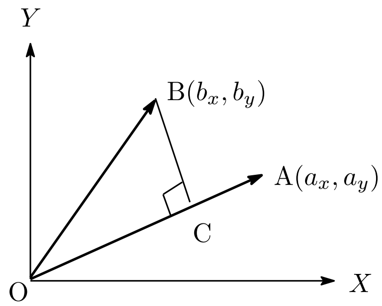
(1) $\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表されることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_4$ が零ベクトルでないとき，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の中に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ が存在して，$<\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}_4> = <\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3>$ となることを示せ．ただし，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ で張られる部分空間を $<\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}>$ で表わす．

(島根大 2014)　　(m20145802)

0.336 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x, a_y) に点 A が，座標 (b_x, b_y) に点 B がある．点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き，垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする．原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と，原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は，$X,\ Y$ 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる．以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}\ , \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ．

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある．ここで，行列 A は以下で与えられるものとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき，その k を求めよ． ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \mathbf{0}$ とする．

(島根大 2020) (m20205802)

0.337 直交座標系 (x, y, z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, -2)$ とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

(首都大 2010) (m20105901)

0.338 次の問題に答えなさい．

(1) 二平面 $x + 2y - z - 4 = 0$ と $x - y + 2z - 4 = 0$ の交線の方程式を求めなさい．

(2) (1) の交線と点 (0, 1, 0) とを通る平面の方程式を求めなさい．

(首都大 2011) (m20115902)

0.339 直交座標系における 2 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ -2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための k を求めなさい．

(2) この k を用いて $\boldsymbol{a}$ のノルム（大きさ）$||\boldsymbol{a}||$ を求めなさい．

(首都大 2012) (m20125902)

0.340 直交座標系 (x, y, z) における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -2, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい．

(3) $(0, 0, 0)$, $(2, -2, 1)$, $(1, 1, 2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい．

(首都大 2013) (m20135902)

0.341 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の (1),(2) に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6-k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6+k \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための k の条件を求めなさい．

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立であるための k の条件を求めなさい．

(首都大 2015) (m20155902)

0.342 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める． 下記の (1), (2), (3) に答えなさい． ただし，u は正の実数である．

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165903)

0.343 xyz 座標系において, $A(-1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 0)$ の 3 点がある. 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ求めなさい.

(2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.

(3) 3 点 A, B, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185901)

0.344 点 $A(5,3,1)$ と平面 $\alpha\ :\ x+2y+2z=4$ を考える.

(1) 点 A から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標と垂線の長さを求めなさい.

(2) 平面 α 上に点 $(0,-1,3)$ を中心とした半径 1 の円 C を描く. 点 P は円 C 上の点で, 線分 AP の長さが最大となるものとする. このとき点 P の座標と, 線分 AP の長さを求めなさい;

(3) 3 点 A, P, H を通る平面を求めなさい.

(首都大 2019)　　(m20195901)

0.345 直交座標系 (x,y,z) において, 直線 $\ell : x-1=-y+3=-z-5$ および点 $A(4,5,2)$ に対し, 以下の問いに答えなさい.

(1) ℓ および A を含む平面を α とする. α の方程式を求めなさい.

(2) A から ℓ に垂線 AH を引くとき, H の座標を求めなさい.

(3) 原点 O から α に垂線 OH' を引くとき, H' の座標を求めなさい.

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

0.346 座標空間内に原点 $O(0,0,0)$, および 4 点 $A(1,-1,0)$, $B(-1,3,2)$, $C(2,1,3)$, $D(-1,0,3)$ がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の 1 次結合として表せ.

(2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

(東京都立大 2020)　　(m20205909)

0.347 3 次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および
3 点 $A(0,\ 2+2\sqrt{3},\ 0)$, $B(2-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$, $C(2+2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ がある.
このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ において, 三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ.

(東京都立大 2021)　　(m20215902)

0.348 (1) 3 点 $A(3,2,1)$, $B(1,2,3)$, $C(5,5,5)$ を通る平面 T と直交するベクトルを求めよ.

(2) T と直交し点 $D(3,5,7)$ を通る直線を求めよ．

(滋賀県立大 2013)　　(m20136003)

0.349 次のベクトル　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$

に関して以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $a=1$ のとき $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は線形独立か線形従属かを調べよ．

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が線形従属になるための実数 a の条件を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076104)]

0.350 (1) 平面上の零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，シュワルツの不等式,

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

が成立することを示せ.

(2) シュワルツの不等式で等号が成り立つとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がどのような関係にあるか答えよ.

(宇都宮大 2010)　　(m20106101)

0.351 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$, $\boldsymbol{b} = (0,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{c} = \left(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right)$ が，いずれも原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を始点として存在しているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角の大きさを求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を共に含む平面を α と呼ぶとき，平面 α と $\boldsymbol{c}$ の成す角の大きさを求めよ．

(宇都宮大 2014)　　(m20146102)

0.352 座標の定められた空間における平面と直線について，下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ は 2 点 $(2,1,3)$ および $(0.-1,1)$ を通り，直線 m は 2 点 $(4,3,1)$ および $(3,0,2)$ 通る．直線 ℓ を含み，直線 m に平行な平面 p の方程式を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) 点 $(1,-1,-3)$ を通り，(1) で求めた平面 p と直交する直線を k とする．平面 p と直線 k の交点を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156101)

0.353 2 つのベクトル $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が成す角 θ を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046207)

0.354 ベクトル $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,-1,1)$, $\vec{c} = (4,-2,1)$ において次の計算を行え．

(1) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(2) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$

(3) $4\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$

(工学院大 2005)　　(m20056206)

0.355 正方形 $ABCD$ を底面とした四角錐 O-$ABCD$ において，$OA = 1,\ AB = 2,\ BC = 2$ とする．また，$OA \perp AB,\ OA \perp AD$ とする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と外積の大きさ $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$ を求めなさい.

(2) 線分 OD を $2:3$ に内分する点を E, 線分 OC の中点を F とする. また, 3 点 A, E, F を含む平面と辺 OB またはその延長と交わる点を G とする. このとき, $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい.

(3) 三角形 AEF の面積を求めなさい.

(和歌山大 2015)　　(m20156501)

0.356 次のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の組は線形独立か線形従属かを理由とともに答えなさい.

(岩手県立大 2013)　　(m20137002)