[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：9 行列

0.1 次の三つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ に関して以下の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0\\2\\a\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}a\\1\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-2\\a\\1\end{pmatrix}$$

(1) これらのベクトルが一次独立となるとき，a が満たすべき条件を求めなさい．ただし，a は実数とする.

(2) $a=-1$ のとき，次の等式を満たす行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

(北海道大 2017)　(m20170108)

0.2 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\2&2&4\end{pmatrix}$$

(北見工業大 2011)　(m20110206)

0.3 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&0&4\end{pmatrix}$ とする．逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2016)　(m20160205)

0.4 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2017)　(m20170206)

0.5 行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&-2\\2&1&1\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2018)　(m20180205)

0.6 行列 $A=\begin{pmatrix}3&4&-8\\1&0&-2\\2&-1&-3\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019)　(m20190205)

0.7 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2022)　(m20220206)

0.8 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}$ の和と積を求めよ.

(岩手大 1998)　(m19980310)

0.9 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　　(m19980311)

0.10 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ. ただし, E は 2 次の単位行列である.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2 - 3A + E = O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ.

（岩手大 2004）　　(m20040308)

0.11 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について 次の問に答えなさい.

(1) 次の等式を満たすことを示しなさい.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

ただし，E は単位行列，O は零行列である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$A^4 - 5A^3 + 10A^2 + 7A + 3E$ を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200302)

0.12 次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ．

行列 $\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} & \boxed{\text{(c)}} \\ \boxed{\text{(d)}} & \boxed{\text{(e)}} & \boxed{\text{(f)}} \\ \boxed{\text{(g)}} & \boxed{\text{(h)}} & \boxed{\text{(i)}} \end{pmatrix}$ である．

(秋田大 2002)　　(m20020404)

0.13 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

（秋田大 2004）　　(m20040404)

0.14 行列 $C=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

（秋田大 2004） (m20040405)

0.15 次の式 $(A+B)^3$，$(A+I)^2$ を展開せよ．ただし，A, B は n 次正方行列，I は n 次単位行列である．

(秋田大 2006) (m20060401)

0.16 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法を用いて求めよ．

(秋田大 2009) (m20090405)

0.17 正方行列 A が $A^2=O$ を満たすとき，行列 $I+A$ は $I-A$ の逆行列となることを示せ．ここで，O と I は A と同じ型の零行列と単位行列である．

(秋田大 2009) (m20090408)

0.18 ２行２列の行列 $P=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q=I-P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は２行２列の単位行列である．

(1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$Q^n=(p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ．

(3) $|P+q-1|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^n$ を求めよ．

(東北大 1993) (m19930504)

0.19 ２行２列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P=\begin{pmatrix} 1+\cos x & \sin x \\ \sin x & 1-\cos x \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P^2 を計算せよ．

(2) 正整数 n に対して P^n を求めよ．

(3) 正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ．

(東北大 1994) (m19940503)

0.20 (1) a, b, c, p, q, r を実数とし，

$$D=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \ , \quad N=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．任意の自然数 k に対し，

$$(D+N)^k=D^k+M \ , \quad M=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし，α, β, γ は適当な実数である．

(2) 3次正方行列 A がある自然数 n に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ. ただし, O は零行列である.

(東北大 2006) (m20060504)

0.21 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ について A^2, ${}^tAA$, A^{-1} を求めよ. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(東北大 2007) (m20070501)

0.22 a は負, b は正の定数とする. 3次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数が2であるための必要十分条件を求めよ.

(2) A が正則行列のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2015) (m20150507)

0.23 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ.

(2) 2次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ.

(3) A を n 次直交行列とする. 2つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ. ただし, 距離はユークリッド空間における標準的な距離とする.

(東北大 2016) (m20160506)

0.24 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018) (m20180504)

0.25 次の行列 $\boldsymbol{B}$ について, 以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{B}^3$ を求めよ.

(2) n が1以上の整数であるとき, n を用いて $\boldsymbol{B}^n$ を表せ.

(東北大 2019) (m20190504)

0.26 次の行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210502)

0.27 次の行列 $\boldsymbol{X}$ と数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問に答えよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{X}^3$ を求めよ．

(2) n が 1 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{X}^n$ が次の形式で表されることを，数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\boldsymbol{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n, b_n, c_n で構成される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220502)

0.28 3 行 3 列の行列 A と B を以下のように与える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A と B の和 $(A + B)$，差 $(A - B)$，積 $(A * B)$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970607)

0.29 a を $0 \leq a \leq 1$ なる実定数とする．2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算し，その $n \to \infty$ における極限を示せ．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000611)

0.30 実数を成分とする 2× 2 行列 A に対し，その転置行列 ${}^tA$ を右から掛けると，

$$A \cdot {}^tA$$

が単位行列になるという．

(1) A はどんな行列か．

(2) 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどんな点になるか，位置関係を図形的に説明せよ．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000612)

0.31 A を与えられた実係数 n 次正方行列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき，A は正則行列ではないことを示せ．

(2) $A^n \neq O$（n は行列 A の次数）かつ $x \neq o$ であるが，$A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ．

(3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする．

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき，k 個のベクトル $x, Ax, \cdots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ．

(4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば，$k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010607)

0.32 次の正方行列 A, B, C を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) A, B, C の階数を求めよ．

(2) A, B, C に逆行列が存在すれば求めよ．

(3) n 次正方行列 A について，次の 2 つの命題を考える：

(a) A^{-1} が存在する．　(b) A の階数が n である．

この 2 つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか？理由とともに答えよ．

1) 同値

2) 一方が他方の十分条件であるが，必要条件でない．

3) 1),2) のいずれでもない．

(お茶の水女子大 2003)　(m20030610)

0.33 次の行列 A について，A^2, A^3, A^4 を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　(m20160603)

0.34 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　(m20200617)

0.35 実 n 次正方行列 X で

$$X^k \neq E_n \ (1 \leq k < n) \ , \ X^n = E_n$$

となるものの例を作れ．ここで E_n は単位行列を表す．

(東京工業大 1999）　(m19990803)

0.36 n を奇数とする，n 次正方行列 B が ${}^tB = -B$ を満たすならば，B は正則行列ではないことを証明せよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表すものとする．

(東京工業大 2000） (m20000803)

0.37 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく．A が逆行列を持つための条件を求め，更にその場合に逆行列を求めよ．

(東京工業大 2012) (m20120804)

0.38 複素数を成分とする 2 次の正方行列 A について，次の問に理由を付けて答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A) > \mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(2) $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(3) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2) \neq \mathrm{rank}(A^3)$ となることはあるか.

(東京工業大 2013) (m20130802)

0.39 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京農工大 1996) (m19960906)

0.40 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ および未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ を次のようにおく.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, A^2\boldsymbol{u}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，3 つのベクトル $A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x}$ は一次独立でないことを示せ.

(電気通信大 2006) (m20061004)

0.41 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，行列 $B = A^4 - 3A^3 + 2A^2 + 4A + E$ を求めよ．ここで E は単位行列とする.

(千葉大 1996） (m19961204)

0.42 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) A^TA を求めなさい．ただし，A^T は A の転置行列である.

(2) A^TA が逆行列を持つことを示しなさい.

(3) $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき，p, q の値を求めなさい．ただし，$||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す.

(千葉大 2011)　　(m20111202)

0.43　(1)　行列 $A=\begin{pmatrix} t+4 & -3 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ （ただし，t は実数）が正則であるための条件を示しなさい．

(2)　行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 B^{-1} を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171205)

0.44　次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2000)　　(m20001306)

0.45　実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$P^n\ (n \geqq 2)$ を求めよ．

(2)　$A,\ A^2$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．ただし，I は 3 次の単位行列を表す．

(3)　$A^n\ (n \geqq 2)$ を $n,\ \alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4)　$\exp A$ を $\alpha,\ \beta$ を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5)　$\exp(-A)$ を $\alpha,\ \beta,\ I,\ P,\ P^2$ を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011308)

0.46　n 次行列 A について，次のことを証明せよ．ただし，E を n 次の単位行列とする．

(1)　$A^k = E$ となる自然数 k があれば，A は正則である．

(2)　$A^2 = A$，$A \neq E$ であれば，A は正則でない．

(筑波大 2003)　　(m20031313)

0.47　二次行列 A が $A^2 = E$　(E : 単位行列) を満たすとき，A を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031314)

0.48　n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ($(i, n-i+1)$ 成分のみ 1, 他の成分は 0) について，

A^{-1}，A^k (k : 自然数) を求めよ．

(筑波大 2003)　　(m20031315)

0.49 単位行列とは異なる n 次の正方行列 A に対し，A^k $(k=1,2,\cdots)$ を k 個の A の積 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$ と定義する．次の 2 つの問いに答えよ．

(1) $A^2 = A$ ならば，A は正則ではないことを証明しなさい．

(2) A が正則ならば，任意の自然数 $k(=1,2,\cdots)$ に対して A^k も正則となり，A^k の逆行列 $(A^k)^{-1}$ は A の逆行列 A^{-1} を使って $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ と表せることを証明しなさい．ただし，$(A^{-1})^k$ は A^k の定義と同様に k 個の A^{-1} の積を表すものとする．

(筑波大 2006) (m20061311)

0.50 正方行列 M の対角成分の和を $tr(M)$ と表すとき，n 次正方行列 A, B に対して $tr(AB) = tr(BA)$ であることを示せ．

(筑波大 2006) (m20061313)

0.51 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) AB, B^TA を求めなさい．ただし，B^T は B の転置行列である．

(2) $X \neq O$, $AX = XA = O$ となる行列 X を求めなさい．要素が整数となる行列を 1 つだけ解答すればよい．

(筑波大 2006) (m20061320)

0.52 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(筑波大 2007) (m20071328)

0.53 a を複素数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) A の階数 $(=\mathrm{rank}A)$ を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ．

(筑波大 2009) (m20091311)

0.54 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，次の 2 条件を考える．

(a) 各成分 a_{ij} は 1 または -1 である．

(b) A の二つの異なる列ベクトルは必ず直交する．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき，条件 (a) と (b) を満たす行列は存在しないことを示せ．

(2) n 次正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき，

$${}^tA\,A = nE$$

となることを示せ．ただし，E は n 次単位行列，${}^tA$ は A の転置行列とする．

(3) 正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき,

$$H = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$$

も条件 (a) と (b) を満たすことを示せ.

(筑波大 2009)　　(m20091312)

0.55 E を単位行列とするとき, 次の実交代行列 A に対して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $E + A$ の逆行列を求めよ.

(2) 上の結果を利用して，$P = (E - A)(E + A)^{-1}$ を求めよ.

(3) P は直交行列であることを示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121307)

0.56 m を自然数とし，E_m を m 次の単位行列，$1_m = {}^t(1, 1, \cdots, 1)$，$e_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$ をそれぞれ m 項縦ベクトルとする．このとき，次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $E_m + 1_m\,{}^t1_m$

(2) $E_m + e_1\,{}^t1_m$

(筑波大 2013)　　(m20131301)

0.57 n 次正方行列 A と B の交換子 $[A, B]$ を $AB - BA$ と定義する．次を示せ.
ただし O は零行列を表すものとする.

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$

(2) A と B が交代行列ならば，$[A, B]$ も交代行列である.

(3) A と $[A, B]$ が可換ならば，任意の正整数 n に対して $[A^n, B] = n[A, B]A^{n-1}$ である.

(筑波大 2016)　　(m20161301)

0.58 (1) n 次正方行列 $A = (a_{ik})$ において，第 i 行，第 k 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを A の第 $(i,\ k)$ 余因子といい，$\triangle_{ik}$ により表す．このとき，以下の問に答えよ.

(a) A の行列式 $|A|$ を第 $(n,\ k)$ 余因子 $(k = 1, \cdots, n)$ を使って表せ.

(b) A の逆行列 A^{-1} の第 $(i,\ k)$ 成分を A の行列式と余因子により表せ.

(2) A を n 次正方行列，D を m 次正方行列とする．また，$O_{m,n}$ を $(m,\ n)$ 次の零行列，I_n，I_m をそれぞれ n 次と m 次の単位行列とする．A が正則であるとき，
行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め，それから，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ.

(3) A, B, C を n 次正則行列，O_n を n 次零行列とするとき，$2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(筑波大 2018)　　(m20181308)

0.59 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような $a,\ b,\ c$ の組を全て求めなさい.

(筑波大 2020)　　(m20201311)

0.60 実数を成分とする m 行 n 列の行列 A の第 i 行第 j 列成分を a_{ij} で表す.

(1) A の転置行列を ${}^tA$ とするとき，行列の積 ${}^tAA$ の第 i 行第 j 列成分を求めよ.

(2) ${}^tAA$ の対角成分のすべての和が 0 であるとき，もとの行列 A はどんな行列か決定せよ.

(埼玉大 2000)　　(m20001404)

0.61 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする．ただし，$n \geq 2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$A = LU$ となる下三角行列 L，上三角行列 U は存在しないことを証明せよ.

(埼玉大 2002)　　(m20021404)

0.62 E を 3 次単位行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく．整数 $n \geq 1$ に対し，$A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ.

(埼玉大 2003)　　(m20031407)

0.63 $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となるための $a,\ b$ の条件を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & c \\ d & 1 & d & 1 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための $c,\ d$ の条件を求めよ.

（埼玉大 2004）　　(m20041407)

0.64 行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる.

$A = R + S,$　　ただし, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする．このとき, R および S を求めよ.

(埼玉大 2007)　　(m20071404)

0.65 0 と 1 のみを成分とする 2×3 行列 A で,

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ. ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(埼玉大 2010)　　(m20101402)

0.66 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$ が $A^2 = A + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする．以下の 2 問に答えよ．

(1) A を求めよ． (2) A^{10} を求めよ．

(群馬大 2003) (m20031504)

0.67 $3\times\ 3$ の行列に関する積は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と表すとき, ベクトル $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し,

$\boldsymbol{Ad} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$ と定義し, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対して,

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ を $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ と定義する.

このとき以下の 2 問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{19}{7} & 1 & b \\ \frac{41}{14} & c & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ となるときの a, b, c の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき，$\boldsymbol{Cd} = -2\boldsymbol{d}$ となるときの x と z を，y を用いて示すと $x = py$，$z = qy$ になる. p, q の値を求めよ.

(群馬大 2005) (m20051505)

0.68 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在するために必要な，$a \neq \pm\infty$ 以外の条件を求めよ.

(2) $a = 4$ のとき，行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(群馬大 2007) (m20071501)

0.69 以下の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 1994) (m19941604)

0.70 次のような行列 A と B がある．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

今，成分が整数からなる $2\times\ 2$ の行列 C と次のような関係がある．

$$CAC^{-1} = B$$

(1) 行列 C の成分を

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした場合，a, b, c, d の間にはどのような関係があるか.

(2) その関係を満たす行列 C の一般形を求めよ.

(3) C の逆行列 C^{-1} を求めよ.

(図書館情報大 1998) (m19981605)

0.71 $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．X , X^{-1} を求めよ.

(図書館情報大 1999) (m19991609)

0.72 以下の (1)-(5) の行列の積が定義されるかどうか判断し，定義されない場合には×を，定義される場合には積の計算結果を，解答欄に記入せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 2002) (m20021609)

0.73 (1) A, B, C を２次の正方行列とするとき，$(A + B)C = AC + BC$ が成り立つことを示せ.

(2) ２次の行列の行列式，３次の行列の行列式，４次の行列の行列式のそれぞれの定義を記せ.

(3) 行列について，上記の (1), (2) 以外に知っていることを記せ.

(茨城大 1999) (m19991706)

0.74 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 $A = (f_{ij}(x))$ の微分を，$\dfrac{dA}{dx} = \left(\dfrac{df_{ij}(x)}{dx}\right)$ となる n 次行列と決める．このとき，次の問に答えよ.

(1) 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 A, B に対し，$\dfrac{dAB}{dx} = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$ が成立することを示せ.

(2) $\dfrac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\dfrac{dA}{dx}A^{-1}$ が成立することを示せ.

(山梨大 2002) (m20021806)

0.75 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b についての条件を求めなさい.

(山梨大 2013) (m20131802)

0.76 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2003)　　(m20031902)

0.77　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131903)

0.78　n を自然数とする．すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする．

(1) 行列 A が逆行列を持つとする．このとき，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ．

(2) $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする．このとき B は逆行列を持つことを証明せよ．

(3) $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^tC\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．ここで，${}^tC$ は C の転置行列である．このとき $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$ の成分の和が一致すること，すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$ であること，を証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191911)

0.79　次の問いに答えよ．

(1) A を n 次正方行列とし，E, O をそれぞれ n 次単位行列，n 次零行列とする．このとき，次の (a),(b) を示せ．

(a) 正の整数 m に対して
$$E - A^m = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$$
が成り立つ．

(b) ある正の整数 m に対して $A^m = O$ となるとき，$E - A$, $E + A$ は共に正則（逆行列を持つこと）である．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A^3 = O$ であることを示せ．さらに $(E - A)^{-1}$ および $(E + A)^{-1}$ を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022004)

0.80　次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新潟大 2014)　　(m20142003)

0.81　a を定数とする．以下の行列が正則なる a の条件を求め，その条件の下，逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(新潟大 2015)　　(m20152006)

0.82　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ とする．

(1)　P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2)　$B=p^{-1}AP$ とするとき，B^n を求めよ．n は自然数とする．

(3)　A^n を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152012)

0.83　行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について次の (1)～(3) に答えよ．E は単位行列，O は零行列である．

(1)　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ であることを示せ．

(2)　$A^2=O$ ならば $a+d=0$, $ad-bc=0$ であることを示せ．

(3)　$A^2-5A+6E=O$ を満たすとき，$a+d$, $ad-bc$ の値をそれぞれ求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152015)

0.84　行列　$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & -1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　について，A^3　および　A^{-1}　を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912106)

0.85　$A=\begin{pmatrix}a+2b & 2-3b\\ 3-4c & a+3c\end{pmatrix}$　とする．1 行 2 列の行列　$X=(x \quad y)$　に対して，　$X'=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$　とおく．すべての　x , y　に対して，行列の積 $XAX\,'$ がつねに O となるような a , b , c の値を求めよ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922107)

0.86　$f(t)=e^{-t}\cos t$, $g(t)=e^{-t}\sin t$　とするとき，

(1)　$\begin{pmatrix}f'(t)\\ g'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}f(t)\\ g(t)\end{pmatrix}$ となる，定数を成分とする 2×2 行列　A を求めよ．

(2)　4 階の導関数 $f^{(4)}(t)$, $g^{(4)}(t)$　を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942106)

0.87　行列 $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．(n は自然数，E は単位行列とする．)

(1)　$(A-E)(A+\frac{1}{2}E)$　を計算せよ．

(2)　x^n を $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ で割った余りを a_nx+b_n とする．a_n, b_n を n の式で表せ．

(3)　$A^n=a_nA+b_nE$　と表せることを示せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$　を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962104)

0.88　行列 $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972106)

0.89 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A が正則であるための条件を求めよ．

(2) A が正則であるとき，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

(長岡技科大 1998) (m19982105)

0.90 正方行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

また, n を自然数とする. 下の問いに答えなさい.

(1) B^2, B^3 を求めなさい.

(2) AB, BA を求めなさい.

(3) A^n を n を用いて表しなさい,

(4) $n \geqq 2$ に対して, C^n を n を用いて表しなさい.

(長岡技科大 2021) (m20212101)

0.91 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算しなさい.

(金沢大 2016) (m20162212)

0.92 n 次正方行列 A, B に対して, $[A, B] = AB - BA$ と定める.

(1) 任意の A に対して, $[A, X] = 0$ を満たす X を求めなさい.

(2) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ を示しなさい.

(金沢大 2016) (m20162235)

0.93 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ が，等式 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ を満たす実数 a , b の値を求めよ．また，逆行列 A^{-1} , B^{-1} をそれぞれ求めよ．

(富山大 2004) (m20042307)

0.94 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R$$

が

$${}^tAA = E_3$$

をみたすとする. このとき, A の各行ベクトルは長さが 1 で互いに直交することを示せ. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列, E_3 は 3 次の単位行列を表す.

(富山大 2011) (m20112301)

0.95 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ.

(富山大 2013) (m20132307)

0.96 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 & -1 \\ x & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(x \in R)$ の階数を求めよ.

(富山大 2014) (m20142307)

0.97 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ とするとき，$AX = B, YA = B$ を満たす行列 X, Y を求めなさい.

(福井大 2000) (m20002413)

0.98 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，対称行列と交代行列の和として表しなさい.

(福井大 2001) (m20012416)

0.99 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ となる正方行列 $\mathbf{X}$ を求めなさい.

(福井大 2003) (m20032412)

0.100 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ がある.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ を計算しなさい.

(2) $\mathbf{CD}$ と $\mathbf{DC}$ の計算をしなさい.

(福井大 2003) (m20032413)

0.101 次の行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ がある. 以下の計算をせよ. ただし, 計算できない場合は, 計算できないと記せ.

$$\boldsymbol{a} = (3 \quad 4 \quad 5) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{aB} =$

$\boldsymbol{Ba} =$

$\boldsymbol{CD} =$

$\boldsymbol{DC} =$

(福井大 2005) (m20052406)

0.102 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x+y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x-y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x+y)$

(4) $\left(\boldsymbol{A}(x)\right)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005)　　(m20052411)

0.103 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^T\!\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(福井大 2006)　　(m20062421)

0.104 逆行列をもつ行列のことを正則行列 (regular matrix) という.

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{AB}$ も正則行列であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{A}$ が正則行列のとき，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ も正則行列であることを示せ．ここで　$\boldsymbol{E}$ は単位行列を表す.

(福井大 2007)　　(m20072409)

0.105 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の計算をしなさい.

(1) AB　　(2) BA　　(3) $2A + 3\,{}^tB$　（ただし，${}^tB$ は B の転置行列を示す）

(福井大 2008)　　(m20082419)

0.106 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ について　積 $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{BA}$ を計算せよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009)　　(m20092412)

0.107 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\!\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　（t は転置を表す）

(福井大 2011)　　(m20112418)

0.108 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とするとき，次を求めよ.

(1) $3A$

(2) A^2

(3) $|X - 3A| \neq 0$ の条件で

$X^2 - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} X - 2X + \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 X を求めよ.

(福井大 2012)　　(m20122410)

0.109　次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2012)　　(m20122419)

0.110　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし, t が転置を表すとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

(福井大 2012)　　(m20122420)

0.111　次の整数 a を含む行列 A がある. 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 2a \\ 1 & 2 & -2 & a-1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の階数（ランク）が 2 になるために a の値を求めよ.

(2) $a = 5$ のとき行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132411)

0.112　次の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ があるとき, $(\boldsymbol{BC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$ が成り立つとして, 次の関係が成り立つことを証明せよ. ここで, $\boldsymbol{B}^T$ は $\boldsymbol{B}$ の転置行列である.

$$(\boldsymbol{BCD})^T = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$$

(2) $\boldsymbol{A}$ を二次正方行列とする. $\boldsymbol{A}$ を含む次の式を満たす $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132412)

0.113　次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132421)

0.114 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに，正則性を調べ，正則なら逆行列を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132423)

0.115 2 つの 2 次正方行列がある．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

これらが

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}$$

を満たすとき，2 次正方行列である行列 $\boldsymbol{X}$ と行列 $\boldsymbol{Y}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{A}^T$ は行列の転置行列である．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ．

(福井大 2014)　　(m20142409)

0.116 次の式を満たす行列 A を求めよ．途中の過程も記載すること．

$$A\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152407)

0.117 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　　(3) ${}^t\!\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$（$t$ は転置記号）

(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$

(福井大 2015)　　(m20152420)

0.118 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が直交行列となるように $b,\ c,\ d$ を決めよ．

(福井大 2015)　　(m20152428)

0.119 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　　(m20162414)

0.120 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2016)　　(m20162415)

0.121 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　　(m20162416)

0.122 以下の (1)〜(3) に示した行列の逆行列を，それぞれ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(福井大 2018) (m20182413)

0.123 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (t:転置を表す)

(5) $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2018) (m20182428)

0.124 x の関数 $p(x)$, $q(x)$ が a, b を定数として $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で表されるとする．

ただし，i は虚数単位，e は自然対数の底である．この時，以下の問いに答えよ．

(1) $x = 0$ のとき上式を $\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = (A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表す．行列 (A) を求めよ．

(2) 上の式を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (B)\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と変形したときの行列 (B) を求めよ．

(3) (1)(2) の結果を利用し $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = (C)\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と表したとき，行列 (C) を求めよ．

(4) (C) の成分を三角関数で表せ．

(福井大 2018) (m20182429)

0.125 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018) (m20182430)

0.126 以下の行列 A の逆行列を求めよ．計算過程も明記すること．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202419)

0.127 C と D は同じサイズの正則行列であるとする．CD の逆行列 $(CD)^{-1}$ を C の逆行列と D 逆行列を用いて表すと，$(CD)^{-1}=D^{-1}C^{-1}$ となる．この理由を式を用いて説明せよ．

(福井大 2020)　　(m20202421)

0.128 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&3\\2&-4\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos y&-\sin y\\\sin y&\cos y\end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4\\2&5\\-1&6\end{pmatrix}$

(福井大 2020)　　(m20202427)

0.129 $A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ．

(福井大 2020)　　(m20202428)

0.130 $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&2\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202432)

0.131 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&1&-4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1&0&1\\5&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&1&-3\\6&-2&4\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}3&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&4\end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&0&0&2\\1&-2&-1&0\end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix}-1&5\\3&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

(福井大 2021)　　(m20212423)

0.132 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-5&6\\7&-8\end{bmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ が成り立つことを示せ．

(福井大 2021)　　(m20212424)

0.133 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212428)

0.134 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $a\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & b-a \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a-b & -a \\ a & b-a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(福井大 2022)　(m20222405)

0.135 以下に示す行列の演算を行いなさい．ただし，三角関数は数値に置き換えて算出すること．また，式中の t は転置を意味する．

$4\begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$

(福井大 2022)　(m20222406)

0.136 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(福井大 2022)　(m20222410)

0.137 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(静岡大 2009)　(m20092511)

0.138 a を実数として $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^2 - A + E = 0$ を満たすとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) A^{60} を求めよ．

(静岡大 2015)　(m20152503)

0.139 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(2) x, y, z を実数とするとき，$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ならば $x = y = z$ が成り立つことを示しなさい．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．ただし，x, y, z は実数とする．

(静岡大 2016)　(m20162503)

0.140 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(岐阜大 2001)　(m20012610)

0.141 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき, $AX = O,\ YA = O$ を満足する $3\times\ 3$ 型の行列 X, Y を，全て求めよ.

（岐阜大 2004）　(m20042606)

0.142 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を示せ．ただし．E は単位行列とする.

(2) $A^2 = A$ となる A をすべて求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ.

(岐阜大 2009)　(m20092611)

0.143 (1) 次の行列 H が正則かどうか判定せよ.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $A,\ B,\ C$ 及び $X,\ Y,\ Z,\ W$ を n 次行列とし, $A,\ B$ を正則とする．以下の問いに答えよ.

(a) $2n$ 次行列

$$P = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

の積 PQ を求めよ．ただし O は n 次零行列である.

(b) P^{-1} を $A,\ B,\ C$ を用いて表せ.

(岐阜大 2018)　(m20182601)

0.144 行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の (1) P^2 (2) P^{-1} を求めよ.

(豊橋技科大 1997）　(m19972707)

0.145 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき,

A の転置行列 ${}^tA$ と A^2 および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(豊橋技科大 1998）　(m19982711)

0.146 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の関係を満たす行列 X, Y をそれぞれ求めよ.

$$AX = YA = B$$

(豊橋技科大 1999）　(m19992707)

0.147 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A^{-1} を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 x_1 と x_2 を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解が $x_1 = 0, x_2 = 0$ 以外の解を持つように，定数 k の値を求めよ.

(4) 行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として, ADF を求めよ.

(豊橋技科大 2010)　　(m20102702)

0.148 行列を $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，次の式を計算せよ.

ア.　AC　　　　イ.　$(3C)A - C(2B)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162703)

0.149 A, B, C を同じ次数の正則行列とする．このとき，それらの積 ABC は正則行列か．もし ABC が正側であれば，その逆行列は何か.

(名古屋大 2000)　　(m20002803)

0.150 行列　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について，次の問に答えよ.

(1) 直接計算で $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を確かめよ．ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3 次単位行列である.

(2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して，帰納法で $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-2} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を証明せよ.

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^{50}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062907)

0.151 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102907)

0.152 3×3 行列 A と B は関係 $A^3 - AB = I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2) B を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112908)

0.153 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$c \neq 0$ に対して，次の 3 種類の行列

$P_i(c) : I$ の第 i 行を c 倍した行列

$P_{ij}(c) : I$ の (i,j) 成分に c を加えた行列 $(i \neq j)$

$P_{ij} : I$ の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列 $(i \neq j)$

を基本行列という．

(1) $P_i(c)A,\ P_{ij}(c)A,\ P_{ij}A$ はそれぞれ行列 A にどのような操作を加えたものといえるか述べよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) (2) の A^{-1} を基本行列の積として表せ．

(4) (2) の A を基本行列の積として表せ．

（愛知県立大 2000） (m20003003)

0.154 m は実数とする．

$A = \begin{pmatrix} m & m+3 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}$ について

(1) A が逆行列を持たないとき，A^2 を求めよ．

(2) A の逆行列が A 自身であるように，m の値を定めよ．

(三重大 2002) (m20023115)

0.155 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，x, y, z および w を求めよ．

(三重大 2003) (m20033110)

0.156 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 a , b の値を求めよ.

(三重大 2005) (m20053105)

0.157 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x-3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y+6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と，それぞれの λ について $x,\ y,\ z$ の比 $x : y : z$ を求めよ．ただし，$x,\ y,\ z$ は全ては 0 でないとする．

(三重大 2007) (m20073102)

0.158 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として，以下の設問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき，$(a+d\,,\ ad-bc)$ の値の組を全て求めよ．

(三重大 2007) (m20073111)

0.159 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき, $a+d$ および $ad-bc$ を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103117)

0.160　以下で与えられる 3 次正方実数行列 A と可換な 3 次正方実数行列 X を下記 (1)〜(3) の手順により求めなさい．ここで λ および β は任意の実数とする．

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1)　3 次単位行列 E は，任意の 3 次正方行列と可換であることを示しなさい．

(2)　行列 A を，E と以下に示す行列 F の線形結合の形で表しなさい．

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)　上記の (1) および (2) の結果を用いて，行列 A と可換な行列 X を求めなさい．

(三重大 2012)　　(m20123107)

0.161　行列に関する以下の問いに答えよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ．

(2)　上記の設問 (1) において，$C = xA + B$ とすれば，逆行列 C^{-1} が存在しない場合の x を求めよ．

(3)　次の連立方程式を満たす行列 X, Y を求めよ．

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X + 2Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(三重大 2016)　　(m20163111)

0.162　行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

(1)　A の逆行列 A^{-1}　　(2)　$2(A - 3B)$　　(3)　AB　　(4)　$(AB)^n$

(三重大 2017)　　(m20173112)

0.163　次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　　(m20223113)

0.164　２次行列 A, B を次のように定めます．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)　$AB = BA$ が成り立つことを確かめなさい．

(2)　$AC = CA$ を満たすような行列 C をすべて求めなさい．

(奈良女子大 2001)　　(m20013210)

0.165 次の行列が逆行列を持つかどうか調べなさい．持つ場合にはその逆行列を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013211)

0.166 2次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) 零行列でない2次行列 B で $AB = O$ を満たすものを求めよ．

(3) 零行列でない2次行列 C で $AC = CA = O$ を満たすものを求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023207)

0.167 2次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

に対して，$AB \neq BA$ となるための a, b, c の条件を求めよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033208)

0.168 3次の正方行列 A, S を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) AS を求めよ．　　(2) AS^2 を求めよ．

（奈良女子大 2004）　　(m20043208)

0.169 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．また，2次の単位行列を E とおく．次の問に答えよ．

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ．ただしここで，${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である．

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ．

(3) 実数 θ, θ' に対し，$A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ．

(奈良女子大 2006)　　(m20063204)

0.170 3次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ c は実数 ）に対して次の問いに答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．　　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$, $A^3\boldsymbol{a}$ を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が二つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるときの c の値を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073201)

0.171 次の行列の逆行列を求めよ．ただし，a, b, c, d は実数であり，$ad - bc \neq 0$ である．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008)　　(m20083204)

0.172 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ （k は実数）に対して次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2, A^3 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるとき, k の値を求めよ.

(奈良女子大 2010) (m20103201)

0.173 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合で表せ.

(奈良女子大 2011) (m20113201)

0.174 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

と, ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ. ただし, a は実数である.

(1) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_3$ が一次従属となるときの a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a の値に対し,

$$A^{2n-1} = (-2)^{n-1}A$$

が成り立つことを示せ. ただし, n は 1 以上の整数である.

(奈良女子大 2012) (m20123206)

0.175 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と, ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ. ただし a は実数である.

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_1$ が一次従属となるときの a の値を求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133201)

0.176 ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交することを示せ.

(2) 3つのベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立でないことを示せ,

(3) 3次正方行列 A に対して $A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき，$A\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．さらに $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき，A を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173201)

0.177 行列 A, B, C が $A \cdot B$, $B \cdot C$ が各々の行と列が与えられるように定義されているとき，以下の問いに答えよ.

(1) $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ が定義されていることを示せ.

(2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ を証明せよ．ただし，A^T は転置行列である.

(3) (2) を用いて $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ を証明せよ.

(京都大 1996) (m19963303)

0.178 A を n 次の正方行列とし，$E + A$ が正則行列であるとする．ここで，E は単位行列である．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ.

(1) 等式 $(E - A)(E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $E + {}^tA$ は正則であることを示し，逆行列 $(E + {}^tA)^{-1}$ を，$(E + A)^{-1}$ を使って表せ．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(3) A が交代行列（つまり，${}^tA = -A$）ならば，$(E - A)(E + A)^{-1}$ は直交行列であることを証明せよ．ただし，ある行列 B が直交行列であるとは，${}^tB\,B = B\,{}^tB = E$ であることをいう.

(京都大 2012) (m20123304)

0.179 A, B, C, D は各々$n \times n$ 実行列であり，D は正則であるとする．また，M は

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

として定義する $2n \times 2n$ 実行列である．M が正則であるとき，次の (1)〜(3) に答えよ.

(1)

$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

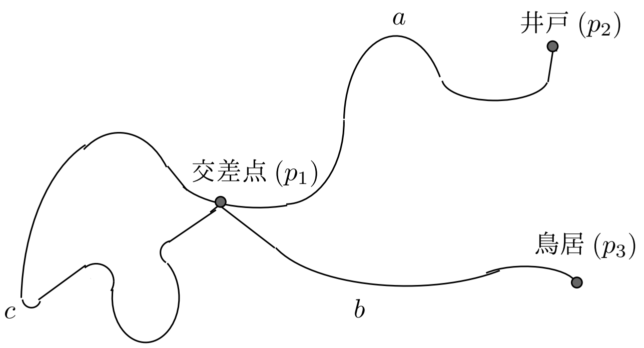
を満たす $n \times n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ．ここに，I は $n \times n$ 単位行列, 0 は $n \times n$ ゼロ行列である.

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ.

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ.

(京都大 2015)　　(m20153304)

0.180



上の図はある村の略図を表す．この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)，井戸 (p_2)，鳥居 (p_3) がある．p_1 と p_2 は道 a で結ばれており，p_1 と p_3 は道 b で結ばれている．また，p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる．道 a, b, c の長さはいずれも 1 とする．

二つの場所 x と y があるとき（ただし，このとき一般に $x = y$ の場合も許す），x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする．場所 x から場所 y に至る経路は，場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる．また，ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ．たとえば，p_2 から道 a を通り p_1 に移動し，さらに道 b を通って p_3 に至る経路は．記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ b,\ p_3)$ で表すことができ，この経路の長さは 2 である．また，記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ c,\ p_1,\ a,\ p_2)$ は長さ 3 の経路を表す．後者の例のように，経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い．

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として，直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより，この村の場所と道は，次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる．この行列を隣接行列と呼ぶ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は，p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す．たとえば，第 1 行第 1 列成分の値 3 は，p_1 から p_2 に到達する $(p_1,\ c,\ p_1,\ c,\ p_1)$，$(p_1,\ a,\ p_2,\ a,\ p_1)$，$(p_1,\ b,\ p_3,\ b,\ p_1)$ という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す．

問 1〜問 3 に答えよ．

(1) A^3 を求めよ．

(2) A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ．

(3) A^n を求めよ．（ n は 1 以上の自然数である．）

(京都大 2017)　　(m20173304)

0.181　次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(京都大 2019)　　(m20193301)

0.182 3次元ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて，$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ^t \mathbf{x} A \mathbf{y}$ と定める．ここで $^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表す．

(1) A の逆行列 B を求めよ．

(2) 任意の3次元ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して，$f(\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = f(C\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たす3次正方行列 C を求めよ．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003409)

0.183 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013408)

0.184 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような実数 x の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023408)

0.185 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，A^2，A^3 および，$E - A$ の逆行列 $(E - A)^{-1}$ を求めよ．
ただし，E は3次の単位行列である．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023409)

0.186 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ x & -x & 4 \end{pmatrix}$ に対して，行列の積 AB を求め，次に AB の行ベクトルが1次従属となるように x を定めよ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033409)

0.187 一般に3次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ とおく．

$\mathrm{tr}(X)$ を X のトレースという．$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{tr}(X)$ の値を求めよ．

(2) 任意の3次正方行列 X のたいして，$\mathrm{tr}(XA) = \mathrm{tr}(AX)$ となることを証明せよ．

(3) $AX - XA = A$ となる3次正方行列 X は存在しないことを証明せよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133401)

0.188 $\mathbb{R}^2$ は2次元実数列ベクトルの集合とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\boldsymbol{x}|$ とし，実数を成分とする2次の正方行列 B に対して

$$||B|| = \max_{|\boldsymbol{x}|=1} |B\boldsymbol{x}|$$

と定める．$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$||B||$ の値を求めよ．また，その値を与える $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163501)

0.189　以下の問いに答えよ．ただし，A_n は n 次の実正方行列を，${A_n}^T$ は A_n の転置行列を表す．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & p & 0 \end{pmatrix}$ が正則ではないとき，実数 p の値を求めよ;

(2) ${A_3}^T = -A_3$ である A_3 を任意の実数 a, b, c を用いて表し，正則かどうかを判定せよ．

(3) ${A_n}^T = -A_n$ である A_n が正則かどうかを判定せよ．ただし，n は 5 以上の奇数であるとする．

(大阪大 2022)　　(m20223501)

0.190　行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. ここで, a, b, c, d は実数である.

このとき, 実数 a, b, c, d がどのような条件を満たせば，$AB = BA$ が成立するか.

(大阪府立大 2010)　　(m20103605)

0.191　次の各行列が逆行列をもつかどうかを判定しなさい. また, 逆行列をもつ場合, それを求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2010)　　(m20103610)

0.192　次の行列が逆行列を持つ場合は，逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a \\ b & b+c & b+1 \end{bmatrix}$

(大阪府立大 2011)　　(m20113611)

0.193　A を n 次正方行列，E を n 次単位行列，O を n 次零行列とする（n は 2 以上の整数）．

(1) $A^2 - 2A + E = O$ のとき，$A - E$ は正則でないことを示せ．

(2) $A^2 - 2A + E = O$ のとき，$A - 2E$ は正則であることを示せ．

(3) $A^3 - 3A^2 + A + E = O$ のとき，$A - 2E$ の逆行列を A^2, A, E の式として表せ．

(大阪府立大 2018)　　(m20183607)

0.194　行列　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$　について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (= rank) r を求めよ．

(2) B の 4 個の列ベクトルから r 個の 1 次独立ベクトルの取り出し方は何通りあるか求めよ．ただし，r は (1) で求めた r である．

(関西大 2003)　　(m20033703)

0.195 $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ n は任意の整数）を示せ.

(2) $AT^n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ とするとき， $0 < d_1 < |\, c_1 \,|$ をみたす n を求めよ.
（以下の (3)，(4) ではこの n を使う）

(3) $AT^nST^m = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とするとき， $d_2 = 0$ となる m を求めよ.

(4) A を S と T を用いて表せ.

(神戸大 1998） (m19983805)

0.196 xy 平面 $\mathbf{R}^2$ 上に x 座標が互いに相異なる 4 点 (u_i, v_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ が与えられたとき，関数

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

のグラフがこの 4 点を通るような実数 A, B, C, D がただ一つ定まることを示せ.

(神戸大 2000) (m20003803)

0.197 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．また A が正則であれば，その逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（神戸大 2001） (m20013808)

0.198 A を，対角成分 $a_1, \cdots, a_n$ が相異なる n 次実対角行列とする．このとき $AX = XA$ を満たす $n \times\ n$ 実行列 X をすべて求めよ.

(神戸大 2003) (m20033808)

0.199 a, b, c, d を $ad - bc = 1$，$0 < |c| < 1$ を満たす実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A\,,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1 - |c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053804)

0.200 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする：$ad - bc = 1$．A のトレース $a + d$ を t とする：$t = a + d$．このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ．ここで，I は単位行列を表す．ただし，$A \neq \pm I$ と仮定しておく．さらに，$t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき，それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ．

(神戸大 2006)　　(m20063801)

0.201 (1) 3 次の正方行列 A について，$\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば，ある 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と 3 つの実数 x_1, x_2, x_3 が存在して，$A = (x_1\boldsymbol{a} \quad x_2\boldsymbol{a} \quad x_3\boldsymbol{a})$ と書けることを示せ．

(2) 3 次の正方行列 A, B が $\mathrm{rank}(A) \leq 1$, $\mathrm{rank}(B) \leq 1$ を満たすならば，$A + B$ は正則でないことを示せ．

(神戸大 2008)　　(m20083805)

0.202 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ が存在し，$(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ．

(神戸大 2008)　　(m20083807)

0.203 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，A^n を求めよ．（答えのみでよい）．

(2) $S_n = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093806)

0.204 次の行列 X, Y の逆行列をそれぞれ求めよ（a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.）

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2011)　　(m20113801)

0.205 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3, A^4 を求めよ．

(2)

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_n E + y_n A$ とするとき,

$$B = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)E + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)A$$

を求めよ．ここで E は単位行列を表す.

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ.

(神戸大 2015)　　(m20153803)

0.206 (i, j) 成分 a_{ij} が“$i < j$ のとき $a_{ij} = 0$”を満たすとき，その行列を下三角行列といい，さらに逆行列を持つとき可逆な下三角行列という．2 つの行列 X, Y について $Y = GX$ となる可逆な下三角行列 G が存在するとき $X \sim Y$ と表す．次の問に答えよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる x を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ.

(3) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を a_{ij} たちの有理式として表せ.

(神戸大 2017)　　(m20173804)

0.207 A を n 次実正方行列とする．単位行列，零行列をそれぞれ $E,\ O$ で表す

(1) $A^m = E$ となる正整数 m が存在すれば，A は正則行列であることを示せ.

(2) $A^m = O$ となる正整数 m が存在すれば，A は非正則行列であることを示せ.

(3) $A^m = O$ となる正整数 m が存在するとき，$E - A$ は正則であることを示せ．また このとき，$E - A$ の逆行列を A で表せ.

(神戸大 2022)　　(m20223807)

0.208 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，$2(A + B) + X = A + 3B$ となる行列 X を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053908)

0.209 $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ について，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053909)

0.210 n 次の対称行列 $A,\ B$ に対して, AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ.

(鳥取大 2005)　　(m20053910)

0.211 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ のとき， $X+Y=A$，$X-Y=B$ となる行列 X, Y を求めよ．

(鳥取大 2006)　　(m20063906)

0.212 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ．なお ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列を意味する．

(鳥取大 2006)　　(m20063907)

0.213 正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき A は交代行列であるという．A が対称行列であり交代行列でもあるとき, $A = O$（零行列）であることを示せ．

(鳥取大 2006)　　(m20063908)

0.214 次の行列 A に対して $A = X + Y$ となる対称行列 X と交代行列 Y を求めなさい．

（行列 M の転置行列を M' で表すとき, 対称行列とは $M = M'$ となる行列で, 交代行列は $-M = M'$ となる行列である．交代行列の対角成分は 0 である．交代行列は歪対称行列とも呼ばれる）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2006)　　(m20063912)

0.215 2 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073916)

0.216 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $A^2 - 5A + 6E$ を計算せよ. ただし E は単位行列を表す.

(2) 整式 $f(x) = x^8$ を 2 次式 $g(x) = x^2 - 5x + 6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とおく. このとき $f(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ たちが満たす関係式を述べよ. また $Q(x)$ と $R(x)$ の次数はいくつか？

(3) (1) の行列 A に対して A^8 を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054001)

0.217 行列 X の階数を $\mathrm{rank}(X)$ と表すことにする．A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ.

(1) 不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(B)$$

を示せ．また，A が正則ならば等号が成立することを示せ.

(2) $AB = O$（ゼロ行列）のとき，不等式

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leqq n$$

を示せ.

(3) $n=3$ とし，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．B の階数を求めよ．さらに

$$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)-2$$

を満たす A は存在しないことを示せ.

(岡山大 2013)　　(m20134004)

0.218 行列 P の転置を ${}^tP$ と表す．n 次正方行列 P が ${}^tP=P$ を満たすとき対称行列といい，${}^tP=-P$ を満たすとき交代行列という．次の問いに答えよ．

(1) n 次正方行列 A に対して，次を示せ．

$$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA),\quad C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$$

とおくとき，B は対称行列，C は交代行列である．

(2) 次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001)　　(m20014109)

0.219 行列と複素数に関する次の問いに答えよ．

(1) 実数成分をもつ次の行列　　$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

は $a=b=0$ でない限り正則である（逆行列をもつ）ことを示せ．

(2) A にその $(1,1)(2,1)$ 成分から構成された複素数 $a+ib$ $(i^2=-1)$ を対応させる．このとき，行列の積，逆行列には複素数の積，逆数がそれぞれ対応することを示せ．

(広島大 2003)　　(m20034107)

0.220 (1) P は $P^2=P$ を満たす $n\times\ n$ 実行列とする. $Q=I-P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ=QP=O \qquad Q^2=Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V=\{P\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}$, $W=\{Q\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v}\in V\ ,\quad \boldsymbol{w}\in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005)　　(m20054106)

0.221 次の $4\times\ 4$ 行列の逆行列が存在しないための条件を求めよ．ただし，x は実数とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(広島大 2008)　　(m20084108)

0.222 $(m+n)$ 次正則行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ {}^tQ & R \end{bmatrix}$$

のように区分されているとする．ただし，P は m 次正方行列，Q は $m\times\ n$ 行列，R は対称な n 次正則行列，${}^tQ$ は Q の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(m+n)$ 次正方行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} E_m & -QR^{-1} \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，E_k は k 次単位行列，O はすべての成分が 0 である $n\times\ m$ 行列とする．このとき，行列 M は正則行列であることを示せ.

(2) $MA\,{}^tM$ を $B = P - QR^{-1}\,{}^tQ$, O, ${}^tO$, R を用いて表せ.

(3) $|A| = |B||R|$ となることを示せ.

(4) $(MA\,{}^tM)^{-1}$ を求め,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}QR^{-1} \\ -R^{-1}\,{}^tQB^{-1} & R^{-1} + R^{-1}\,{}^tQB^{-1}QR^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを示せ.

(広島大 2010)　　(m20104105)

0.223 λ を実定数とし，3 次実正方行列 A, B を次で定める．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．ただし，3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは，$XY = YX$ が成り立つことである.

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ.

(広島大 2012)　　(m20124101)

0.224 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) A の逆行列が存在する条件を求めよ.

(2) (1) が満たされるとき，A の逆行列を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144104)

0.225 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & m \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & n \end{bmatrix}$ が直交行列となるように，m, n を定めよ.

(広島大 2016)　　(m20164108)

0.226 次の行列を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$　　ただし，n は自然数とする.

(広島大 2021)　　(m20214109)

0.227 A, B を 3 次正方行列とし，それぞれの (i, j) 成分（第 i 行と第 j 列の交点にある成分）を a_{ij}, b_{ij} とする $(i,\ j = 1, 2, 3)$．また，(i, i) 成分を対角成分とよび $(i = 1, 2, 3)$，3 次正方行列 X の対角成分の総和を $tr(X)$ と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $C = AB$ とおく．C の (i, j) 成分を c_{ij} と書くとき，c_{ij} を A と B の成分を用いて表せ.

(2) $tr(AB) = tr(BA)$ を示せ.

(3) P を正則な 3 次正方行列，Q を 3 次正方行列とする．$tr(P^{-1}QP) = tr(Q)$ を示せ.

(広島市立大 2001)　　(m20014204)

0.228 A を行数 m，列数 n の行列とし，B を行数 s，列数 t の行列とする．以下の条件を満たすときの m, n, s, t の関係をそれぞれ答えよ．

(1) 積 AB が定義可能である.

(2) 積 AB および BA が定義可能であり，等式 $AB = BA$ が成り立つ.

(広島市立大 2002)　　(m20024205)

0.229 n を 1 以上の整数とする．A, B を n 次正方行列とし，E を n 次単位行列とする．A^k は A の k 個の積を表し，A^0 は E を表すものとする．

(1) $A^k = E$ となる 1 以上の整数 k があれば，A の逆行列は A^{k-1} であることを示せ.

(2) a を 0 でない実数とする．$AB = aE$ であるならば，$AB = BA$ であることを示せ.

(広島市立大 2006)　　(m20064204)

0.230 次の行列に対し，P が正則ならば Q も正則であることを示せ.

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ c & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

(広島市立大 2007)　　(m20074203)

0.231 転置行列が逆行列となる正方行列を直交行列という. 以下の問いに答えよ.

(1) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

(2) A, B を n 次正方行列とｓる. このとき $2n$ 次正方行列 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であれば, A は直交行列であり，かつ B は正則行列でないことを示せ. ただし, O は n 次の零行列を表す.

(広島市立大 2010)　　(m20104206)

0.232　行列 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について

(1)　逆行列 $A(\theta)^{-1}$ を求めなさい．

(2)　$A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ を示しなさい．

(3)　$A(\theta)A(-\theta) = I$（I は単位行列）を示しなさい．

(山口大 2002)　　(m20024303)

0.233　$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．

（山口大 2004）　　(m20044308)

0.234　次の問いに答えよ．

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような a を求めよ．

(2)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \dfrac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような $a,\ b,\ c$ を求めよ．

(3)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154401)

0.235　３次元数ベクトル e_1, e_2, e_3（基本ベクトル）および a, b, c を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

できめる．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1)　実数を成分にもつ３次正方行列 A が，

$$Aa = e_1,\quad Ab = e_2,\quad Ac = e_3$$

を満たすとする．このとき，A, A^{-1} を求めなさい．

(2)　実数を成分にもつ３次正方行列 B が，

$$Ba = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Bc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき，B を求めなさい．

（高知大 2001）　　(m20014504)

0.236　次の問に答えよ. ただし, I は n 次単位行列, O は n 次零行列である.

(1) n 次正方行列 A に対して, $(I-A)B = I - A^4$ を満たす B を一つ求めよ.

(2) $A^4 = O$ を満たす n 次正方行列 A に対して, $I - A$ の逆行列を求めよ.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, X^k $(k \geq 2)$ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2005) (m20054504)

0.237 $M_3(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．また,

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \neq O,\ AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C \neq O,\ CA = O\}$$

と定義する．ただし，O は 3 次零行列を表す．今，$\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A は正則でないことを示せ.

さらに， $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$ としたときに，次の (2)〜(4) に答えよ,

(2) a の値を求めよ.

(3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ.

(4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ．ただし，${}^tQ$ は Q の転置行列を表す.

(高知大 2007) (m20074504)

0.238 4 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2012) (m20124505)

0.239 4 次の正方行列 A が 2 次の正方行列 P, Q, R を用いて

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}$$

のように表されているとする．ただし，O_2 は $2\times\ 2$ の零行列である．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A が正則なら，P, R も正則であることを示せ.

(2) P, R は正則であるとする．このとき

$$A\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

が 4 次の単位行列と等しくなるような 2 次の正方行列 X を，P, Q, R を用いて書き表せ.

(3) 次の 4 次の正方行列 B の逆行列を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2015)　　(m20154503)　　大 2015)

0.240 A を正方行列とし，${}^tA$ で A の転置行列を表すものとする．

(1) $A + {}^tA$ は対称行列，$A - {}^tA$ は交代行列であることを示せ．

(2) 任意の正方行列は対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ．

ただし，$A = {}^tA$ をみたす正方行列を対称行列，$A = -{}^tA$ をみたすものを交代行列という．

(愛媛大 2004)　　(m20044608)

0.241 A, B を 2 次の正方行列, また O を零行列, E を単位行列とする. 次の (1), (2), (3) は正しいか? 正しければ証明し, 正しくなければ反例（成り立たないような A, B の例）をあげよ.

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ が成り立つ.

(2) $AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ である.

(3) $A^2 + 2A - E = O$ が成り立てば A は正則行列である.

(愛媛大 2005)　　(m20054606)

0.242 2 次正方行列 A が任意の 2 次正方行列と可換であるとき，A はどのような行列か？

ただし，2 つの行列 A, B について $AB = BA$ がなりたつとき，A と B は可換であるという．

(愛媛大 2006)　　(m20064609)

0.243 a, b, c を実数とし，行列

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ b & 0 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 \\ 3 & -c & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 行列 AB を求めよ.

(2) 行列 $C\,{}^tD$ を求めよ．ただし，${}^tD$ は D の転置行列を表す.

(3) $AB = C\,{}^tD + F$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074607)

0.244 a, b, c を実数とし，行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-2b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ で定める.

(1) $AB + C$ を求めよ.　　(2) $AB + C$ が対称行列となるとき，a, b, c の値を求めよ.

(3) $({}^tB)C = ({}^tC)B$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表し，${}^tC$ は C の転置行列を表す.

(愛媛大 2008)　　(m20084601)

0.245　次の行列の積を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(愛媛大 2021)　　(m20214605)

0.246　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい.

(3) 4 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい.

(九州大 2006)　　(m20064707)

0.247　次の 4 次正方行列 A の逆行列を求めよ.　$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(九州大 2007)　　(m20074712)

0.248　n_1, n_2 を自然数, $n = n_1 + n_2$ とする．$n \times n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする．ただし，一般に，C_{ij} は $n_i \times n_j$ 行列，O_{ij} は零行列，I_{ii} は単位行列で，添え字の T は転置をとることを意味する.

A_{11} は正則行列であるとして，次の問いに答えよ.

(1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ.

(2) A が正定値なら A_{11}, B_{22} も正定値であることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084714)

0.249　一般に, n 次正方行列 A の (i, j) 成分を $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n\ ;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ とするとき, A のトレース：$tr[A]$ を, $tr[A] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ によって定義する. また, ${}^tA$ は A の転置行列を表すとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 B の (i,j) 成分を $b_{ij}(i=1,2,3\,;\ j=1,2,3)$ とする. このとき, ${}^tB$ と B の積 : ${}^tBB$ の (i,j) 成分を, B の成分で表せ.

(2) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 B に対して, $tr[{}^tBB]=0$ ならば $B=O$ であることを示せ. ただし, O は零行列を表す.

(3) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 C に対して,「${}^tC=C$ かつ $tr[C^4]=0$」ならば $C=O$ であることを示せ.

(九州大 2010)　　(m20104712)

0.250　次の行列 A, B について, 以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & c \end{pmatrix}$$

(1) A の階数が 1 となる条件, 2 となる条件をそれぞれ求めよ.

(2) AB が正則であるための条件を求めよ.

(3) BA の逆行列が存在するならその条件を求めよ. 存在しないならその理由を述べよ.

(九州大 2014)　　(m20144701)

0.251　a を $a\neq 0$ なる実数として, 4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194710)

0.252　n 次単位行列を E，すべての成分が 1 である n 次正方行列を J で表す．a,b は正の実数として，$A=aE+bJ$ とおく．$\mathbf{x}$ は n 次元列ベクトル（縦ベクトル）で，その第 i 成分を x_i とする $(i=1,2,\cdots,n)$. 次の問に答えよ．

(1) J^2 および $J\mathbf{x}$ を求めよ．

(2) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を未知数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ （零ベクトル）の解は $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のみであることを証明せよ．ただし，<u>A の逆行列が存在することを用いずに示すこと</u>．

(3) A の逆行列は $sE+tJ$ の形で与えられることがわかっている（s,t は実数）．これを用いて，A の逆行列を求めよ．

（九州芸術工科大 2000）　　(m20004805)

0.253　以下に答えよ．

(1) 次の行列が直交行列になるような a,b,c の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，次式を満たす x, y, z を求めよ．

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（九州芸術工科大 2000） (m20004806)

0.254 E を 4 次単位行列とし，A を $A^2 = O$ (O は零行列) なる 4 次正方行列とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 行列 $E + A$ が逆行列を持つことを示し，その逆行列が $E - A$ で与えられることを示せ．

(2) 上の問 (1) を利用して，次の行列 B の逆行列を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ただし，a,b,c　は定数とする．

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

0.255 以下が成り立つことを示せ．

(1) A が正則のとき，$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$．

(2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され，$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるとき，自然数 n に対して，$P^{-1}A^nP = D^n$．

(3) 正方行列 A, B に対し $AB = A, BA = B$ のとき自然数 n に対して，$A^n = A$．

（九州芸術工科大 2001） (m20014806)

0.256 (1) 正方行列 C の対角成分の和を $\mathrm{tr}(C)$ と記す，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ．

(2) $AB = BA$，また，C が直交行列であるとき，${}^tCAC$ と ${}^tCBC$ の積が交換可能であることを示せ．

(3) n 次の正則な正方行列 A, B に対して，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ．

(九州芸術工科大 2003) (m20034805)

0.257 E を 3 次単位行列とし, A , X , Y を 3 次正方行列で

$$AX = E, \quad YA = E$$

を満たすものとする. このとき, $X = Y$ となることを証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054804)

0.258 以下の問に答えよ. ただし, ${}^tC$ は行列 C の転置行列, $\mathrm{tr}(C)$ は正方行列 C の対角成分の和を表す.

(1) 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して, AB の第 i 行第 j 列の要素がどのように表せるか示せ.

(2) 正方行列 A, 正則行列 P に対して, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)$ =$\mathrm{tr}(A)$ となることを示せ.

(3) $m\times$ n 行列 A に対し $\mathrm{tr}(A{}^tA)$ =$\mathrm{tr}({}^tAA)$ であることを示せ.

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054808)

0.259　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054810)

0.260　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次のものを計算せよ.

(1)　$A + B$　　　　(2)　$B\ {}^tA$

(佐賀大 2003)　　(m20034924)

0.261　次の行列 $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ に関して，行列の計算を行え.

ただし，^{t} は転置，C^{-1} は逆行列を表す.

また，行列の演算が約束されていないものについては‘不能’とかくこと.

(1)　$A + B$　　(2)　AB　　(3)　$(A^t)B$　　(4)　$A(B^t)$　　(5)　C^{-1}

(佐賀大 2003)　　(m20034925)

0.262　正則行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を A^{-1} とするとき, A と A^{-1} の関係式を書け．また A^{-1} を求めよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044927)

0.263　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を A^{-1} を求めよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044928)

0.264　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とする．積 AB, BA が定義できるならば，それを計算せよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064919)

0.265　行列　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　について,

(1)　$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ を示せ.　　(2) (1) を利用して，$\boldsymbol{A}^{-1}$ および $\boldsymbol{A}^{-2}$ を求めよ.

ここで，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ は，それぞれ単位行列，零行列，$\boldsymbol{A}$ の逆行列である．また，$\boldsymbol{A}^{-2} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^2$ である.

(佐賀大 2007)　　(m20074920)

0.266　$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$,　$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき，AB および B^TB を求めよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094926)

0.267　次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2010) (m20104905)

0.268 次の行列は対角化可能か. 対角化が可能ならば対角化し, 不可能ならばその理由を述べよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$

(2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2010) (m20104906)

0.269 行列 $A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $|A|$（A の行列式）を求めよ.

(2) A^{-1}（A の逆行列）を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_3$ の内積を求めよ.

(4) $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

(5) $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて表せ.

(佐賀大 2010) (m20104922)

0.270 $\boldsymbol{A}(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき, 次の等式が成り立つことを示しなさい.

(1) $\boldsymbol{A}(\theta)^{-1}=\boldsymbol{A}(-\theta)$ (2) $\boldsymbol{A}(\alpha+\beta)=\boldsymbol{A}(\alpha)\boldsymbol{A}(\beta)$

(佐賀大 2012) (m20124915)

0.271 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であるか確かめ, 正則であれば逆行列を求めなさい.

(佐賀大 2012) (m20124917)

0.272 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2013) (m20134908)

0.273 3 次元正方行列 A を $A=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^2, A^3 を計算し，一般に $n \geq 1$ について A^n の形を推定せよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134913)

0.274 $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき AB および $B^T B$ を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134921)

0.275 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求め，A^3, A^4 を計算せよ.

(佐賀大 2014)　　(m20144916)

0.276 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ

(1) $AX = 0$ を満たす 2 次正方行列 X をすべて求めよ.

(2) $AX = XA = 0$ を満たす X をすべて求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154921)

0.277 次の行列が直交行列となるように，a, b, c を決めよ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & b & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ c & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154924)

0.278 次の行列 A, B について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 AB の積を求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164918)

0.279 次の行列 A, B, C について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A + B$ を求めよ.

(2) $A^T B$ を求めよ.

(3) C の逆行列を求めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174904)

0.280 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

(1) ${}^t\!AA$ を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018) (m20184914)

0.281 (1) 平面上のベクトル $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を求めよ．

(2) 行列 A を n 次正方行列，行列 I を n 次単位行列とするとき，つぎを求めよ．

$$\begin{bmatrix} I-A & A \\ -A & I+A \end{bmatrix}^3$$

(佐賀大 2022) (m20224903)

0.282 行列 A, T を $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし, ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. また, t を $t \geq 0$ の実数とし, 指数関数 e^{-3x} , e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ とする. これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{x}(t) = TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする. この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい.

(2) $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$ とする. このとき

$$J = \int_0^\infty y(t)^2 dt$$

を求めなさい.

(3) 行列 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p, q, r を用いて未知の対称行列を $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA + A^T P = -Q$$

を満足するように決定し, $W = \boldsymbol{s}^T P \boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す. （長崎大 2004） (m20045011)

0.283 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2005) (m20055021)

0.284 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と $f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ について考える． また $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

ある多項式 $g(x)$ を与えられた $f(x)$ で割ったときの商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とする．このとき，$f(x)$ が 2 次式であることより，余り $r(x)$ は，未定の係数 a, b を用いて $r(x) = ax + b$ とおくことができ，さらに，$g(x)$ について

$$g(x) = f(x)q(x) + ax + b \qquad ①$$

が成立する．以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の x に行列 A を代入した $f(A) = A^2 - 6A + 5I$ を求めなさい.

(2) n を正の整数とし，$g(x) = x^n$ とする．このとき，① 式を満足する a, b を n で表しなさい.

(3) (2) の a, b および ① 式を利用して，正の整数 n に対して A^n を求めなさい．（A^n の各要素を n で表しなさい.）

(長崎大 2008)　　(m20085003)

0.285 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする. 0 以上の整数 n に対して，A のべき乗 A^n を考える．このとき以下の問いに答えなさい．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数とする．また，$n = 0$ に対して，$A^0 = I$ とする.

(1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい.

(2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい.

(3) 行列 T_n を次式で定義する．このとき，$(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい.

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい.

(長崎大 2009)　　(m20095002)

0.286 行列 A, B が与えられている.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $C = A + B$ における，行列 C の $(1, 1)$ 要素の値

(2) $C = A \times B$ における，行列 C の $(1, 1)$ 要素の値

(3) 行列 A の行列式 $|A|$

(4) 行列 A の逆行列

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

(長崎大 2009)　　(m20095004)

0.287 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$ を行列を用いて表わせ.

(長崎大 2010)　　(m20105017)

0.288 次式で与えられるベクトルと行列に対して，積が定義できる組を選びその積を求めよ.

ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(長崎大 2011)　　(m20115013)

0.289 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011)　　(m20115021)

0.290 n 次の実正方行列 A について，${}^tAA = E$ が成り立つとき，A は n 次の直交行列であるという．ここで，${}^tA$ は A の転置行列，E は n 次の単位行列だある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば，AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ．

(2) 2 次の直交行列 A は次の 2 つの行列のいずれかの形をしていることを示せ．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2004)　　(m20045203)

0.291 下記の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(熊本大 2019)　　(m20195202)

0.292 行列 $[A] = \begin{bmatrix} a & 10 & 2 \\ b & 5 & 1 \\ 15 & c & 5 \end{bmatrix}$ $(a, b, c$ は実数$)$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $[A]$ が正則となる条件を，a, b, c を用いて表せ．

(2) 行列 $[A]$ が正則でないのは，平面上の三直線

$$l_1 : ax + 10y = 2 \qquad l_2 : bx + 5y = 1 \qquad l_3 : 15x + cy = 5$$

に対して，どのような場合か．この場合の a, b, c の値を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015415)

0.293 次の行列 $[A]$ とベクトル $\{C\}$ が次のように与えられているとき，$[A][A], [A]\{C\}$ を求めよ．

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \{C\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

（鹿児島大 2001）　　(m20015416)

0.294 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A と B が可換（すなわち $AB = BA$）であるように a, b の値を定めよ．このとき $C = (AB)^2 - A^2B^2$ の値を求めよ．

（鹿児島大 2001）　　(m20015417)

0.295 行列 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ が $[A]^2 - 4[A] + 5[I] = [O]$ を満たすとき，

$[A]^5$ および $[A]^{-1}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [O] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

（鹿児島大 2001）　　(m20015418)

0.296 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}\ (3,-1,-2)$ とベクトル $\boldsymbol{b}\ (2,4,1)$ があるとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は直交しているかどうかを説明しなさい. また, $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, 行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ があるとき, $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ を求めなさい.

(鹿児島大 2005) (m20055408)

0.297 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ のとき,

次の行列をそれぞれ求めなさい．ただし右肩の T は転置記号，-1 は逆行列記号である．

(1) $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{AB})^T$, (2) $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{BA})^T$, (3) $\boldsymbol{X}^{-1}$, (4) $\boldsymbol{Y}^{-1}$

(鹿児島大 2006) (m20065408)

0.298 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ のとき，AC, BC, BA を求めなさい.

(鹿児島大 2007) (m20075405)

0.299 次の行列を計算しなさい.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 9\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}^{-1}$

(鹿児島大 2007) (m20075411)

0.300 2 行 2 列の行列 $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ がある.

(1) J の逆行列を求めなさい.

(2) $A^TJA=J$ を満たすとき，AJA^T を求めなさい．但し，A^T は A の転置行列である.

(鹿児島大 2008) (m20085408)

0.301 行列 A, P を次の様にする時，以下の問いに答えなさい.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

(1) $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(2) (1) の結果を用いて，A^n を求めなさい．（n は正の整数.）

(鹿児島大 2009) (m20095406)

0.302 (1) n 次行列 P が $P^TP=I$ を満たし, $P+I$ は正則であり, I は n 次単位行列であるとする. ここで P^T は P の転置行列である. このとき, $A=(P-I)(P+I)^{-1}$ に対し, $A(I+P^T)=(I-P^T)$ が成り立つことを示せ.

(2) $A(I+P^T)=(I-P^T)$ の両辺の行列を転置することで, $A^T=-(I+P)^{-1}(P-I)$ が成り立つことを示せ.

(3) 前問の結果を利用して, $A^T=-A$ が成り立つことを示せ.

(鹿児島大 2010) (m20105405)

0.303 2 つの行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めなさい.

(2) $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n$（$n$：整数）を求めなさい.

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい.

(鹿児島大 2010)　　(m20105408)

0.304 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2011)　　(m20115406)

0.305 以下の問いに答えなさい．なお，一般の 2 × 2 の正方行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$\boldsymbol{A}^2 - (a+d)\boldsymbol{A} + (ad-bc)\boldsymbol{E} = 0$ が成り立つこと（ハミルトン・ケーリーの定理）を参考にしても構いません.

(1) 行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ が成り立つとする．$a + d = 1$ のとき，$ad - bc$ の値を求めなさい.

(2) 行列：$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{B}^2$，$\boldsymbol{B}^3$，$\boldsymbol{B}^{100}$ を求めなさい.

(鹿児島大 2011)　　(m20115411)

0.306 行列 $A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，行列 $B = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ がある．このとき，以下の各問に答えよ.

(1) AB ならびに BA を求めよ.

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，$D = 2BA - C$ とするとき，D を求めよ.

(3) n を正の整数，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ とするとき，$D^n\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ.

(4) $R = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し，β を求めよ．また，このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125404)

0.307 2 × 2 の正方行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある．$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，$\boldsymbol{O}$ は零行列を表わす.

(1) $ad - bc$ の値と，その値を導出した過程を示しなさい.

(2) $a + d$ の値と，その値を導出した過程を示しなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125413)

0.308 次の行列の積を計算しなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$　　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$

(鹿児島大 2012)　　(m20125427)

0.309 以下に示す行列 A の逆行列 A^{-1} を求め，つぎに，AA^{-1} が単位行列となることを計算で示しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2012)　　(m20125431)

0.310 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$ を用いて，次の行列積を計算しなさい.

① AB　　② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし，ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする.

(鹿児島大 2014)　　(m20145403)

0.311 $[A]$, $[B]$, $[C]$ を n 次正方行列とし,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする．次の問いに答えなさい.

(1) n を 3 とするとき，$[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の 1 行 1 列の成分を計算しなさい.

(2) n を任意の自然数とするとき，$[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の i 行 j 列の成分を $\sum$ 記号で表しなさい．ただし，i, j は，n 以下の自然数とする.

(3) n を任意の自然数とするとき，$[A]\big([B]+[C]\big) = [A][B]+[A][C]$ が成り立つことを証明しなさい.

(鹿児島大 2014)　　(m20145419)

0.312 次のように行列 A が定義されている．A^6 を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -a & \dfrac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155410)

0.313 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が，逆行列と転置行列の等しい直交行列（$A^T = A^{-1}$）であることを示せ.

(鹿児島大 2015) (m20155415)

0.314 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ が正則であるかどうかを調べよ.

(2) $x-y$ 平面上において，次に示す三直線の交点の座標 (x, y) を求めよ.

$l_1:\ x+y=5$

$l_2:\ x+2y=-1$

$l_3:\ x+3y=-7$

(鹿児島大 2016) (m20165405)

0.315 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$A+B$, AB, A^2, B^TA^T をそれぞれ求めよ.

(2) 行列を用いて，次の連立一次方程式を解け（計算過程を示すこと）.

$$\begin{cases} -x+y+z=2 \\ \ \ \ x+y+z=6 \\ \ \ \ x+y-z=4 \end{cases}$$

(3) 行列 A, B が正則な行列であるとする．このとき，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ.

(鹿児島大 2017) (m20175415)

0.316 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように，正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \dfrac{1}{2} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2017) (m20175419)

0.317 (1) 次の行列を計算しなさい.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の積を計算しなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185415)

0.318 次の 2 次行列 $\boldsymbol{U}$ が直交行列になるように，正規直交基底 a, b を求めなさい.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & b \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185418)

0.319 (1) 次の行列の計算をせよ.

$$5\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185434)

0.320 行列 E および J を以下のように定義する.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ として, 以下が成り立つことを示しなさい.

(1) $J^2 = -E$

(2) $AB = (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$

(3) $A^tA = \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)E$ （ただし，A^t は，A の転置行列を表す）

(室蘭工業大 2005)　　(m20055511)

0.321 行列 $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) C が正則であるための条件を求めよ.

(2) C が正則のとき C の逆行列を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055515)

0.322 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ のとき AB，BA を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055516)

0.323 以下のような行列 A, B が与えられている．AA^t および BB^t を求めなさい.
ただし，A^t は行列 A の転置行列，B^t は行列 B の転置行列を表す.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2006)　　(m20065503)

0.324 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $2A + 3B$ を計算しなさい.　　(2) AB，BA を求めなさい.

(室蘭工業大 2006)　　(m20065516)

0.325 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ のとき，BA を求めなさい.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，　$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 　を満たす行列 X を求めなさい.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075503)

0.326 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示しなさい.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075506)

0.327 行列 A および I を，$A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & b+1 \end{bmatrix}$，　$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，$A^2 - 5A - 2I = 0$ を満足する実数 a および b の組み合わせを求めよ.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075512)

0.328 行列に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A, B, C, D を，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

として，行列の積 AB, CD, DC を計算せよ.

(2) 行列 X を，

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

として，その転置行列 ${}^tX$，および，固有和（トレース）$\mathrm{tr}(X)$ を，

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{tr}({}^tXX)$ を求めよ.

(室蘭工業大 2009)　　(m20095502)

0.329 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り立つことを証明しなさい. ただし, a, b, c, d は実数であり, E を 2 次単位行列, O を 2 次零行列とする.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^5 を求めよ.

(3) 実数 x の n 次式を $x^n = (x^2 - x - 2)Q(x) + ax + b$ と表したときの係数 a および b を求めよ。ただし, $Q(x)$ は多項式であり, n は自然数とする.

(4) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^n を求めよ. なお, (1) の証明および (3) の答えを利用すること.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105505)

0.330 3 つの行列が，以下のように与えられているとする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，次の行列積をそれぞれ求めよ．

$$AB \ , \qquad CAB \ , \qquad BC$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155508)

0.331　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，以下の行列

$$2A^3 - 9A^2 + 10A + 8E$$

を求めなさい．ただし，E は単位行列とする．

(室蘭工業大 2018)　　(m20185513)

0.332　2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ について以下を答えよ．

(1)　A が正則であるための条件を示せ．

(2)　またそのときの逆行列を求めよ．

(室蘭工業大 2021)　　(m20215505)

0.333　A, B, C, P は $n \times\ n$ $(n \geq 2)$ の正則な行列，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}$ は $n \times\ 1$ の行列とする．ただし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．なお，答を導出する過程も必ず示すこと．

(1)　$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{y}$ とする．このとき，$\boldsymbol{z} = P\boldsymbol{x}$ を満足するような P を A と B で表せ．

(2)　$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$\boldsymbol{z} = P\boldsymbol{y}$ を満足するような P を A と B で表せ．

(3)　$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y'} = B\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x'}$ の関係があるとき，B を A と C で表せ．

(香川大 2007)　　(m20075702)

0.334　行列 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{x}^T S \boldsymbol{x}$ を計算せよ．

ただし，記号 T は転置を表す．

(香川大 2008)　　(m20085701)

0.335　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，　$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1)　P の逆行列を求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ を求めよ．

(3)　(2) の結果を用いて, A^n（n は自然数）を求めよ．

(香川大 2010)　　(m20105702)

0.336　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，　$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　P の逆行列を求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ を求めよ．

(3)　(2) の結果を用いて，A^n（　n は自然数　）を求めよ．

(香川大 2011)　　(m20115702)

0.337　2 次の正方行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を考える．2 つの列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ が互いに直交する単位ベクトルであるとする．このとき，2 つの行ベクトル $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ も互いに直交する単位ベクトルであることを示せ．

(香川大 2012)　　(m20125702)

0.338　行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，$C = (1 \quad -2)$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$AX = B$ を満たす行列 X を求めよ．

(2)　$YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ．

(香川大 2016)　　(m20165704)

0.339　正則行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185803)

0.340　$\boldsymbol{V}$ が 2× 2 行列のベクトル空間であるとき，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{V}$ が線形従属であるか, または線形独立であるかを判定せよ（その理由も記述せよ）．

(首都大 2005)　　(m20055902)

0.341　行列 A を $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　A^2 を求めなさい．

(2)　逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(3)　転置行列 ${}^tA$ を求めなさい．

(首都大 2012)　　(m20125901)

0.342　次の行列が逆行列をもつかどうか判定し，もつ場合はそれを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(滋賀県立大 2005)　　(m20056003)

0.343　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2009)　　(m20096003)

0.344　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ が正則行列となるための k に対する条件を求めよ．また, $k = 0$ としたときの A の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2010)　　(m20106003)

0.345 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような k の値を求めよ．また，$k = 2$ のとき A の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2011)　　(m20116003)

0.346 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（ただし，$a$, b, c, d は実数）に対して，A が正則になるための条件を求め，

A の余因子行列を用いて A^{-1} を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156003)

0.347 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ が成り立つことを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{O}$ はそれぞれ，2 次の単位行列および 2 次の零行列とする．

(2) $\boldsymbol{A}^6$ を求めなさい．

(3) $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196104)

0.348 次の行列について，下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $A^2 - 5A + 6E = O$ が成り立つことを示せ．ここで，E と O は，それぞれ，2 次の単位行列と 2 次の零行列である．

(2) A^6 を求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(宇都宮大 2022)　　(m20226101)

0.349 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ において以下の値をそれぞれ求めよ．

(1) $A^2 + B^2$

(2) $(A + B)(A - B)$

(工学院大 2004)　　(m20046206)

0.350 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ において次の計算を行え．

(1) AB

(2) BA

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(工学院大 2005)　　(m20056207)

0.351 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A^4 を求めよ．

(2) A^{-1} を求めよ．

(はこだて未来大 2009) (m20096302)

0.352 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a \neq 3$ とする．

(1) 逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数となるような a の条件をすべて示せ．

(2) (1) で求めた条件における逆行列をすべて求めよ．

(はこだて未来大 2012) (m20126301)

0.353 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(東京海洋大 2007) (m20076402)

0.354 行列 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(東京海洋大 2012) (m20126402)

0.355 行列 $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べ，正則のときはその逆行列を求めなさい．

(和歌山大 2012) (m20126502)

0.356 次式を満たす x, y, z の値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & z \\ x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2017) (m20176504)

0.357 以下の (1)，(2) に示す行列の逆行列をそれぞれ求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(和歌山大 2017) (m20176505)

0.358 以下の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(琉球大 2009) (m20096804)