[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：広島大

0.1　次の関数を x で微分せよ．　$\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(広島大 2001)　(m20014101)

0.2　(1)　次の積分を計算せよ．ただし，n, m は自然数である．

$$\int_{-1}^{1} x\sin n\pi x dx \qquad \int_{-1}^{1} \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

(2)　次の等式を示せ．

$$\int_{-1}^{1}\left\{x-\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}\sin k\pi x\right\}^2 dx=\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

(広島大 2001)　(m20014102)

0.3　$F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}(x>0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$F(x)$ は $x>0$ において強い意味での単調増加関数であることを示せ．

(2)　$F(xy)=F(x)+F(y)$, $F(x/y)=F(x)-F(y)$ を示せ．

(3)　$F(x^n)=nF(x)$（n : 有理数）を示せ．

(広島大 2001)　(m20014103)

0.4　次の積分をせよ．　$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

(広島大 2001)　(m20014104)

0.5　数列 $\{a_n\}$ の極限値が存在すれば，数列　$\left\{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$
の極限値も存在し，両者は相等しいことを示せ．

(広島大 2001)　(m20014105)

0.6　$z=xy$ なる面上の点 $P(2,-1,-2)$ において，この面の単位法線ベクトルを求めよ．

(広島大 2001)　(m20014106)

0.7　三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB=\alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　(m20014107)

0.8　4 点 $A(1,0,7)$, $B(2,1,8)$, $C(1,0,3)$, $D(2,2,9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

(広島大 2001)　(m20014108)

0.9　行列 P の転置を ${}^tP$ と表す．n 次正方行列 P が ${}^tP=P$ を満たすとき対称行列といい，${}^tP=-P$ を満たすとき交代行列という．次の問いに答えよ．

(1)　n 次正方行列 A に対して，次を示せ．

$$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA), \quad C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$$

とおくとき，B は対称行列，C は交代行列である．

(2)　次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001)　(m20014109)

0.10 n 次正方行列 A に対して固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次を示せ．

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(広島大 2001)　　(m20014110)

0.11 A を３次正方行列でその成分はすべて実数であり，$A^3 = I, A \neq I$ を満たすものとする．ただし，I は３次単位行列を表す．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A^2 + A + I$ は逆行列を持たないことを示せ．

(2) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ を $A^2 + A + I$ の固有値 0 に対する固有ベクトルとする．ベクトルの組 $\mathbf{v}, A\mathbf{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014111)

0.12 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を　$f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2}$　で定める．次に答えよ．

(1) $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ．

(広島大 2003)　　(m20034101)

0.13 次の関数を x で微分せよ．　$f(x) = \ln \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$　(ln は自然対数)

(広島大 2003)　　(m20034102)

0.14 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x dx$ とおく．次に答えよ．

(1) I_2, I_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ．

(3) $n \geqq 4$ に対し，I_n を求めよ．

(広島大 2003)　　(m20034103)

0.15 次の関数を $x = 1$ のまわりでテイラー展開し，３次項まで示せ．

$$f(x) = a^x \quad \text{ただし} \quad a > 0 \quad \text{の定数}$$

(広島大 2003)　　(m20034104)

0.16 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ を示せ．

(2) 正の実数 x に対し，無限級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$　が収束することを示せ．

(3) 正の実数 x に対し　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$　とおく．r を正の整数とするとき

$f(r) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{r-1} + \dfrac{1}{r}$　を示せ．

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.17 次の定積分を導け（計算せよ）．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ヒント：$\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$ であるから，

x, y の２重積分を求めればよい．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$

(広島大 2003)　　(m20034106)

0.18　行列と複素数に関する次の問いに答えよ．

(1) 実数成分をもつ次の行列　$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

は $a = b = 0$ でない限り正則である（逆行列をもつ）ことを示せ．

(2) A にその $(1,1)(2,1)$ 成分から構成された複素数 $a + ib$ $(i^2 = -1)$ を対応させる．このとき，行列の積，逆行列には複素数の積，逆数がそれぞれ対応することを示せ．

(広島大 2003)　　(m20034107)

0.19　行列 A を　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　と定める．次に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を正則行列で対角化せよ．

(広島大 2003)　　(m20034108)

0.20　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を　$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$　と定める．次に答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) V の正規直交基底を一組求めよ．

(3) 写像 $f : V \to V$ を　$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$　と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4) (2) で求めた V の一組の基底を e_1, e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1, e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.21　$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を写像とする．このとき，次の命題について正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を与えよ．

(1) g と合成写像 $g \circ f$ が線形写像で g が単射ならば，f は線形写像である．

(2) f と合成写像 $f \circ g$ が線形写像ならば，g は線形写像である．

(広島大 2003)　　(m20034110)

0.22　次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

ただし, $y = \tan^{-1} x$ $\left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - \alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - \alpha)(x - \beta)}$ を求めよ.

(5) $a>0$, $D=b^2-4ac<0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054101)

0.23 $n=0,1,2,\cdots$ とし, 積分 $I_n(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-x}(1+x)^n dx$ を考える. 次の問に答えよ.

(1) すべての n に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^n}{e^x}=0$ を示せ.

(2) すべての n に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ.

(3) $a_n=\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく. $n\geqq 1$ のとき, $a_n-na_{n-1}=1$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054102)

0.24 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ x, y に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする. 関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする. このとき, 関数 $G(t)=F\big(f(t),\ g(t)\big)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f, g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y)=x^2+xy+y^3-1$ に対して, $x=1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y=g(x)$ で

$$g(1)=0\ ,\qquad F\big(x,g(x)\big)\equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054103)

0.25 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad-bc\neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A\ :\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x}=0\}$ の次元と, 像空間 $W=\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.26 正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005)　　(m20054105)

0.27 (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times\ n$ 実行列とする. $Q = I - P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v} \in V\ , \quad \boldsymbol{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005)　　(m20054106)

0.28 3 次元ベクトル $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ に関する次の公式を証明せよ.

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \overrightarrow{C} = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right) \overrightarrow{A}$$

ここで $\times$は外積 , $\cdot$ は内積である.

(広島大 2005)　　(m20054107)

0.29 $n \times\ n$ 複素行列に対し,

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

を証明せよ. ただし, $A^\dagger = ({}^t A)^*$（A の転置かつ複素共役）である.

(広島大 2005)　　(m20054108)

0.30 次の積分を以下の手順に従って求めよ.

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$$

ここで $\alpha > -1$ は定数, ln は自然対数である.

(1) 求める積分を $I(\alpha)$ とおき,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}$$

を求めよ.

(2) 上の答えを利用して $I(\alpha)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054109)

0.31　$p > 0$ を定数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 f を，　$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x^2} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定義する．

(1)　f は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(2)　f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ．

(3)　f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ．

(広島大 2006)　　(m20064101)

0.32　$\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1)　命題 $(*)$ の否定命題を述べよ．

(2)　次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3)　A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(広島大 2006)　　(m20064102)

0.33　次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1)　2 以上の自然数 n に対して　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$　が成り立つことを示せ．

(2)　実数 $x > -1$ に対して不等式　$\log(1+x) \leqq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$　が成り立つことを示せ．

(3)　自然数 n に対して　$\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$　と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ．

(広島大 2006)　　(m20064103)

0.34　行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1)　行列 A の階数を求めよ．

(2)　三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ．

(3)　$a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島大 2006)　　(m20064104)

0.35 a, b は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\,dx$ を求めよ．

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ．

(広島大 2006)　　(m20064105)

0.36 以下の関数を x で微分せよ．

(1) $F(x) = (2-x)\ln(x)$　　(2) $F(x) = \dfrac{1-x}{3+x^2}$

(広島大 2006)　　(m20064106)

0.37 次の定積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax)e^{-x}dx$ 　(ただし, a は正定数)

(広島大 2006)　　(m20064107)

0.38 2 次元直交座標系における 2 軸を x 軸，y 軸とするとき，$y = x^2$ で表される曲線がある．この曲線の，点 $(0, 0)$ から点 (a, a^2) までの長さを求めよ．

(広島大 2006)　　(m20064108)

0.39 次の 3 × 3 行列の固有値を求めよ． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(広島大 2006)　　(m20064109)

0.40 (1) 実数 t に対して，　$t = \tan\theta$ 　かつ　$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める．このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ．

(2) 不定積分　$\displaystyle\int \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ 　を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ．

ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は　$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ 　とする．

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する．　領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ における重積分　$\displaystyle\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$ 　の値を求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084101)

0.41 以下の微分方程式を解け．さらに，それぞれについて $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t)$ を求めよ．

(1) $\dfrac{du}{dt} + u = 1$,　$u(0) = 0$　　(2) $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}u = 0$,　$u(0) = 1$

(3) $\dfrac{du}{dt} = u(1-u)$,　$u(0) = \dfrac{1}{2}$

(広島大 2008)　　(m20084102)

0.42 実数 a に対して行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め，その時の A の階数を計算せよ.

(3) 前問における a に対して，$A\boldsymbol{v} \neq 0$ かつ $A^2\boldsymbol{v} = 0$ となるようなベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ.

(広島大 2008)　　(m20084103)

0.43 実 2 変数関数　$f(x,y) = x^2 + \dfrac{5}{2}y^2 + 3xy - y$　について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) を求めよ．ただし停留点とは，関係式 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ をともに満たす点のことである.

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ.

(3) 停留点における値 $f(x_0, y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ.

(広島大 2008)　　(m20084104)

0.44 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f : V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する.

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ.

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ.

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ.

(広島大 2008)　　(m20084105)

0.45 微分可能なスカラー関数 $\varphi(x,y,z)$ と微分可能なベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ について，次式が成り立つことを証明せよ.

(1) $\nabla \times \{\nabla\varphi(x,y,z)\} = 0$

(2) $\nabla \cdot \left\{\nabla \times \overrightarrow{A}(x,y,z)\right\} = 0$

(広島大 2008)　　(m20084106)

0.46 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$，　初期条件　$\left(t = 0 \text{ のとき, } x = 1 \text{ かつ } \dfrac{dx}{dt} = 0\right)$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3t$，　初期条件　$\left(t = 0 \text{ のとき, } x = 0 \text{ かつ } \dfrac{dx}{dt} = 0\right)$

(広島大 2008)　　(m20084107)

0.47 次の 4 × 4 行列の逆行列が存在しないための条件を求めよ．ただし，x は実数とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(広島大 2008)　　(m20084108)

0.48 (1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.49 3 次の実正方行列 A に対し，行に関する基本変形を 2 回行って，単位行列に変形できたとする．行った基本変形は以下の通りである．

1 回目：第 2 行と第 3 行を入れ替えた．

2 回目：第 1 行に第 3 行の 2 倍を加えた．

このとき，1 回目の基本変形に対応する基本行列を P_1，2 回目の基本変形に対応する行列を P_2 として以下の問いに答えよ．

(1) 基本行列 P_1, P_2 とその逆行列を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を計算せよ．

(3) $\boldsymbol{b}$ に同じ基本変形を行って得られるベクトルは，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解になることを示せ．

(広島大 2009)　　(m20094102)

0.50 関数 $f(x) = \tanh x$ を考える．ただし，$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減表とグラフを書き，定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，その定義域と値域も書け．

(広島大 2009)　　(m20094103)

0.51 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^t\!AB)\,,$$

とおく．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\, C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ $(X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.52 $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009) (m20094105)

0.53 (1) 関数 e^x，$\sin x$，$\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ．

(広島大 2010) (m20104101)

0.54 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ．

(3) 積分 $\displaystyle I(c)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2cx\,dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c，$I(c)$ を用いて表せ．

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ．

(広島大 2010) (m20104102)

0.55 $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0)=a$，$f(x)<a \quad (0<x\leqq 1)$，$f'(0)\neq 0$ を満たすとする．

(1) $f'(0)<0$ であることを示せ．

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x)=\begin{cases} -f'(0) & (x=0) \\ \dfrac{a-f(x)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

このとき，$g(x)$ は $x\geqq 0$ で連続であることを示せ．

(3) ある $C>0$ が存在して，

$$a-f(x)\geqq Cx \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

が成立することを示せ．

(広島大 2010) (m20104103)

0.56 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える．ただし，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする．以下のそれぞれの命題について，正しければ証明を与え，誤りであるならば反例をあげよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば，$\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2),\cdots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である．

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2),\cdots,f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である．

(3) $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n$ が f の相異なる固有値であり，$\boldsymbol{a}_i$ が λ_i に対する固有ベクトルであるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である．

(広島大 2010) (m20104104)

0.57 $(m+n)$ 次正則行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ {}^tQ & R \end{bmatrix}$$

のように区分されているとする．ただし，P は m 次正方行列，Q は $m\times\ n$ 行列，R は対称な n 次正則行列，${}^tQ$ は Q の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(m+n)$ 次正方行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} E_m & -QR^{-1} \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，E_k は k 次単位行列，O はすべての成分が 0 である $n\times\ m$ 行列とする．このとき，行列 M は正則行列であることを示せ．

(2) $MA\,{}^tM$ を $B = P - QR^{-1}\,{}^tQ$, O, ${}^tO$, R を用いて表せ．

(3) $|A| = |B||R|$ となることを示せ．

(4) $(MA\,{}^tM)^{-1}$ を求め，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}QR^{-1} \\ -R^{-1}\,{}^tQB^{-1} & R^{-1} + R^{-1}\,{}^tQB^{-1}QR^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを示せ．

(広島大 2010)　　(m20104105)

0.58 $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ.

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(3) $a < b$, $f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする. このとき, $a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ.

(4) $b > 0$, $f(0) > 0$, $f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする. このとき, 方程式 $f(x) = x$ は, $0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ.

(広島大 2011)　　(m20114101)

0.59 関数 $u(x,y) = e^{-cx-y}$（c は定数）に対して, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(広島大 2011)　　(m20114102)

0.60 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}\,dxdy$ を求めよ.

(広島大 2011)　　(m20114103)

0.61 関係式 $y = e^{-x}e^{-y}$ から, $\dfrac{dy}{dx}$ を y のみを用いて表せ.

(広島大 2011)　　(m20114104)

0.62 (1) $\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011) (m20114105)

0.63 次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ.

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について, (2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ.

(4) A の固有値をすべて求めよ.

(広島大 2011) (m20114106)

0.64 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \bigoplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{y} \in W_1\, ,\ \boldsymbol{z} \in W_1^{\perp}\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 $a,\ b$ を $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ を用いて表せ.

(広島大 2011) (m20114107)

0.65 λ を実定数とし, 3 次実正方行列 A, B を次で定める.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ. ただし, 3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは, $XY = YX$ が成り立つことである.

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ.

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ.

(広島大 2012) (m20124101)

0.66 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012) (m20124102)

0.67 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする．関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = u(r) \quad (\text{ただし，} r = \sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ が成り立つためには,

$$u(r) = a \log r + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

(広島大 2012) (m20124103)

0.68 V を 3 次元実線形空間，W をその 2 次元部分空間とする．f は V の線形変換で，$f(W) \subset W$ を満たすとする．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W の基底，$\boldsymbol{v}_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする．以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし，A の $(3,3)$ 成分を a とする．このとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ.

(3) a は A の固有値であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば，$f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする．このとき，A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば，$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ．ただし，$\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である.

(広島大 2012) (m20124104)

0.69 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\, dr$ の値を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{r(\log r)^2}\, dr$ の値を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124105)

0.70　以下の問いに答えよ．

(1)　次の広義重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める．

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > e^2\}$$

(2)　関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2} + \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める．

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.71　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x}$ を計算せよ．

(広島大 2012)　　(m20124107)

0.72　$x = \dfrac{1+i}{3}$（i は虚数単位）のとき，x^8 の値を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124108)

0.73　次の関数を x で微分せよ．ただし，a は正の定数である．

(1)　e^{-ax^2}　　　(2)　a^x　$(a\neq1)$

(広島大 2012)　　(m20124109)

0.74　次の積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int\frac{x}{ax+b}\,dx$　　（a,b はいずれも 0 でない定数）

(2)　$\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(広島大 2012)　　(m20124110)

0.75　一様な密度を持つ半球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq0)$ の重心の座標を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124111)

0.76　次の微分方程式の解を求めよ．ただし，$x=1$ のとき $y=2$ とする．

$$x\frac{dy}{dx}+y=2x$$

(広島大 2012)　　(m20124112)

0.77　$\sin ax$ のテーラー展開を x^5 の項まで求めよ．a は 0 でない実定数とする．

(広島大 2013)　　(m20134101)

0.78 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y + 3 = 0$ の一般解を求めよ．

(広島大 2013) (m20134102)

0.79 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ．

(広島大 2013) (m20134103)

0.80 $\vec{F} = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ， $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ とするとき，以下の経路に沿って

$\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(X,Y,Z)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を求めよ． $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, X, Y, Z$ はすべて実定数とする．

(1) $(0,0,0) \to (X,0,0) \to (X,Y,0) \to (X,Y,Z)$ ．

(2) $(0,0,0)$ と (X,Y,Z) を直線上で結ぶ線分 ．

(広島大 2013) (m20134104)

0.81 試行毎の確率 p，試行回数 N の二項分布 $P(n) = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$ は，$p \ll 1$，$n \ll N$ の場合に平均値 $s = Np$ のポアソン分布 $P(n) = \dfrac{1}{n!}s^n e^{-s}$ に近付くことを示せ．必要なら $e^{-p} \approx 1-p \quad (p \ll 1)$ を用いてよい．

(広島大 2013) (m20134105)

0.82 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ．

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす．

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす．

(3) 区間 $I = [0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ を満たすならば，任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる．

(4) 区間 $I = [0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である．

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である．

(広島大 2013) (m20134106)

0.83 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における，次の 4 点を考える．

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く．線形変換 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1) = P_2,\ T(P_2) = P_3,\ T(P_3) = P_4,\ T(P_4) = P_1$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1},\ \overrightarrow{OP_2},\ \overrightarrow{OP_3},\ \overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ．

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ．

(4) 原点 O と $P_1,\ P_2$ を含む 2 次元部分線形空間を W とする．W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134107)

0.84 以下の問いに答えよ．

(1) 「 $x > 0$ ならば $\log(1+x) < x$ 」が成り立つことを示せ．

(2) 「 $x > 0$ ならば $\log(1+x) > x - \alpha x^2$ 」を満たす実数 α の範囲を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134108)

0.85 実 n 次正方行列 A について，$A^2 = -E$ が成り立っているとする．ただし，E は単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める．$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを $\boldsymbol{o}$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) A は実固有値をもたないことを示せ．

(2) n は偶数であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) $n = 2$ とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v}\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(5) $n = 4,\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ で張られる部分線形空間を M とする．さらに $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{w} \notin M$ とする．このとき，$\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ A\boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示し，この基底に関する f の表現行列 C を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134109)

0.86 以下の問いに答えよ．

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を書け，（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ の値を求めよ．

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k\, dx$ の値を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134110)

0.87 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times\ \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}\times\ (\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})$ を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144101)

0.88 xy 平面内で $x^2+3y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ を満たす領域の面積を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144102)

0.89 次の積分 I_n について以下の問いに答えよ．

$$I_n=\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

(1) I_0 を求めよ．

(2) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ．

(3) 漸化式を利用することにより I_n を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144103)

0.90 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の逆行列が存在する条件を求めよ．

(2) (1) が満たされるとき，A の逆行列を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144104)

0.91 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$$

(広島大 2014)　　(m20144105)

0.92 関数 $f(x)=x^2(x-1)(4-x)$ を考える．定積分

$$I=\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ とするとき，x を t の関数として表し，$\dfrac{dx}{dt}$ を計算せよ．

(2) 定積分 I において，積分変数を x から t に変換せよ．

(3) 定積分 I の値を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144106)

0.93 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと．

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$, $T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.94 一般項 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $n = 1, 2, \cdots$ および $k = 0, \cdots, n$ に対し，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対し，$a_n < a_{n+1}$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ．

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(広島大 2014)　　(m20144108)

0.95 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ．

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ．

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである．

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.96 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める．

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^{\ell}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ．

(2) f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ．

(3) $\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である．

(4) $\ell=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ．
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い．

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.97 $2\times\ 2$ 行列 A は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と 固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．また，$2\times\ 2$ 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $2\times\ 2$ 行列 P で $A=PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ．（答だけで良い.）

(2) 行列 A を求めよ．

(3) $2\times\ 2$ 行列 X で $X^2=B$ となるようなものを全て求めよ．

(4) $2\times\ 2$ 行列 Y で $Y^2=A$ となるようなものはいくつあるか．また，そのような Y をひとつ見つけよ．

(5) $2\times\ 2$ 行列 Z で $Z^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154101)

0.98 (1) 広義積分 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

(2) $J=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく．J を求めよ．

(3) 定数 $C>0$ と $R>0$ が存在して $x\ge R$ ならば $\log(1+x^2)<C\sqrt{x}$ となることを示せ．

(4) 広義積分 $K=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$ の値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154102)

0.99 $a\in\mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ．

(1) f の像および核の次元を求めよ．

(2) $a=0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ．

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ．

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.100　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5} \leq a_n \leq 1$ を示せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束することを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.101　(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$ とする．

(a) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ．

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ．

(2) $g(x)$ は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，$a,\ b \in I$ は $a < b$ を満たすとする．

(a) $g'(a) < 0 < g'(b)$ とする．$g(x)$ は $a < \xi < b$ を満たすある $\xi \in \mathbb{R}$ で閉区間 $[a,\ b]$ での最小値をとることを示せ．また $g'(\xi)$ を求めよ．

(b) $g'(a) < k < g'(b)$ を満たす任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，$g'(\eta) = k,\ a < \eta < b$ を満たす $\eta \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

(c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば，$g'(x)$ は I で連続であることを示せ．

(広島大 2015)　　(m20154105)

0.102　実行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．S の概形を図示せよ．

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

0.103　(1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.104 A は実 $n\times\ k$ 行列でその階数は $\mathrm{rank}\,A=k<n$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ．

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ．

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x})={}^t(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})$$

を定める．このとき，

$$f(\boldsymbol{x})={}^t\bigl(\boldsymbol{x}-({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\bigr)({}^tAA)\bigl(\boldsymbol{x}-({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\bigr)+{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}-{}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.105 逆正弦関数 $f(x)=\sin^{-1}x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1,1)$ において f の導関数 f' を求めよ．

(2) $n=0,1,2,\cdots$ と $-1<x<1$ に対して，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)=(2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!}=\dfrac{(2n)!}{(2^nn!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0!=1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1,1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N$ に対して，$g_N(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}a_kx^k$ と定める．ただし，$x^0=1$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-g_N(x)}{x^N}=0$$

となるための必要十分条件は，$a_k=\dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\bigl((N-k)!\bigr)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.106 実行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&6\\2&6&9\\-2&-4&-7\end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164105)

0.107 三角不等式 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は任意のベクトルである．

(広島大 2016)　　(m20164106)

0.108 $\nabla \times (r\,\boldsymbol{r})$ の値を計算せよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．与式において，右側の $\boldsymbol{r}$ は任意の点の位置ベクトルで，左側の r は $r = |\boldsymbol{r}|$ なるスカラーである．

(広島大 2016)　　(m20164107)

0.109 $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & m \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & n \end{bmatrix}$ が直交行列となるように，$m,\ n$ を定めよ．

(広島大 2016)　　(m20164108)

0.110 (1) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (a > 0)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ の値を求めよ．ただし，途中の計算式も解答用紙に明記すること．

(広島大 2016)　　(m20164109)

0.111 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ について，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換することによって計算せよ．

(広島大 2016)　　(m20164110)

0.112 c を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & c & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $c = 6$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための c の条件を求めよ．

(3) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持たないとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174101)

0.113 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x)+2f(x)\Big(1-f(x)^2\Big)=0$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ.

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.114 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし, 写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$f(\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})\cdot(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

ただし, $\cdot$ はベクトルの内積を表す. 以下の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ.

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ.

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大 2017)　　(m20174103)

0.115 (1) n を自然数として, $\sin x$ の n 次導関数が $\sin(x+a_n)$ となるような実数 a_n を一つ求めよ.

(2) 数列 $\Big\{b_k\Big\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して, 任意の実数 x と任意の自然数 n に対して
$\left|\sin x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right| \leq \dfrac{|x|^n}{n!}$ が成り立つ. b_k を求めよ.

(3) $0.841<\sin 1<0.842$ であることを示せ.

(4) $\sin 1$ は無理数であることを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174104)

0.116 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし, k 次実対称行列 M_n $(n=1,2,\cdots)$ を

$$M_n=\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する. ここで, ^{t} は転置を表す記号である. 以下の問いに答えよ. ただし, 任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい.

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする. 数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列, すなわち,
$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ.

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ.

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする. $S=\Big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}=1\Big\}$ に対し,

$$\min_{x\in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x}=\lambda_n$$

を示せ.

(4) (3) で定義した λ_n に対して, 数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ.

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して, $\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば, $\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ.

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.117 a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184101)

0.118 a を実数，r を正の実数とする．座標平面において，y 軸上の点 $(0, a)$ を中心とし半径が r である円を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y = f(x)$ の形で表せ．

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要である．

(3) 円 C が $x = 0$ の近くで最も良く放物線 $y = x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184102)

0.119 (1) 方程式 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ．

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (1) の 2 次曲線上での xy の最小値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184103)

0.120 $0 < r < 1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x, y, z) \in B \;\middle|\; x^2 + y^2 < r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $B(r)$ の体積を求めよ．

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.121 A, B を n 次正方複素行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし i は虚数単位である．

(2) ある n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき，A と B の固有値の集合は一致することを示せ．

(3) A が正則であるとき，AB と BA の固有値の集合は一致することを示せ．

(4) $AB = BA$ が成り立つとき，A と B は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ．

(広島大 2018)　　(m20184105)

0.122 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ．

(広島大 2018)　　(m20184106)

0.123　積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を考える．重積分 I^2 を，二次元極座標を用いて計算することにより，I を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184107)

0.124　s を正の実数とするとき，ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ．

(広島大 2018)　　(m20184108)

0.125　xy 平面上において，θ を変数として，座標 $x,\ y$ が，$x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1-\cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta \geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x=0,\ y=0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$，2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．$x_n,\ y_n$ を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184109)

0.126　3 次元空間における点 P，Q，R を考える．原点を O とするとき，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たしているとする．ここで，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．このとき，P，Q，R は同一直線上にあることを示せ．

(広島大 2018)　　(m20184110)

0.127　(1)　$x,\ y,\ z,\ w$ を正の実数とする．次の不等式を示せ．

$$\sqrt[4]{xyzw} \leqq \frac{x+y+z+w}{4}$$

(2)　$a \leqq b$ を満たす正の実数 $a,\ b$ に対し，二つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \sqrt[4]{a_n b_n^3} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定める．このとき，次の不等式を示せ．

$$a_n \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3)　(2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ．また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(4)　(2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214101)

0.128　3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　A が正則行列であることを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2)　A のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(3)　3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め，さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(4)　$B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく．B のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(広島大 2021)　　(m20214102)

0.129 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し，

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく．$I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．非負整数 m に対し，$I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ．

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする．$I_4(a)$ を a を用いて表せ．ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい．

(広島大 2021)　　(m20214103)

0.130 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbb{C})$ で表す．E_2 を 2 次の単位行列とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ に対し，A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，複素数 z に対し $\overline{z}$ は z の複素共役を表す．また

$$H(2) = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \left\{A \in M(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で } \quad P^{-1} = P^*\right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A \in H(2)$ とする．A の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A \in H(2)$ とする．A がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ．

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，(　,　) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A \in H(2)$ に対し，ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

0.131　非負整数 n に対し,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ.

(2)　$4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3)　$4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4)　級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.132　ベクトル $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ ，$r = |\overrightarrow{r}| \neq 0$ であるとき，次の式を求めよ．ただし，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．それぞれの途中の計算式も明記すること.

(1)　$\mathrm{grad}\, r$　　　　(2)　$\mathrm{div}\, \frac{\overrightarrow{r}}{r^n}$

(広島大 2021)　　(m20214106)

0.133　次の微分方程式を解け.

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cot y$　　　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 15y = 0$

(広島大 2021)　　(m20214107)

0.134　次の積分を計算せよ.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx$　　　　ただし，m, n は整数とする.

(広島大 2021)　　(m20214108)

0.135　次の行列を計算せよ.

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$　　　　(2)　$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$　　　　ただし，n は自然数とする.

(広島大 2021)　　(m20214109)

0.136　次の関数の第 n 次導関数を求めよ．

$$y = \log(1+x)$$

(広島大 2022)　　(m20224101)

0.137　次の関数の不定積分を求めよ．ただし，a は定数とする．

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(広島大 2022)　　(m20224102)

0.138　面 $z = x^2 + y^2$ と面 $z = x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(広島大 2022)　　(m20224103)

0.139　次の微分方程式を解け．

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9 = 0$$

(広島大 2022)　　(m20224104)

0.140　行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ の固有ベクトルの一つは $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(1)　実数 a, b の値を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(3)　$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ とする．$\boldsymbol{A}$ の対角化を利用して，$\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$ は単位行列である．

(広島大 2022)　　(m20224105)

0.141　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

(広島大 2023)　　(m20234101)

0.142　放物線 $y = (x+2)^2$ の区間 $-3 \leq x \leq -2$ における曲線の長さ s を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234102)

0.143　円柱面 $x^2 + y^2 = bx$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234103)

0.144　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A の固有ベクトルを求めよ．

(3)　A を対角化する行列 P を求め，対角化を利用して A^3 を計算せよ．

(広島大 2023)　　(m20234104)