[選択項目]　年度：1991〜2023 年　大学：北海道大

0.1　次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t\sin t$$

(北海道大 1997)　(m19970101)

0.2　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1)　固有値を求めよ．

(2)　単位固有ベクトルを求めよ．

(3)　$\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t ：定数

(北海道大 1997)　(m19970102)

0.3　ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1)　発散 div $\mathbf{a}$ を求めよ．

(2)　回転 rot $\mathbf{a}$ を求めよ．

(北海道大 1997)　(m19970103)

0.4　z は複素数である．

(1)　$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ．

(2)　方程式 $\sin z = 2$ を解け．

(北海道大 1997)　(m19970104)

0.5　円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．
円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$

(1)　円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2)　円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3)　曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　(m20030101)

0.6　以下の問に答えよ．ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．

(1)　微分方程式　$x^3y' + y^2 = 0$　を解け．

(2)　線形非同次方程式　$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$　の一般解を求めよ．

(北海道大 2003)　(m20030102)

0.7　２次の正方行列 A を

$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \qquad (0 < p < 1\,,\ 0 < q < 1)$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化せよ．

(3) A^n を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030103)

0.8 $f(x) = |\sin x|$ をフーリエ級数展開せよ．

(北海道大 2003)　　(m20030104)

0.9 (1) 1 階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の一般解が $x = C\exp\left[\displaystyle\int^{y/x} \frac{du}{f(u)-u}\right]$ であることを示せ．ただし，C は任意定数，$u = \frac{y}{x}$ である．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $x\dfrac{dy}{dx} - y = xe^{y/x}$

(北海道大 2004)　　(m20040101)

0.10 以下の問いに答えよ．ただし，ベクトルの内積を "·"，外積を "×" と表すものとする．

(1) 以下の文章では，平面の方程式を導いている．空欄（1）から（3）に適切な式を入れよ．
原点 O より平面 S に垂直におろした点を G （以下，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と呼ぶ），平面 S 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ は垂直であることから，両ベクトル間には（　1　）の関係がある．ここで，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ とすると，平面 S の方程式は x, y, z, g_1, g_2, g_3 を用いて,（　2　）で表される．また，平面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ と，原点 O から平面 S までの距離 p を用いると前式は,（　3　）で表される．

(2) 単位法線ベクトルが $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ で $(1,1,1)$ を通る平面を求めよ．

(3) 同一平面上に異なる 3 点 A,B,C が与えられたとき，外積を用いてこの 3 点より平面の方程式を求める方法を述べよ．

(4) 3 点 $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(0,3,1)$ によって与えられる平面の方程式を求めよ．

(北海道大 2004)　　(m20040102)

0.11 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \quad (a \neq b,\ a, b \neq 0,\ a, b \in R)$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化せよ．

(北海道大 2004)　　(m20040103)

0.12 以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする．

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ （r, θ は実数）で表せ．
(a) $1+j$　　(b) j

(2) 次の複素数を $x + jy$ （x, y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ．
(a) j の平方根　　(b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R = \cos\theta + j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ．

(北海道大 2004)　　(m20040104)

0.13 次の 2 階の微分方程式 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0\ ,$$

は, $y_1 = y$, $y_2 = dy/dx$ の変数変換により,

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\ ,$$

と表せる．行列 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\ ,$$

の固有値・固有ベクトルを計算することにより, y_1 , y_2 の一般解を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050101)

0.14 周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005)　　(m20050102)

0.15 (1) 次の関係式が成り立つとき, w と z との関係を求めよ. ただし, w と z は複素数である.

$$e^z = e^w$$

(2) e^z は複素数平面の全域で正則であることを示せ.

(3) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ となることを示せ.

(北海道大 2005)　　(m20050103)

0.16 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “$\cdot$” はベクトルの内積（スカラー積）, “ $\times$ ” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{曲面 } \boldsymbol{S}\ :\ 2x + y + 2z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.17 2 階微分方程式 $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $p = \dfrac{dy}{dx}$ とおくことにより，p と y についての 1 階微分方程式に変形しなさい.

(2) (1) で得られた 1 階微分方程式を利用して，一般解を求めなさい.

(北海道大 2006)　　(m20060101)

0.18 次の 3 次実正方行列 A について，以下の問いに答えなさい.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めなさい．

(2) A のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(3) A を対角化する行列 P を求め，A の対角化 $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(北海道大 2006)　　(m20060102)

0.19　図 1 に示す周期が 2π の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい．

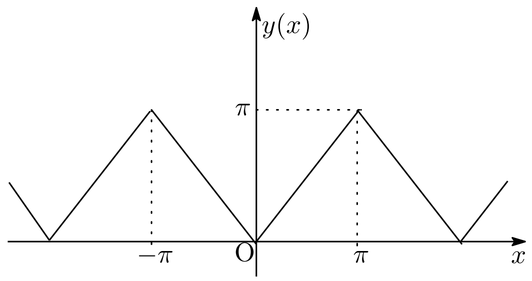


図 1

(北海道大 2006)　　(m20060103)

0.20　関数 f が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，grad(f) という演算を以下のように定義します．

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい．

(1) f, h が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，h が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right) = \dfrac{h \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1, 1, 1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい．

(北海道大 2006)　　(m20060104)

0.21　次の微分方程式の解を求めたい．これに関して次の設問に答えよ．

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

(1) この微分方程式の解の一つが，行列 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を用いて　$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda t)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
で表されるものとする．ただし，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ はゼロ行列ではなく $u_1 + u_2 = 1$ を満たすものとする．
λ と $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求め（複数求まる場合は全て答えよ），一般解を示せ．

(2) $t = 0$ における $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の初期値が $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるときの解を求めよ．

(北海道大 2007)　　(m20070101)

0.22　$u = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{grad}\, u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x, y, z) = c$　(c : 定数) で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．

(2) $\mathrm{grad}\, u \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\, u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“$\cdot$”は内積を表している．

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x, y, z) = c \quad (c:$ 定数$)$ で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.23 次の設問に答えよ．ここで，z は複素数である．

(1) $e^z \neq 0$ を証明せよ．

(2) $e^z = e^{2z}$ を満足する z を求めよ．また z の値を複素平面上に図示せよ．

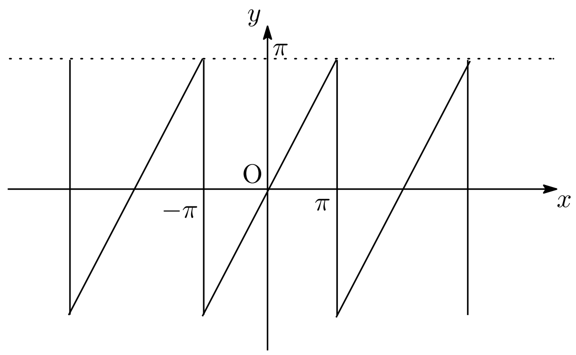
(3) e^{nz} は正則であることを示せ．n は整数とする．

(4) $\dfrac{d}{dz}e^{nz} = ne^{nz}$ を証明せよ．

(北海道大 2007)　　(m20070103)

0.24 (1) 次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ．　$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ．　$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　　(m20070104)

0.25 実数列 $a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が　$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$,　$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

を満たすとする．$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく時, 次の設問に答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{A}^n$ を求めなさい.

(3) $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{a}_1$ が成り立つ（ただし，$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$(単位行列) とする）ことに注意して，実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(北海道大 2008)　　(m20080101)

0.26 z は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，u, v, x, y, a, b, c は実数とする.

(1) 次の計算をしなさい.　　$(1 + i)^7$

(2) 次の極限値は存在するか．存在する場合はそれを求めなさい.

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^3 - 2iz^2 + z - 2i}{z - 2i}$$

(3) 次の関数を $w = u + vi$ の形で表しなさい．ただし，$z = x + yi$ とし，$\bar{z}$ は z の共役複素数とする．

$$w = z\bar{z} + z - \bar{z}$$

(4) 次の関数が正則関数となるように係数を a, b, c 定めなさい．

$$w = ax^2y - 2y^3 + (bxy^2 + cx^3)i$$

(5) 次の関数は調和関数であることを確かめなさい．また，u を実部にもつ正則関数を求めなさい．

$$u = x^2 - 6xy - y^2$$

(北海道大 2008)　　(m20080102)

0.27 (1) 放物線を表す次の式

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

を一般解とする，階数の最も低い微分方程式を求めなさい．

(2) 式①で表されるどの放物線とも直交する曲線の方程式を求めなさい．ここで，二つの曲線 C と C' が交点 (x, y) で直交するとは，(x, y) における C の接線と C' の接線とが直交することと定義する．

(3) (2) で求めた曲線のうち，原点を通るものを求め，それがどんな曲線であるかを述べなさい．

(北海道大 2008)　　(m20080103)

0.28 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　　(m20080104)

0.29 z, w は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$ である．また，x, y, r, θ は実数である．

(1) 複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が与えられたとき，$w^n = z$（n は正の整数）の根は n 個であり，

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

と表せることを示せ．

(2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が，$w = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ と表せることを示せ．また，$\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

(3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき，関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ．

(北海道大 2009)　　(m20090101)

0.30 行列，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{100}$ を計算しなさい．ここで，I は単位行列である．

(北海道大 2009)　　(m20090102)

0.31 (1) 関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2) $s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.32 原点を通り x 軸上に中心を有する円 C は無数にあるが，一般にその方程式は，$x^2 + y^2 + ax = 0$（a は非ゼロの任意の実定数）と表せる．曲線 D は，y 軸およびすべての円 C に，交点において直交する．このような曲線 D を，以下の手順で求めよ．

(1) 円 C の点 (x, y) $(y \neq 0)$ における円 C の接線の勾配 m を求めよ．

(2) 曲線 D の方程式を $y = y(x)$ $(x \pm y \neq 0)$ とし，点 (x, y) における曲線 D の接線の勾配 $\dfrac{dy}{dx}$ と，(1) で求めた勾配 m には，直交関係 $m\dfrac{dy}{dx} = -1$ が成り立つ．これを用いて，曲線 D の方程式が満たすべき微分方程式

$$(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

を導出せよ．

(3) (2) の微分方程式を解き，題意を満たす曲線群 D が $x - y$ 平面上でどのような図形を描くか答えよ．

(北海道大 2009)　　(m20090104)

0.33 以下の微分方程式の一般解を計算せよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) $y' - 3y = e^x$

(2) $y'' + 2y' + y = 0$

(北海道大 2010)　　(m20100101)

0.34 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (y,\ -x,\ z)$ において, 位置 $A(1, 1, 1)$ から位置 $B(1, 2, 3)$ の線分 C の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ここで, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \bullet d\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $d\boldsymbol{r}$ の内積を表す.

(2) 位置 $O(0, 0)$ から位置 $D(2, 4)$ の放物線 $y = x^2$ 上の曲線を曲線 C' とし, その曲線上の点を $(t,\ t^2)$ $[0 \leq t \leq 2]$ とする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$ において, 位置 O から位置 D までの曲線 C' に沿った積分 $\displaystyle\int_{C'} f(\boldsymbol{r})\, dt$ を求めよ.

(北海道大 2010)　　(m20100102)

0.35 区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) (1) の結果を利用して，

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 2010) (m20100103)

0.36 次の行列 A について以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) A の対角化行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, そのときの行列 P を示せ.

(北海道大 2010) (m20100104)

0.37 次の連立微分方程式の一般解を求めよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$$x\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(北海道大 2011) (m20110101)

0.38 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である.

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)f(\tau)d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011) (m20110102)

0.39 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,
$\alpha_k = a_k + ib_k \ (k = 0, 1, \cdots, n)$ とするとき，w の実部 $Re(w)$ および $Im(w)$ を求めよ.

(2) $f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} \ (z = x + iy)$ が正則か否かを調べよ.

(3) 次の式を証明せよ．

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110103)

0.40 以下に示す行列 P と A について各設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

(1) 行列 P の固有値を求めよ．

(2) 行列 A を，P, a, b, c, d および単位行列 E を用いて表せ．

(3) 行列 A の固有値を求めよ．

(4) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(北海道大 2011)　　(m20110104)

0.41 以下の設問に答えよ．途中の計算結果を詳しく記述すること．

(1) k を任意の実数とするとき, 次のベクトルの組 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が一次独立となる条件を求めよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3]$ とする．また, $k = 0$ とするとき, 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{A}^n$（n は自然数）を求めよ．

(北海道大 2012)　　(m20120101)

0.42 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をそれぞれ x, y, z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 積分経路 $C : \boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\ \boldsymbol{j} + 2t\ \boldsymbol{k}$（$t = 0$ から $t = 2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$ （$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p} = x_p\boldsymbol{i} + y_p\boldsymbol{j} + z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする．

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.43 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + 1 \qquad (A)$$

について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 式 (A) の特殊解として $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ を仮定し，係数 a_1, a_2, a_3 を定めよ．

(2) 式 (A) の一般解を求めよ．

(北海道大 2012)　　(m20120103)

0.44　以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1)　$f(x) = x$ を区間 $[-\pi,\, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

となることを示せ．

(2)　$-\pi \le a \le \pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi,\, \pi]$ において

$$x^2 = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$$

が成立することを示せ．

(3)　(2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi,\, \pi]$ において

$$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

を導け．

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.45　次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2)　$\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ ($= \boldsymbol{x}_2,\, \boldsymbol{x}_3$) を挙げよ．　ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし， 3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2,\, \boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3)　$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$　($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.46　微分方程式と周期関数について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順も，詳しく記述すること．

(1)　次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2)　次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，n は 1 以上の整数である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3)　関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 + \dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi \le x < 0) \\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) & (0 \le x < \pi) \end{cases}$$

(4)　次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = g(x)$$

(北海道大 2013)　　(m20130102)

0.47 複素数に関する以下の設問に答えよ．

(1) z を複素数，$\overline{z}$ を z の複素共役とするとき，次式が成り立つことを示せ．ただし，$Re[z]$ は z の実数部分を表す．

$$Re[z] = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|z| \geq |Re[z]| \geq Re[z]$$

(3) 複素数 z_1 , z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを，それぞれ証明せよ．

$$|z_1 \overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(4) 複素数 $z = x + iy$　(x, y は実数，i は虚数単位) に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left| e^{2z+i} + e^{iz^2} \right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

(北海道大 2013)　　(m20130103)

0.48 以下の微分方程式の一般解を求めよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $(2x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(北海道大 2014)　　(m20140101)

0.49 2 次の正方行列 A による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ．また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ で与えられる．

(2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2 + s^2 = 1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が, 1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対称行列である．A を直交行列を用いて対角化せよ．

(4) (3) と同じく，$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を考える．この４つの点を頂点とする四角形の面積が，１次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ．

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.50 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ．

(北海道大 2014)　　(m20140103)

0.51 以下の設問に答えよ．ここで，$z(= x + iy)$ は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$，x，y は実数である．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $z^3 = -8i$ を満たす z を全て求め，複素平面上に図示せよ．

(2) 次の関数が正則か否かを調べよ．

(a) $f(z) = z\overline{z} + 1$　　(ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$)

(b) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3}{z}$　　(ただし，$z = 0$ を除く)

(3) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において，$u(x, y) = x^2 + y - y^2$ であるとき，$u(x, y)$ が調和関数であることを示し，$u(x, y)$ を実部に持つ正則関数 $f(z)$ を求めよ．

(北海道大 2014)　　(m20140104)

0.52 デカルト座標系 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が次のように与えられている．このとき，以下の設問に答えよ．

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(1) 次の行列 J のすべての成分を r, θ の式で表せ．

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

(2) 次の積分 A を求めよ．ただし $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

$$A = \int_D x^2\, dxdy$$

(3) 次の行列 G のすべての成分を r, θ の式で表せ．ただし $r > 0$ とする．

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(北海道大 2015)　　(m20150101)

0.53 以下のように定義されるベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に関する設問に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次従属であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ すべてに直交するベクトルを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとした行列に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$$

が解を持つように，実数 s を定めよ．またそのときの解を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150102)

0.54 以下の設問に答えよ．ここで，$i = \sqrt{-1}$ であり，X, Y, t は実数である．

(1) $z = \pm i$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1}$ を求めよ．

(2) $z = it$ のとき，$\dfrac{z-1}{z+1} = X + iY$ とおく，このとき (X, Y) の軌跡を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150103)

0.55 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

$$P(t) = \begin{cases} 1 & ,\ |t| < t_0 \\ 0 & ,\ |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t + 4t_0) + P(t - 4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

(北海道大 2015)　　(m20150104)

0.56 以下の微分方程式の一般解を求めよ．途中の計算手順についても，詳しく記述すること．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(y^2 + y\right)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 9e^{-x}$

(北海道大 2016)　　(m20160101)

0.57 n 次正方行列に関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つの行または列の全ての成分が 0 であるとき，その行列式の値は 0 であることを示せ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{B}$ を n 次正方行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次列ベクトルとする．$\overline{\boldsymbol{B}}^T = -\boldsymbol{B}$ のとき，$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ の値は 0 または純虚数であることを示せ．ここで，$\overline{\boldsymbol{B}}^T$ および $\overline{\boldsymbol{x}}^T$ はそれぞれ $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{x}$ の共役転置行列である．

(北海道大 2016)　　(m20160102)

0.58　周期 2π の周期関数　$f(x) = \dfrac{x^2}{\pi}$　$\left(-\pi \leq x \leq \pi\right)$　のフーリエ級数 $S[f]$ を求めよ．

(北海道大 2016)　　(m20160103)

0.59　一次関数 $f = \dfrac{z-i}{z+2}$ による，z 平面上の単位円 $|z| = 1$ の f 平面への写像を求めよ．
ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(北海道大 2016)　　(m20160104)

0.60　$e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170101)

0.61　以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+6}{x^2-4}dx$　　(3) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(北海道大 2017)　　(m20170102)

0.62　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 6$ の臨界点（停留点 ）を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(北海道大 2017)　　(m20170103)

0.63　以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2}dy$　　(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$,　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + 3y^2 \leqq 1\right\}$

(北海道大 2017)　　(m20170104)

0.64　行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定める．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) n は自然数とする．A^n を求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170105)

0.65　変数 x, y, z の連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1-a & 0 \\ 1+2a & 1+a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ が一意的な解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解をもたないための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限に多くの解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ.

(北海道大 2017)　　(m20170106)

0.66 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $y' = xy - x - y + 1$　　(2) $y'' - 6y' + 5y = 13\cos x$

(北海道大 2017)　　(m20170107)

0.67 次の三つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ に関して以下の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) これらのベクトルが一次独立となるとき, a が満たすべき条件を求めなさい. ただし, a は実数とする.

(2) $a = -1$ のとき, 次の等式を満たす行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい.

$$\boldsymbol{Ap} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Aq} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Ar} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(北海道大 2017)　　(m20170108)

0.68 次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関して以下の設問に答えなさい. ただし, a と b は実数とする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b^2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が異なる二つの固有値をもつための条件を示しなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき, a と b を求めなさい.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が 2 と 4 のとき, A^n を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(北海道大 2017)　　(m20170109)

0.69 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$　（n は 0 または自然数, a は正の定数）とする.
以下の問いに答えなさい.

(1) $I_0 = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a を用いて表しなさい.

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$ の値を a と n を用いて表しなさい.

(北海道大 2017)　　(m20170110)

0.70 二つの複素数 $z_1 = a + bi$ と $z_2 = c + di$　（i は虚数単位, a, b, c, d は実数, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$）に関して以下の設問に答えなさい.

(1) z_1 に z_2 を乗じたところ, その積 $z_1 z_2$ は, 絶対値と偏角がともに z_1 の 2 倍である複素数となった. z_2 を a と b を用いて表しなさい. ただし, 偏角の範囲はすべての実数とする.

(2) z_1 と z_2 が設問 (1) の条件を満たし, かつ, 積 $z_1 z_2$ が純虚数となるとき, z_1 の取り得る値を複素数平面上に図示しなさい.

(北海道大 2017)　　(m20170111)

0.71 次の各設問に答えなさい.

設問 1. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 10\sin x$ の一般解を求めなさい.

設問 2. 微分方程式 $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ の一般解を求め，xy 平面上でどのような図形となるかを説明しなさい.

(北海道大 2018)　　(m20180101)

0.72　次式の三次元ベクトルに関して，次の各設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ q \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を求め，二つのベクトルの関係を調べなさい.

設問 2. $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するときの p と q を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような p と q を求めなさい.

(北海道大 2018)　　(m20180102)

0.73　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい.

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\,\boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，T は転換を表す.

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.74　次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　　(m20180104)

0.75　次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい.

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.76 次の微分方程式を解き，その一般解を求めなさい．ただし，途中の計算手順についても詳しく記述すること．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y^2+3}{3x^2y}$

(2) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 9e^{2x} = 4\sin x$

(北海道大 2019)　　(m20190101)

0.77 次の連立 1 次方程式について，以下の設問に答えなさい．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ただし，a および b は任意の実数とする．また，途中の計算手順についても詳しく記述すること．

(1) この連立方程式が解を持たないために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．

(2) この連立方程式が一意の解を持つために実数 a および b が満たすべき条件を求めなさい．　また，そのときの解を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190102)

0.78 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次従属となるとき，以下の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) p を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で $\boldsymbol{c}$ を表しなさい．

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに直交し, 大きさが 1 のベクトルを求めなさい．

(4) (3) で求めたベクトルと, $\boldsymbol{c}$ の内積を求めなさい．

(5) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を求めなさい．

(北海道大 2019)　　(m20190103)

0.79 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1) 次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2) 次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい．

$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3) $g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(4) $h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019) (m20190104)

0.80 以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$

(北海道大 2020) (m20200101)

0.81 次の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ について, 以下の設問に答えよ

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ 2p \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ が 1 次従属になるとき, p の値を求めなさい. また, $\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表しなさい.

(北海道大 2020) (m20200102)

0.82 次の行列 A について, 以下の設問に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めなさい.

(2) 各固有値に属する固有ベクトル（ただし大きさが 1）を求めなさい.

(北海道大 2020) (m20200103)

0.83 次式をマクローリン展開したとき, x の 0, 1, 2, n 次の項を求めなさい.

$\sqrt{e^{3x}}$

(北海道大 2020) (m20200104)

0.84 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leqq x < \pi)$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

について, 次式のようにフーリェ級数展開したとき, 各係数 a_0, a_n, b_n を求めなさい.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(北海道大 2020) (m20200105)

0.85 複素数 z について, 以下の設問に答えなさい. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) 方程式 $z^3 = 27$ を解きなさい.

(2) z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 次の 1 次変換により得られる w の軌跡を描きなさい. $w = \dfrac{1 + iz}{1 + z}$

(北海道大 2020)　　(m20200106)

0.86　3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい．

平面 1　:　$x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2　:　$x+y=0$

(1)　平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい．

(2)　(1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること．

(3)　(1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210101)

0.87　次の行列 A について，以下の設問に答えなさい．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

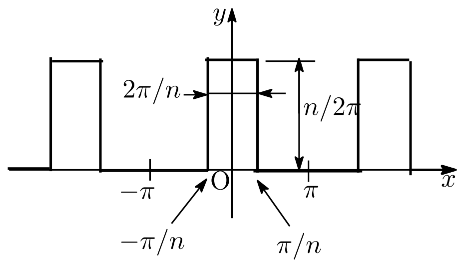
(1)　行列 A の行列式を求めなさい．

(2)　行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(3)　行列 $2A$ の行列式と固有値を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210102)

0.88　右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい．



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$$

(1)　$n=2$ のとき，a_k　$(k\geqq 1)$ を求めなさい．

(2)　2 以上の整数 n について，a_k　$(k\geqq 1)$ を n の関数として表しなさい．

(3)　(2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.89　1 の 3 乗根のうち 1 でない解を ω,ω' とする．以下の設問に答えなさい．

(1)　$\omega\omega'=1$ を示しなさい．

(2)　$\omega^2=\overline{\omega}=\omega'$ を示しなさい．ただし，$\overline{\omega}$ は ω の複素共役を表す．

(3)　$\omega^{100}+\omega^{50}+1$ を求めなさい．

(4)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\omega^k$ を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210104)

0.90 (1) 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$$

(北海道大 2022)　　(m20220101)

0.91 次の 3 次元ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について，以下の設問に答えなさい．

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2p \\ 3 \\ p \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$ が直交するとき，p の値を求めなさい．

(2) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次従属になるとき，p の値を求めなさい．また $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合で表しなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220102)

0.92 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の設問に答えなさい．ただし，a は任意の実数とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が正則となるための a の条件を求めなさい．また，このとき逆行列を a を使って表しなさい．

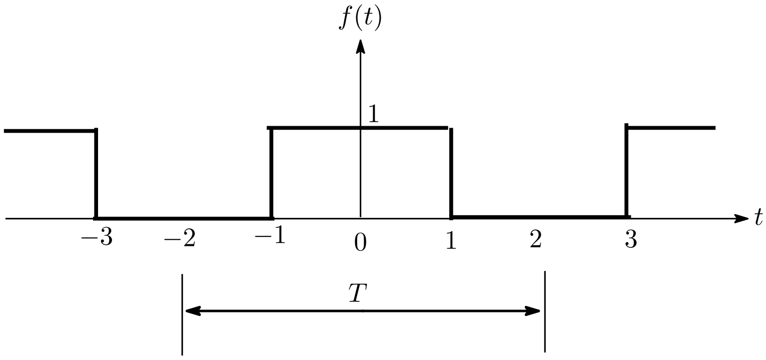
(2) $a = 3$ のとき，固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220103)

0.93 次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい．



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい．

(2) $T = 4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220104)