[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：福井大

0.1 次の曲線に与えられた点から引いた接線の方程式を求めなさい．

(1) $y = \log x$ ， 点 $(0, 0)$

(2) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ ， 点 $(2, 2)$

(福井大 2000)　(m20002401)

0.2 関数 $y = \dfrac{bx+1}{x^2+ax}$ が 2 つの極値 -1 および -4 を持つように a, b の値を定めなさい．

(福井大 2000)　(m20002402)

0.3 区間 $0 \leq x \leq \pi/2$ において，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$\sin x \leq x$

(福井大 2000)　(m20002403)

0.4 次の関数の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\, dx$

(2) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\, dx$

(3) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x} \log x\, dx$

(福井大 2000)　(m20002404)

0.5 倒立した円錐形の容器に水を注ぐ．いま，容器の上面の半径を R cm，深さを H cm とする．水は，t 秒後には $at^2\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$ の割合で注がれる．

(1) t sec 後の容器内の水面の上昇率を求めなさい．

(2) 何秒後に容器は水で満たされるか．

(福井大 2000)　(m20002405)

0.6 関数 $f(X) = \sqrt{3}\sin X + \cos X$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(X)$ の導関数 $f'(X)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ における最大値 f_M と最小値 f_m を求めなさい．

(3) 関数 $f(X)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(X) dX$ を求めなさい．

(4) 関数 $f(X)$ の区間 $0 \leq X \leq \pi$ でのグラフの概略を示しなさい．

(福井大 2000)　(m20002406)

0.7 k を正の整数，α を複素数とするとき，微分方程式

$$x\frac{d}{dx}f(x) - \alpha\frac{d}{dx}f(x) + kf(x) = 0$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を解け．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ の値が有限となるような解 $f(x)$ をもつための，α の条件を求めよ．

(福井大 2000)　(m20002407)

0.8 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x-3}$ を解け．さらに，解曲線を図示せよ．

(福井大 2000)　　(m20002408)

0.9 微分方程式　$x \cdot \cos\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -x + y \cdot \cos\dfrac{y}{x}$　を解け．

(福井大 2000)　　(m20002409)

0.10 ベクトル $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \\ i \end{pmatrix}$ ，$b = \begin{pmatrix} 1+0.5i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

であるとき，$a{+}b, a{-}b,\ (a,b), (b,a), \|a{+}b\|,\ \|a{-}b\|, \|a\|, \|b\|$ を計算し，三角不等式 ($\|(a,b)\| \leqq\ \|a\|{+}\|b\|$) およびシュワルツの不等式 ($|(a,b)| \leqq\ \|a\| \cdot \|b\|$) が成り立つことを示せ．

(福井大 2000)　　(m20002410)

0.11 ２つのベクトル $\boldsymbol{a} = (1,2,2)$ ，　$\boldsymbol{b} = (2,0,-1)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを求めよ．

(福井大 2000)　　(m20002411)

0.12 ３つの点 $A(0,1,1),\ B(-1,-1,2),\ C(2,3,1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002412)

0.13 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，　$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ とするとき，$AX = B, YA = B$ を満たす行列 X, Y を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002413)

0.14 直線が $y = x - 1$ ある．

(1) この直線を原点のまわりに角 θ ($0° \leqq \theta \leqq\ 180°$) だけ回転して得られる直線を求めなさい．

(2) この回転した直線が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と交わらないための角 θ の範囲を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002414)

0.15 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および固有値を求めよ．

また，この行列の対角化は可能かどうか調べよ．

(福井大 2000)　　(m20002415)

0.16 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある．

(1) 行列 A の固有値を λ とすると，λ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい．

(2) 前問の行列 A の固有値を求めなさい．

(3) その行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002416)

0.17 次の 2 つのベクトルがある．

$$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ が $\begin{pmatrix} a_2b_3-b_2a_3 \\ a_3b_1-b_3a_1 \\ a_1b_2-b_1a_2 \end{pmatrix}$ となることを誘導しなさい．

(福井大 2000)　　(m20002417)

0.18 次の複素数を極形式で表せ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ である．

(1) $1+j$

(2) $(1+\sqrt{3}j)/(1+j)$

(福井大 2000)　　(m20002418)

0.19 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012401)

0.20 以下の関数の 1 次導関数を求めなさい．

(1) x^ne^{-x}　　(2) x^x　　(3) $\cos^{-1}x^3$　　(4) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$　　(5) $\sin^{-1}(n\sin x)$

(福井大 2001)　　(m20012402)

0.21 口の直径 $8cm$，高さ $12cm$ の円錐形のろ過器に毎秒 $3cc$ の割合で注入される溶液が毎秒 $1cc$ の割合でろ過されるものとすれば，溶液の深さ $6cm$ となった瞬間において液面の上がる速さは毎秒何 cm か．

(福井大 2001)　　(m20012403)

0.22 以下の関数の増減，凹凸，極値を調べ，このグラフの概形を描け．また，このグラフに変曲点があればそれも調べよ．

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

(福井大 2001)　　(m20012404)

0.23 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int e^{kx}x^3dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(福井大 2001)　　(m20012405)

0.24 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}}x\cos x^2dx$

(福井大 2001)　　(m20012406)

0.25 $f(x)$ が $x=a$ で 2 回微分可能のとき，テーラーの定理を用いて，以下の式が成立することを示しなさい．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

(福井大 2001)　　(m20012407)

0.26 曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (1,2,5) における単位法線ベクトルを求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012408)

0.27 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D 2x|y|\ dxdy,\quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1,\ x^2 + y^2 \leqq 2x\}$$

(福井大 2001)　　(m20012409)

0.28 質量の m 物体が，速度の二乗に比例する抵抗力を受けながら重力場を落下しているとする．落下し始めてから十分時間が経ったときの落下速度を求めなさい．ただし，重力の加速度を $g = 9.8\ m/s^2$，抵抗力の比例係数を $c = 2\ Ns^2/m^2$ とする．

(福井大 2001)　　(m20012410)

0.29 次のような微分方程式の一般解を導きなさい．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$

(福井大 2001)　　(m20012411)

0.30 次の微分方程式を解け．

(1) $2xydy + (1 - y^2)dx = 0$　　(2) $xdy/dx + 2y = x^2$

(2) $d^2y/dx^2 - 3dy/dx + 2y = e^{3x}$　　(4) $d^2y/dx^2 + y = \cos x$

(福井大 2001)　　(m20012412)

0.31 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.32 三つのベクトル $\mathbf{A}\ (2, -3, 4)$，$\mathbf{B}\ (1, 2, -1)$，$\mathbf{C}\ (3, -1, 2)$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012414)

0.33 $(0, -2, 0)$ を中心とする球上の点 $(1, -3, \sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が 3 つの座標軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.34 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，対称行列と交代行列の和として表しなさい．

(福井大 2001)　　(m20012416)

0.35 以下の行列式を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(福井大 2001)　　(m20012417)

0.36 以下に二つの線型変換がある．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ．

(2) A，B による合成変換の行列を求めよ．

(3) (2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ．

(4) (2) で求めた合成変換によって，直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか．

(福井大 2001)　　(m20012418)

0.37 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012419)

0.38 次の行列について以下のことを答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $v = (1, 2)$ としたときの，Av を求めなさい．

(2) A の行列式 $|A|$ を計算しなさい．

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012420)

0.39 点 (x_1, y_1) から，直線 $ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の長さは
$\dfrac{|\ ax_1 + by_1 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で表されることを証明せよ．

(福井大 2003)　　(m20032401)

0.40 3 直線 $4x - 3y + 3 = 0$，$x - 4y + 4 = 0$，$-3x - y + 14 = 0$ によって作られる三角形について，次のものを求めよ．

(1) 面積　　(2) 外心の座標

(福井大 2003)　　(m20032402)

0.41 下記の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ．ただし，a, b は定数とする．

(1) $f(x) = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$　　(2) $f(x) = x^{ax+b}$

(福井大 2003)　　(m20032403)

0.42 次の関数のグラフを描きなさい．　　$y = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$

(福井大 2003)　　(m20032404)

0.43 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \sqrt[3]{x^2(x - 1)}$　　(2) $y = \sin(3x + 2)$　　(3) $y = \log(\sin x^2)$

(福井大 2003)　　(m20032405)

0.44 一般に，関数 $y = f(x)$ について，x の微小増加量 Δx にともなう y の微小増加量を Δy とすると，導関数 dy/dx は近似的に $\Delta y/\Delta x$ を表す．このことを利用して，下記の問いに答えよ．

(1) 空気中の音速 u と絶対温度 T との間に，$u = \sqrt{kRT}$ の関係が成り立つものとする．ただし，比熱比 k と気体定数 R は定数である．このとき，du/dT を求めよ．

(2) 空気の絶対温度を 2% 増やすと，音速は近似的に何 % 増加するか答えよ．

(福井大 2003)　　(m20032406)

0.45　下記の関数 $y=f(x)$ について，極値を求めよ．

$$f(x)=\frac{ax}{x^2+a^2} \qquad \text{（ただし，} a \text{ は正の定数）}$$

(福井大 2003)　　(m20032407)

0.46　底面の半径 1，高さ 1 である直円柱がある．この底面の半径を含み，底面と 45° をなす平面で直円柱を 2 分するとき，小さいほうの体積を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032408)

0.47　次の関数を積分しなさい．

(1)　$y=\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$　　(2)　$y=x\sin x^2$　　(3)　$y=\dfrac{1}{\cos x}$

(福井大 2003)　　(m20032409)

0.48　次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{dx(t)}{dt}=u(t) \qquad (x(0)=0)$$

(1)　$u(t)=1$ としたときの解 $x(t)$ を求めよ．

(2)　$u(t)=-2x(t)+1$ としたときの解 $x(t)$ を求め，(1) の結果との違いについて述べよ．

(福井大 2003)　　(m20032410)

0.49　次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}-ax(t)=0 \qquad \text{（} a \text{ は非零の実定数）}$$

(1)　次に示す初期条件の下で解 $x(t)$ を求めよ．また，$a>0$，$a<0$ に対する解 $x(t)$ の特徴を明らかにせよ．

$$x(0)=x_0\ ,\ \ \frac{dx}{dt}(0)=0$$

(2)　$a>0$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ を満たす非零の初期条件を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032411)

0.50　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-4&4\\1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&0\\5&3\end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{AX}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ となる正方行列 $\mathbf{X}$ を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032412)

0.51　次の行列 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ がある．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2\\6&3\\5&4\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&3&4\end{pmatrix}$$

(1)　$4\mathbf{A}-3\mathbf{B}$ を計算しなさい．

(2)　$\mathbf{CD}$ と $\mathbf{DC}$ の計算をしなさい．

(福井大 2003)　　(m20032413)

0.52　次の同次連立一次方程式がある．

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0\\ -3x_1+x_2+x_3=0\\ -2x_1-x_2+4x_3=0\end{cases}$$

(1) 係数行列のランク (rank) はいくらか.

(2) この連立方程式の解の自由度はいくらか.

(3) この同次連立一次方程式の非自明な解を求めなさい.

(福井大 2003) (m20032414)

0.53 次の行列 $\mathbf{B}$，ベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ がある．3 次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1,y_1,z_1) の点を表し，ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1,0,0)$ の点を表し，ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す.

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ \text{ここで}t\text{は任意の実数},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_1}=\mathbf{Bb}$ によって，ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい.

(2) 線形変換（一次変換）$\mathbf{y_2}=\mathbf{Bc}$ によって，ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか．ベクトル $\mathbf{y_2}=\mathbf{Bc}$ を図に描き，どのような形か説明しなさい.

(福井大 2003) (m20032415)

0.54 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ の表わす 1 次変換によって，直線 $x-y+1=0$ が直線 $x+2y+3=0$ に写されるとき，a,b の値を求めよ.

(福井大 2003) (m20032416)

0.55 (1) 次の定積分を示せ．m と n は整数とする.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mxdx=0\ ,\ \int_0^{2\pi}\cos nxdx=0$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases} 0\,(m\neq n) \\ \pi\,(m=n) \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases} 0\,(m\neq n) \\ \pi\,(m=n) \end{cases}$

(2) $x(t)$ を周期 T の周期関数とするとき，$x(t)$ を次のように書くことができる.

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi k}{T}t+b_k\sin\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

このとき，(1) の知見を活用し，$a_k\,(k\geq 0)$, $b_k\,(k\geq 1)$ を $x(t)$ を用いて表せ.

(福井大 2003) (m20032417)

0.56 10 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある．このくじを A,B の順に 2 人が 1 本づつ引くとき，次の確率を求めなさい.

(1) A が当たる確率 (2) A,B が共に当たる確率

(2) A が当たらず，B が当たる確率 (4) B が当たる確率

(福井大 2003) (m20032418)

0.57 10 進数の 34 を 2 進数で表記しなさい.

(福井大 2004) (m20042401)

0.58 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

（福井大 2004）　(m20042402)

0.59　次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y=x^x \quad (x>0)$　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+2}$

(2) $y=x^5\log x$　　(4) $y=\arcsin x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

（福井大 2004）　(m20042403)

0.60　$y=\dfrac{1}{5}x^5-x^4+x^3+2$ のグラフの概形を, xy 直交座標平面上に図示しなさい. また, 極値を求めなさい.

（福井大 2004）　(m20042404)

0.61　極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^2}{2-6x+3x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

（福井大 2004）　(m20042405)

0.62　次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $y=x^2e^{3x}\sin x$　　(2) $y=e^{\sqrt{x}}$

（福井大 2004）　(m20042406)

0.63　x,y がパラメータ表示により

$x=a\cos^3 t$

$y=b\sin^3 t$

で与えられているとき, dy/dx を求めなさい. ただし, $a\neq0$, $b\neq0$ とする.

（福井大 2004）　(m20042407)

0.64　以下の積分 $I_1\sim I_4$ を求めなさい.

$I_1=\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$　　$I_2=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\,\sin nx dx$　(m,n は正の整数)

$I_3=\displaystyle\int x^2\sin ax dx \quad (a\neq0)$　　$I_4=\displaystyle\int_0^{\pi/2}x^2\sin 2x dx$　(I_4は有効数字 2 桁で求めなさい.)

（福井大 2004）　(m20042408)

0.65　半径 r の円の面積を積分により計算し, その値が πr^2 となることを証明しなさい.

（福井大 2004）　(m20042409)

0.66　次の不定積分を求めなさい.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$$

（福井大 2004）　(m20042410)

0.67　定数 $a\neq0$ のとき，次の定積分の値を求めなさい.

$$\int_0^{1/a}e^{-ax}dx$$

（福井大 2004）　(m20042411)

0.68 水面上を移動している物体が, $5m/$秒の割合で減速している. 速度 $20m/$秒のときから静止するまでに移動する距離を求めなさい.

（福井大 2004） (m20042412)

0.69 物体を空中で自然に落下させると, 速度に比例する空気の抵抗を受ける. 落下する間の重力の加速度 g は一定であるとすると, はじめから t 秒後の物体の速度を ν として, 次の微分方程式が成り立つ（地球の中心へ向う方向を正の向きとする）.

$$\frac{d\nu}{dt} = g - \frac{k}{m}\nu \quad (m \text{ は物体の質量}, \ k \text{ は定数})$$

この微分方程式を解いて, 速度 ν および t 秒後までに落下する距離を求めなさい. ただし, 物体の初速度は 0 とする.

(福井大 2004) (m20042413)

0.70 微分方程式

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

を解きなさい. ただし, $x \neq 0$, $y \neq 0$ とする.

(福井大 2004) (m20042414)

0.71 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = k$ (一定, $k \neq 0$) のとき, xyz 直交座標系上の平面 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ が, 一つの定点を通ることを証明し, その定点を求めなさい. ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ とする.

（福井大 2004） (m20042415)

0.72 次の行列式の値を, 因数分解した形で求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

（福井大 2004） (m20042416)

0.73 方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & -10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

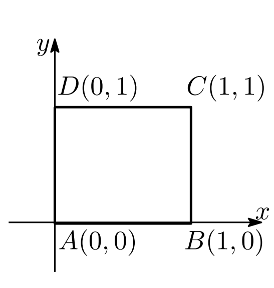
を解いて a, b, c, d を求めなさい.

(福井大 2004) (m20042417)

0.74 xy 平面上における同一平面上への一次変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている. xy 平面上の図形 $ABCD$ が, どのような図形に変換されるか図示しなさい.



(福井大 2004) (m20042418)

0.75 次の 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ からなる行列 A がある.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A のランク（階数）はいくらか.

(2) 次のベクトルと行列の積を計算しなさい.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3) 行列 A から得られる 2 つの固有ベクトルを求めなさい.

(4) 正規化された固有ベクトルを書きなさい.

(5) 正規化された 2 つの固有ベクトル（列ベクトル）からなる 2 行 2 列の正方行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい.

(6) 列ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする. ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb})$ を計算しなさい. ただし, ${}^t(\boldsymbol{Pb})$ は $\boldsymbol{Pb}$ の転置を意味している.

(7) ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb}) = \dfrac{3}{2}$ が表す図形を図 B に描きなさい. そして, その図形がどのような形状か詳しく説明しなさい.

(福井大 2004)　　(m20042419)

0.76 赤球 5 個と白球 3 個が入った袋 A と, 赤球 2 個と白球 6 個が入った袋 B がある. 目隠しをして, いずれかの袋から 1 球取り出すとき, 白球を取り出す確率を求めなさい.

(福井大 2004)　　(m20042420)

0.77 表に示すように, xy 直交座標平面上に (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ で表される 5 個の点がある.

$$\sum_{i=1}^{5} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にする条件で, a と b を求め, 5 個の点に対する近似直線を求めなさい.

i	x_i	y_i
1	2	3
2	3	4
3	6	5
4	9	5
5	10	8

(福井大 2004)　　(m20042421)

0.78 次の関数の n 階導関数を求めよ.

(1) $x^2 e^x$　　(2) $\sin x$　　(3) $x^2 \sin x$

(福井大 2005)　　(m20052401)

0.79 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ. （注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(2) (1) の関係式で $n = 1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005)　　(m20052402)

0.80 次の不定積分を求めよ.

$$\int x^2 \sin x dx$$

(福井大 2005) (m20052403)

0.81 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t}\cos t\,, \quad y = e^{-t}\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(福井大 2005) (m20052404)

0.82 密度 ρ が一様な半径 a の 1/4 円板

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$$

の重心位置を求めよ.

(福井大 2005) (m20052405)

0.83 次の行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ がある. 以下の計算をせよ. ただし, 計算できない場合は, 計算できないと記せ.

$$\boldsymbol{a} = (3 \quad 4 \quad 5) \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{aB} =$

$\boldsymbol{Ba} =$

$\boldsymbol{CD} =$

$\boldsymbol{DC} =$

(福井大 2005) (m20052406)

0.84 次の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣接する 2 辺とする平行四辺形がある. この平行四辺形の面積を求めよ. ただし, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は, 各々 x , y , z 方向の基本ベクトルである.

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1\,, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$

(福井大 2005) (m20052407)

0.85 次の行列に対応する固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2005) (m20052408)

0.86 次のような微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = ax - b \qquad (a\,,\ b > 0)$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - a^2 \qquad (a > 0)$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5\sin 4t$

(福井大 2005) (m20052409)

0.87 空中を速度の二乗に比例した空気抵抗を受けながら落下している質量が m $[kg]$ の物体の運動方程式は, 地表から鉛直上向きに x 座標をとれば,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg$$

で与えられる. ただし, g $[m/s^2]$ は重力加速度の大きさ, c $[kg/m]$ は比例定数とする.

十分高い上空から落下させたときの終端速度 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt}$ を求めよ.

(福井大 2005)　　(m20052410)

0.88 2 行 2 列の行列

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(y) = \boldsymbol{A}(x+y)$

(2) $\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{A}(x-y)$

(3) $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(y) = \boldsymbol{B}(x+y)$

(4) $\big(\boldsymbol{A}(x)\big)^n = \boldsymbol{A}(nx)$

(福井大 2005)　　(m20052411)

0.89 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = -2xy^2$　　　　(2) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

(福井大 2005)　　(m20052412)

0.90 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}dx$

(福井大 2005)　　(m20052413)

0.91 $y = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ とすると, y はいくらになるか求めよ. ただし $r \neq 1$ とする.

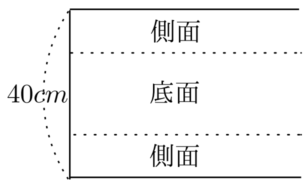
(福井大 2005)　　(m20052414)

0.92 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

(福井大 2005)　　(m20052415)

0.93 幅 $40cm$ のアルミ板を図の点線のように折り曲げて, 水路を作りたい. 水路の断面積が最大になるようにするには, 端から何 cm のところで折り曲げればよいか. また, このときの断面積を求めよ.



(福井大 2005)　　(m20052416)

0.94 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-2}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(福井大 2005)　　(m20052417)

0.95 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(福井大 2005) (m20052418)

0.96 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \log\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ (2) $y = (x^2+2x)\log x$ (福井大 2005) (m20052419)

0.97 a, b を正の数とするとき, 以下の関係が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(福井大 2005) (m20052420)

0.98 一枚の硬貨を投げたとき, 5 回投げてちょうど 2 回, 表が出る確率を求めよ．

(福井大 2005) (m20052421)

0.99 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つ．
この式の両辺を微分し，微分した左辺と右辺が等しくなることを示せ．
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式 “ $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ ” を使え．

(福井大 2006) (m20062401)

0.100 $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ のとき，$t = t_0$ に対応する点 (x_0, y_0) における接線と法線の方程式を求めよ．

(福井大 2006) (m20062402)

0.101 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a > 0$, $|x| \leq a$
ただし，必要に応じて三角関数の 2 倍角の公式
“ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ および $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ” を使え．

(福井大 2006) (m20062403)

0.102 $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b > a > 0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる体積を求めよ．

(福井大 2006) (m20062404)

0.103 4 つの未知変数 x, y, z, w からなる次の連立一次方程式が解をもつために，スカラー a, b, c が満たすべき条件を求めよ． $\begin{cases} x+2y+z+3w = a \\ -2x+3y+5z+w = b \\ 3x+4y+z+7w = c \end{cases}$

(福井大 2006) (m20062405)

0.104 次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある．行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形 $2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 4$ が異なる図形にうつされる．

(1) 変換後の図形の式を求めなさい． (2) 変換後の図形を描きなさい．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006) (m20062406)

0.105 次の微分方程式の解を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t^2}$ ただし，$x(1) = 1$ (2) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ ただし，$y(1) = 0$

(3) $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ ただし，$y(1) = 0$

(福井大 2006) (m20062407)

0.106 次のような微分方程式で与えられる曲線と直交する曲線の微分方程式を求め，その曲線の概形を示せ．

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$ (2) $y' = -\dfrac{x}{2y}$

(福井大 2006) (m20062408)

0.107 次の行列式を計算せよ． $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2006) (m20062409)

0.108 次の行列 A について，以下の問いに答えよ． $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めよ． (2) A を対角化する正則行列 P を求めて，A を対角化せよ．

(福井大 2006) (m20062410)

0.109 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式（$\cos\theta + i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006) (m20062411)

0.110 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ (2) $x(x-y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ (3) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$ (4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大 2006) (m20062412)

0.111 次の値を求めなさい．

(1) $(x^3y^2)^{-\frac{2}{3}} \times\ x^2y^{\frac{4}{3}}$ (2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ (3) $4\log_2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + \log_2\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $5^{\log_5 7}$ (5) $\log_2 3 \cdot \log_{27} 25 \cdot \log_5 16$

(福井大 2006) (m20062413)

0.112 $y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 3$ において，x の定義域が $0.5 \leq x \leq 8$ とする．この時

(1) $s = \log_2 x$ とするとき，s の範囲を示せ．

(2) y を s の関数として表し，そのグラフの概形を示せ．

(3) y の最小値と最大値と，その各々を与える x を求めよ．

(福井大 2006) (m20062414)

0.113 $y = a\sin x + b\cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) 上の関数が，$y = A\sin(x+\theta)$ の形に変換できることを示しなさい．

(2)　$a=1,\ b=\sqrt{3}$ の時，A および θ の値を求めよ．

(3)　$0 \leq x \leq \pi$ とする時，関数の最大値と最小値，ならびにその時の x の値を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062415)

0.114　次の関数を微分しなさい．

(1) $y=\sqrt{x}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x+1}$　　(3) $y=\cos x\sin^2 x$

(4) $y=e^{x^2}$　　(5) $y=x^{3x}$

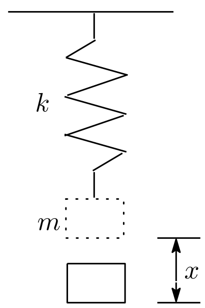
(福井大 2006)　　(m20062416)

0.115　次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(2) $\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$　　(3) $x\log x$

(福井大 2006)　　(m20062417)

0.116　図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m のおもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は，次の運動方程式によって表現できる．



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

(1)　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ は，上の運動方程式の一般解であることを示しなさい．

(2)　$m=0.16(kg),\ k=4(kg/sec^2)$ とするとき，おもりの運動の周期を求めなさい．

(3)　$t=0$ において，$x=2(cm),\ \dfrac{dx}{dt}=0(cm/sec)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3 秒間の変位のグラフのおよその形を示せ．

(福井大 2006)　　(m20062418)

0.117　点 $P(x,y)$ は，時間 t の時，$x=a\cos(2\pi t),\ y=a\sin(2\pi t)$ の位置にあるものとする．

(1)　$a=e^{-t}$ とする時，$-1\leq t\leq 1$ の範囲で，時間 t に対する a および x の描く図形のおよその形を示せ．

(2)　$-1\leq t\leq 1$ の範囲で，点 P の描く図形のおよその形を示せ．

(3)　$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．　　(4)　点 P の時刻 t における速度を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062419)

0.118　木材に含まれる炭素の中には，放射性元素である質量数 14 の ^{14}C が含まれている．生きている木に含まれる ^{14}C の割合は一定であるが，伐採された瞬間から ^{14}C は自然崩壊し消失していく．伐採されてから t 年経過した時の，^{14}C の個数を y とすると，a を定数として $\dfrac{dy}{dt}=-ay$ の関係が成立する．

(1)　伐採された瞬間に含まれていた ^{14}C の個数を y_0 とし，上式を積分しなさい．

(2)　y_0 が半分に減少するまでの時間を $6,000$ 年とする時，a を求めなさい．

(3)　伐採されてからある時間経過した木材中の ^{14}C の個数が $y=0.125y_0$ の時，経過年数を求めなさい．

(福井大 2006)　　(m20062420)

0.119　次のベクトルと行列の演算を行え．

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2)　$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3)　${\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^T \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(4)　$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(福井大 2006)　　(m20062421)

0.120　行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する設問である．

(1) A, λ, $\boldsymbol{x}$ の間に成り立つ関係を示せ．　　(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ．

(福井大 2006)　　(m20062422)

0.121　一つのサイコロを振って，出る目の，平均，分散および標準偏差を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062423)

0.122　$\left(2x^2 - \dfrac{1}{3x}\right)^8$ の展開式において，x^7 の係数を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062424)

0.123　次の計算を行え（途中経過も書くこと）．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{e^{2x^2} - 1} =$　　(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right) =$

(福井大 2007)　　(m20072401)

0.124　関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ．

(1)　$f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ．

(2)　一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）．

(3)　(2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x=0$ で無限級数にテーラー展開せよ．

(福井大 2007)　　(m20072402)

0.125　二次元直交座標 (x, y) を，以下の式に従い極座標 (r, θ) に変換するものとする．

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$　　ただし，$r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ として，以下の設問に答えよ．

(1)　r および θ を，x および y を用いて表せ（答のみでよい）．

(2)　$\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(3)　(2) の結果を用いて，$\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$ を計算せよ（途中経過も書くこと）．

(福井大 2007)　　(m20072403)

0.126 次の積分を求めよ．（途中の計算式も書くこと） $\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (\ a>0\ )$

(福井大 2007) (m20072404)

0.127 2 つの放物線 $y^2=2x$, $x^2=2y$ で囲まれた部分の面積を求めよ．（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2007) (m20072405)

0.128 一様（一定）な密度をもつ次の図形の重心の座標 $(x_1\ ,\ y_1)$ を求めよ（途中の計算式も書くこと）

$x^2+y^2 \leqq\ a^2 \qquad (\ a>0\ ),\quad y \geqq\ 0$

(福井大 2007) (m20072406)

0.129 次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ． $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

ここで， $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列式の値を求めよ． (2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(3) 上の連立方程式の一般解を求めよ．

(福井大 2007) (m20072407)

0.130 (1) 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ は一次従属か一次独立であるか，理由を示して述べよ．

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(福井大 2007) (m20072408)

0.131 逆行列をもつ行列のことを正則行列 (regular matrix) という．

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{AB}$ も正則行列であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{A}$ が正則行列のとき，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ が正則行列なら，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ も正則行列であることを示せ．ここで $\boldsymbol{E}$ は単位行列を表す．

(福井大 2007) (m20072409)

0.132 次のような微分方程式について，問に答えよ． $x\dfrac{dy}{dx}=y^2-9$

(1) 一般解を導け． (2) $y(1)=0$ であるような解を求めよ．

(福井大 2007) (m20072410)

0.133 次のような微分方程式について，問に答えよ． $x^2\dfrac{dy}{dx}=y^2+9$

(1) 一般解を導け． (2) $y(1)=0$ であるような解を求めよ．

(福井大 2007) (m20072411)

0.134 3次元の列ベクトルのつくる線形空間（R^3）において,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をベクトルとする．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次従属であるか一次独立であるかを示せ.

(2) もし一次従属であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は，直線上にあるか，あるいは平面上にあるかを示せ.

(3) もし一次独立であるなら，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を正規直交化せよ．ただし，正規直交化とは $\vec{p}$ は $\vec{a}$ の一次結合，$\vec{q}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合，$\vec{r}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の一次結合であるような正規直交系 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ をいう.

(福井大 2007) (m20072412)

0.135 微分方程式 $\dfrac{df(x)}{dx} = f(x)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 一般解を求めよ. (2) 初期条件 $f(0) = 1$ のもとに解け.

(福井大 2007) (m20072413)

0.136 関数 $g(x) = \cos x$ を，$x = \dfrac{\pi}{2}$ の周りで Taylor 展開せよ.

(福井大 2007) (m20072414)

0.137 (1) 関数 $f(x) = \log(1 + x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008) (m20082401)

0.138 関数 $f(x) = (x^2 + 4x)e^{-x}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 1 階の導関数 $f'(x)$，2 階の導関数 $f''(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ.

(2) $0 \leq x < \infty$ の範囲で増減表を書き，$y = f(x)$ のグラフを描け.

(福井大 2008) (m20082402)

0.139 (1) 次の関数を積分せよ． （途中の計算式も書くこと）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \qquad \text{ヒント : } \sqrt{x^2 + a} = t - x \text{ とおく.}$$

(2) 次の定積分を求めよ． （途中の計算式も書くこと)}

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad (a > 0)$$

なお，必要に応じて三角関数の二倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いよ.

(福井大 2008) (m20082403)

0.140　円 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる立体の体積 v を求めよ．（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2008)　　(m20082404)

0.141　次の行列 $\boldsymbol{B}$ がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}^3$ を計算せよ．

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{B}$ の絶対値の小さい方の固有値に対応する固有ベクトルとする時，$\boldsymbol{B}^{10}\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082405)

0.142　次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \qquad \text{ここで,} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は下の 3 つの列ベクトルを使って，次のように表現できる．

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \qquad \text{ここで,} \qquad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 連立方程式の解を求めよ．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属か答えよ．もしそれらが一次従属なら，$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合として表現せよ．

(福井大 2008)　　(m20082406)

0.143　次のような微分方程式の一般解をできるだけくわしく誘導せよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+9x=0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-9x=0$　　(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$

(福井大 2008)　　(m20082407)

0.144　次のような完全微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $ydx+xdy=0$　　ただし，変数分離法を用いないこと．

(2) $(x^2-2xy-y^2)dx+(3y^2-2xy-x^2)dy=0$

(福井大 2008)　　(m20082408)

0.145　(1) 次の行列の逆行列を求めよ．　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) α を実数とする. このとき, 行列　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　について，以下の問いに答えよ．

(a) A の行列式を計算せよ．　(b) A の階数を求めよ．

(3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属（一次従属）となるような x の値を求めよ．

(福井大 2008)　(m20082409)

0.146 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている．

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

ここで，α は実数であるとし，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 5,\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy(0)}{dx} = -2$ とするとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) $x \to \infty$ とするとき，$\alpha > 0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = y_p$）．そのときの y_p の値を求めよ．

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき，$y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ．

(福井大 2008)　(m20082410)

0.147 次の関数を因数分解しなさい．

(1) $9x^4 - 2x^2y^2 + y^4$　(2) $x^3 - 7x - 6$　(3) $x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

(福井大 2008)　(m20082411)

0.148 次の値を求めよ．

(1) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$　(2) $\log_3 9\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{5}$　(3) $\left(\sqrt[3]{27^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

(福井大 2008)　(m20082412)

0.149 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\cos x\Big)^{\frac{1}{x^2}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(1 + 8x\Big)^{\frac{1}{x}}$

(福井大 2008)　(m20082413)

0.150 次の関数を微分しなさい．

(1) $y = \sin^{-1} x$　(2) $y = x^x$　(3) $y = \log\sqrt{x^2 + a^2}$

(4) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$　(5) $y = a^x$

(福井大 2008)　(m20082414)

0.151 次の曲線の概形を図示せよ．　$y = x^2e^{-x}$

(福井大 2008)　(m20082415)

0.152 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　(2) $\dfrac{1-x}{x^2}$　(3) $\tan x$　(4) $e^x \cos x$

(福井大 2008)　(m20082416)

0.153 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt\, dt$ を以下の手順で求めよ．ただし，m, n 自然数とする．

(1) $\sin mt\ \cos nt$ を三角関数の和または差の形に変形せよ．

(2) $m = n$ の時の定積分を求めよ.

(3) $m \neq n$ の時の定積分を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082417)

0.154 関数 $y = e^{-x}\sin x$, $x \geq 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 4\pi$ の範囲で，この関数の概形を示せ．このとき $y = e^{-x}$ の概形も示せ.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で，この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) k を整数とする時，$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で，この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x \geq 0$ の範囲で，グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082418)

0.155 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の計算をしなさい.

(1) AB　　(2) BA　　(3) $2A + 3\,{}^tB$　（ただし，${}^tB$ は B の転置行列を示す）

(福井大 2008)　　(m20082419)

0.156 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を λ，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする時，以下の問いに答えよ.

(1) $A, \lambda, \boldsymbol{x}$ の間に成立する関係を示せ.

(2) 固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082420)

0.157 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める．以下の各問に従って解答せよ.

なお，必要に応じて右下の公式を利用せよ.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array}\right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ.

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ.

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{} - \boxed{}\right)}{\boxed{}\,a\cos^2\boxed{}}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.158 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r,θ,ϕ) は，直角座標 (x,y,z) を使って，

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\,,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される．

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ．

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.159 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

(a) $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PA}$ となる条件を求めよ．

(b) $\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{QA}$ となる条件を求めよ．

(2) 次の 3 つの列ベクトルがある．

(a) ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か 1 次従属か.

(b) その理由も述べよ．

(c) もし 1 次従属なら，それらの関係式を書け．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を正則行列とするとき，$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ を証明せよ．

(4) 次の連立方程式がある．

(a) 連立方程式が解を持つように式中の a を決定せよ．

(b) 決定された a の値の連立方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = a \\ 8x - 6y + 4z = 13 \end{cases}$$

(福井大 2009)　　(m20092403)

0.160 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x^2 dy - (y^2 - 1)dx = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}\cos x = -y\sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$　　（変数変換を用いよ）

(福井大 2009)　　(m20092404)

0.161 次の式を簡単に表現せよ．

(1) $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

(福井大 2009)　　(m20092405)

0.162 x は鋭角，y は鈍角であり，$\sin x = \dfrac{1}{2}$，$\sin y = \dfrac{1}{3}$ とする．このとき，$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$ の値を求めよ．

(福井大 2009) (m20092406)

0.163 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ （n は正の整数）

(福井大 2009) (m20092407)

0.164 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (2) $y = x^{1/x}$ (3) $y = \log_a x$

(4) $y = \tan^{-1}x$ (5) $y = e^{-a^2x^2}$

(福井大 2009) (m20092408)

0.165 ２つのベクトル $\boldsymbol{A} = (-1, 1, 0)$ と $\boldsymbol{B} = (0, 1, -1)$ のなす角を求めよ．

(福井大 2009) (m20092409)

0.166 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = (3x-2)^5$ (2) $y = \sqrt{a^2-x^2}$ (3) $y = \dfrac{x}{ax+b}$

(4) $y = \dfrac{\log x}{x}$ (5) $y = \dfrac{1}{e^x+1}$

(福井大 2009) (m20092410)

0.167 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ を x 軸の周りに一回転して得られる回転楕円体の体積を求めよ．

(福井大 2009) (m20092411)

0.168 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ について 積 $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{BA}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009) (m20092412)

0.169 次の行列 C の固有値を求めよ．また，固有値の中で負の値をもつ固有値に対する固有ベクトルも求めよ．

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009) (m20092413)

0.170 点 $(1, -2)$ から直線 $4x + 3y + 7 = 0$ への最短距離を求めよ．

(福井大 2009) (m20092414)

0.171 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A は対角化可能か. 可能ならば対角化せよ.

(福井大 2009) (m20092415)

0.172 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

$$f(x) = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right)$$

(2) 次の関数の不定積分を求めよ.

$$f(x) = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(福井大 2009) (m20092416)

0.173 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^3(4x)$ (2) $y = x^{\frac{1}{x}}$ (福井大 2010) (m20102401)

0.174 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ.

(1) $x^3y^5 + y^6 + 2x - 1 = 0$ (2) $xy = \sin(x+y)$

(福井大 2010) (m20102402)

0.175 $\log(1+x)$ をマクローリン級数(マクローリン展開)を使って, 第 5 項まで示せ.

(福井大 2010) (m20102403)

0.176 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

(福井大 2010) (m20102404)

0.177 $y^2 = ax$ と $x^2 = ay$ $(a > 0)$ で囲まれた面積を求めよ.

(福井大 2010) (m20102405)

0.178 z が変数 $x,\ y$ の関数であり, x と y がともに t の関数ならば,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

となることを示せ.

(福井大 2010) (m20102406)

0.179 次の量を 3 重積分を使って表し, その値を求めよ.

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x/a + y/b + z/c = 1$ で囲まれる体積.

(福井大 2010) (m20102407)

0.180 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して次のものを計算して求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (2) 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(福井大 2010) (m20102408)

0.181 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. n は整数とし, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること.

(福井大 2010)　　(m20102409)

0.182 次の微分方程式の一般解を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x \quad (x = 1 \text{ のとき},\ y = 0)$

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0 \quad (x = 1 \text{ のとき},\ y = 0)$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (x + y)^2 \quad (x = 1 \text{ のとき},\ y = -1)$

(福井大 2010)　　(m20102410)

0.183 実数 x が $x \neq 2$ を満たすとき, $k = x + \dfrac{4}{x-2}$ の取りうる値の範囲を求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102411)

0.184 数列の和の公式で (　　) の中に入る式を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\qquad\Big) = n^3$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\qquad\Big) = n \times 2^{n+1}$

(福井大 2010)　　(m20102412)

0.185 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 4n + 2}{3n^2 + 4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n\right)$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(福井大 2010)　　(m20102413)

0.186 $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

次に, 得られた固有値の中で負の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102414)

0.187 次の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{b}{ax + b} + \log|ax + b|$　　(2) $\sin^{-1} x$　　(3) a^x

(福井大 2010)　　(m20102415)

0.188 次の関数を積分せよ.

(1) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$　　(2) $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$　　(3) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$

(4) $x^2 \log x$　　(5) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$

(福井大 2010)　　(m20102416)

0.189 次の関数 $r = a(1+\cos\theta)$, $(a>0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102417)

0.190 座標空間上に 4 点 $A=(1,0,-1)$, $B=(4,2,-1)$, $C=(-1,3,0)$, $D=(2,1,3)$ がある. このとき, 有向線分 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ から定まる平行六面体の体積 V を求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102418)

0.191 次の連立 1 次方程式を解け. 解がなければその理由を示せ.

(1) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+5y+6z=2 \\ y+4z=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$

(福井大 2010)　　(m20102419)

0.192 次の微分方程式を解け.

(1) $xy\dfrac{dy}{dx} = y-1$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$　　(3) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$

(福井大 2010)　　(m20102420)

0.193 次の極限値を求めよ.

なお, 必要に応じて, 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を使ってもよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(福井大 2011)　　(m20112401)

0.194 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log_e\left(\cos^2 x\right)$　　(2) $y = x^{\tan^{-1}x}$

(福井大 2011)　　(m20112402)

0.195 不定積分を求めよ.

$$\int x\sin x\,dx$$

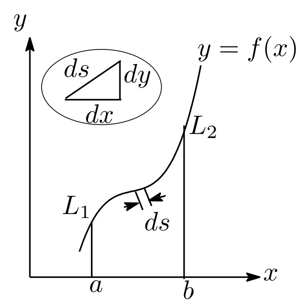
(福井大 2011)　　(m20112403)

0.196 次の各問にしたがって, 半径 R の円の円周の長さを求めよ.

(1) 右の図のように, 関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる.

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け.



(2) 点 (x,y) と x 軸との間の角度を θ とすると, x および y を θ の関数で表せ. また, dy/dx を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて, 半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ. ただし, 計算の途中過程も必ず示すこと.

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.197 $z = \arctan\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となることを示せ.

(福井大 2011) (m20112405)

0.198 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{2-x} xy dy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ．また積分領域も図示せよ.

(福井大 2011) (m20112406)

0.199 座標変換によって，曲線 $x^2+xy+y^2=1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) ２つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ を表せ.
(例：列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる．)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である.

(5) $\boldsymbol{x}$ を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である.

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^2+xy+y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ．ここで，α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である.

(福井大 2011) (m20112407)

0.200 つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 2e^x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=1$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x\,\cos x$ (初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(福井大 2011) (m20112408)

0.201 (1) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ を証明せよ.

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 11 \\ 12 & 11 & 3 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(福井大 2011) (m20112409)

0.202 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として，以下の問いに答えよ.

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ.

(b) この微分方程式の余関数（斉次方程式の一般解）が $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$（ただし　$\alpha,\ \beta$ は異なる実数）の形となり，$x \to \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ.

(2) $a = 1,\ f(x) = 10 \sin x,\ y(0) = -1,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ として，この微分方程式を解け.

(福井大 2011)　　(m20112410)

0.203 2 次方程式 $x^2 - 2px + p - 2 = 0$ が，次の条件の 2 根を持つように p の値の範囲を定めよ.

(1) 1 根が正，他の 1 根が負となる場合.

(2) 1 根が -1 と 1 の間にあり，他の 1 根が 1 と 2 の間にある場合.

(福井大 2011)　　(m20112411)

0.204 $x^4 + x^2 - 6$ を，次の範囲で因数分解せよ.

(1) 有理数　　(2) 実数　　(3) 複素数

(福井大 2011)　　(m20112412)

0.205 次の値を求めよ.

(1) $(x^3 y^2)^{-\frac{2}{3}} \times\ x^2 y^{\frac{4}{3}}$

(2) $5^{\log_5 7}$

(3) $4 \log_2 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(4) $(\sin 40^\circ + \sin 50^\circ)^2 + (\cos 50^\circ - \cos 40^\circ)^2$

(5) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ の値

(福井大 2011)　　(m20112413)

0.206 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin x^2$　　(2) $y = \cos x\ \sin^2 x$　　(3) $y = 2^{3x}$　　(4) $y = x^x$

(福井大 2011)　　(m20112414)

0.207 次の関数の不定積分を求めよ

(1) $x(2x-3)^2$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$　　(3) $\dfrac{e^x}{e^x + 1}$　　(4) $e^x \cos x$

(福井大 2011)　　(m20112415)

0.208 曲線 $\boldsymbol{A} : y = \sin 2x$ と曲線 $\boldsymbol{B} : y = a \sin x$ がある.

$0 < a < 2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で以下の問いに答えよ.

(1) 右の枠内に曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の概形を描け.

(2) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ.

(3) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で囲まれる面積が，(2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ.

(福井大 2011)　　(m20112416)

0.209 定数 $a,\ r$ が $0 < r \leq a$ のとき，円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112417)

0.210 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ （t は転置を表す）

(福井大 2011)　　(m20112418)

0.211 次のベクトル群が一次独立か一次従属かどうか判断せよ．

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

(福井大 2011)　　(m20112419)

0.212 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，中間の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112420)

0.213 微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = -ay$ は架空の放射性元素の個数 y（個）と時間 t（年）の関係を表しているとする．ただし，a は定数である．上式に関し，以下の問いに答えよ

(1) 時間 $t = 0$ のとき，$y = y_0$ とし，上式を積分しなさい．

(2) $y = \dfrac{1}{2}y_0$ となる時間が $t = 5000$ 年であるとき，定数 a を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{1024}y_0$ であるとき，時間 t（年）を求めよ．なお $1024 = 2^{10}$ である．

(福井大 2011)　　(m20112421)

0.214 2 次方程式 $2x^2 - 5x - 6 = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

(福井大 2012)　　(m20122401)

0.215 次式を因数分解せよ．

(1) $\dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{1}{9}x^2y^2 + \dfrac{1}{16}y^2 + \dfrac{1}{6}xy$

(2) $b^2 + c^2 + b(a-c) - c(a+b)$

(福井大 2012)　　(m20122402)

0.216 次の公式を使って極限値を求めよ.

〈公式〉 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+2x)}{x}$

(福井大 2012) (m20122403)

0.217 次の関数を微分せよ.

(1) $y=\left(\dfrac{\log_e x}{x}\right)^5$

(2) $y=x^x$

(福井大 2012) (m20122404)

0.218 不定積分を求めよ.

$$\int \log_e x\,dx$$

(福井大 2012) (m20122405)

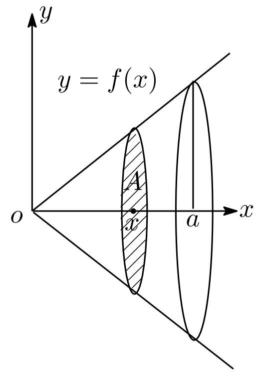
0.219 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a\geq 0)$$

(福井大 2012) (m20122406)

0.220 関数 $y=f(x)=\dfrac{1}{4}x$ がある．この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体（回転体）の体積を，次の問いにしたがって求めよ.

(1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき，$x=x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ.



(2) 関数 $f(x)$ が $0\leq x\leq a$ において x 軸のまわりに回転するときに生じる立体の体積 V を求めよ．体積 V は (1) で求めた面積 A を $0\leq x\leq a$ の範囲で積分することで求めることができる．なお，円錐の体積を求める公式を使ってはいけない.

(福井大 2012) (m20122407)

0.221 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の極値を求めよ.

(福井大 2012) (m20122408)

0.222 $\displaystyle\iint_R\left(y-x^3\right)dxdy\ ,\quad \left(R:0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 2\sqrt{x}\right)$ の値を求めよ．
また積分領域 R も図示せよ.

(福井大 2012) (m20122409)

0.223　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とするとき，次を求めよ．

(1)　$3A$

(2)　A^2

(3)　$|X - 3A| \neq 0$ の条件で

$X^2 - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} X - 2X + \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 X を求めよ．

(福井大 2012)　　(m20122410)

0.224　つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$　(初期条件：$x = 0$ のとき，$y = 0$)

(2)　$\dfrac{dy}{dx} - y \sin x = \sin x$　(初期条件：$x = 0$ のとき，$y = 0$)

(3)　$x\dfrac{dy}{dx} + y = x(1 - x^2)$　(初期条件：$x = 1$ のとき，$y = 0$)

(福井大 2012)　　(m20122411)

0.225　4 つの列ベクトルがある．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 21 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1)　4 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ が一次従属となるようにベクトル $\boldsymbol{d}$ の未知数 x を決定せよ．

(2)　$\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合として表せ，(すなわち，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ の関係式を求めよ)

(福井大 2012)　　(m20122412)

0.226　縦軸を y とし，横軸を x とする座標系でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ が $\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2 = 1$ 上の点であるとする．

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ として，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で一次変換する．

(1)　一次変換後の $\boldsymbol{y}$ の関係式を求めよ．

(2)　一次変換後の x_2 と y_2 の関係が表す形を描け．

(福井大 2012)　　(m20122413)

0.227　次の値を求めよ．

(1)　$\dfrac{a^{\frac{5}{6}} b^{-\frac{1}{3}} \left(b^{-\frac{3}{2}} \sqrt{a^2 b} \right)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} b^{-2}}$，　ただし，$a, b$ は正の数とする．

(2)　$\log_5 \sqrt[8]{5}$

(3)　$\dfrac{\log_5 8 \cdot \log_3 6 \cdot \log_2 3}{\log_5 3 + \log_5 2}$

(福井大 2012)　　(m20122414)

0.228 次の方程式を解け．

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$$

(福井大 2012)　　(m20122415)

0.229 次の関数の最大値及び最小値を求めよ．

$$\cos 2x + \sin x$$

(福井大 2012)　　(m20122416)

0.230 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt{4\sin x + 6}$

(2) $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{x+5}{x-5}}$

(3) $y = -\tan^5 x$

(4) $y = \sin^5 x + \cos^5 x$

(福井大 2012)　　(m20122417)

0.231 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $8x^3 - 6x^2 - 2 + 2e^{3x} + 4\sin x$

(2) $\cos x \sin^6 x$

(3) $\dfrac{1}{5e^x + 1}$　　(4) $\dfrac{6x+8}{x^2 - 8x + 12}$

(福井大 2012)　　(m20122418)

0.232 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2012)　　(m20122419)

0.233 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，次の関係が成り立つことを示せ．

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

(福井大 2012)　　(m20122420)

0.234 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2012)　　(m20122421)

0.235 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

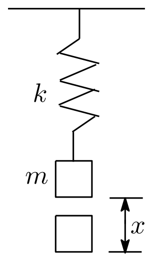
(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$ （ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して，A の逆行列を求めよ.

(福井大 2012) (m20122422)

0.236 図のように，バネ定数が k で，質量を無視できるバネに，質量 m の おもりを吊り下げる．つりあった位置から，上下方向に振動させる時の変位を x とする．このとき，時間 t に対するおもりの運動は, 次の運動方程式によって表現できる.



$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくとき，$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は，上式の一般解であることを示せ.

(2) $m = 2.25(kg)$, $k = 4\pi^2(kg \cdot m/s^2/m)$ とするとき，おもりの振動の周期を求めなさい.

(3) $t = 0$ において，$x = 2(cm)$, $\dfrac{dx}{dt} = 0\ (cm/s)$ とするとき，定数 A, B の値を求め，3 秒間の変位と時間の関係のおよその形を示せ.

(福井大 2012) (m20122423)

0.237 次式はマクローリン展開の一般式である.

$$f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \text{ただし，} f^{(n)} \text{は } n \text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ.

(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について，$n = 5$ までのマクローリン展開を示せ.

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を示せ; ただし，$i^2 = -1$ である.

(福井大 2012) (m20122424)

0.238 a を定数とする，次の

$x^3 - 3xy + y^3 = a$

により定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ にたいして，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

(福井大 2013) (m20132401)

0.239 次の式を計算せよ．なお，$\alpha > 1$ とする.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^\alpha}$$

(福井大 2013) (m20132402)

0.240 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

(1) $a=1,\ b=2,\ c=3$ のとき，A の行列式の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$ が相異なる実数のとき，A が正則であることを示せ．

(福井大 2013)　　(m20132403)

0.241 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする． 空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}=(1,0,1),\ \boldsymbol{v}=(0,2,1),\ \boldsymbol{w}=(1,-1,0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{t}=(1,4,4)$ を $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ の線形結合（一次結合）で表せ．

(2) $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ が線形独立（一次独立）であるか否かを判定せよ．

(福井大 2013)　　(m20132404)

0.242 極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

(福井大 2013)　　(m20132405)

0.243 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin^3\Big(4(2x+1)^2\Big)$

(2) $y=a^{2x}\qquad \big(a>0\big)$

(福井大 2013)　　(m20132406)

0.244 不定積分を求めよ．

< 公式 > 必要に応じて次の公式を使ってもよい．

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C\quad (\,a,C \text{ は定数})$$

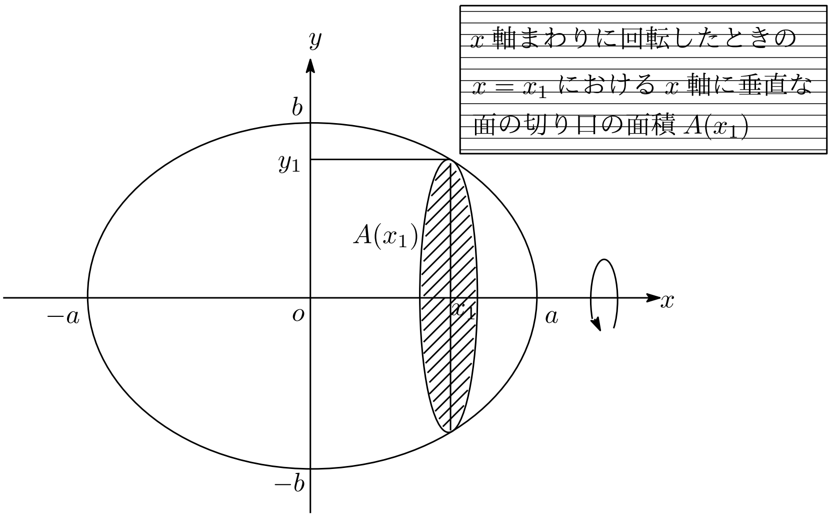
(1) $\displaystyle \int \sin^2 x\,\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle \int\frac{dx}{x^2(2+x^2)}$

(福井大 2013)　　(m20132407)

0.245 右下図に示すように，2 次元 $x-y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ．

(1) この楕円の方程式を書け．



次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに
生じる立体の体積を求める． 各問いに答えよ．

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x = x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ．

(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと．

(福井大 2013)　　(m20132408)

0.246 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ の極値を調べよ．

(福井大 2013)　　(m20132409)

0.247 累次積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left\{\int_x^{2x}\sin(x+y)dy\right\}dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ．
また積分領域も図示せよ．

(福井大 2013)　　(m20132410)

0.248 次の整数 a を含む行列 A がある．次の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 2a \\ 1 & 2 & -2 & a-1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の階数（ランク）が 2 になるために a の値を求めよ．

(2) $a = 5$ のとき行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132411)

0.249 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ があるとき，$(\boldsymbol{BC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$ が成り立つとして，次の関係が成り立つことを証明せよ．ここで，$\boldsymbol{B}^T$ は $\boldsymbol{B}$ の転置行列である．

$$(\boldsymbol{BCD})^T = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T$$

(2) $\boldsymbol{A}$ を二次正方行列とする．$\boldsymbol{A}$ を含む次の式を満たす $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132412)

0.250 2 次元平面で，整数 d を含む次の二次正方行列でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ を一次変換するとベクトル $\boldsymbol{y}$ に移る．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} d & 3/5 \\ 5 & 2d \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ がある直線を表すベクトルのとき，そのすべての点について，一次変換で位置が変わらなかったとする．整数 d とその直線の式を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132413)

0.251 次の微分方程式の一般項を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = x^2$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 2$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 1$ ）
なお，必要であれば，$\dfrac{1}{y^2 + y} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$ の関係を用いること．

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$　（初期条件：$x = 0$ のとき $y = 0$ ）

(福井大 2013)　　(m20132414)

0.252 次の設問に答えよ．

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{729}}$ の値を求めよ．

(2) $4 \log_2 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2} \log_2 3 + \log_2 \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ．

(3) $\log_{10} E(M) = 1.5M + 11.8$ の時，$E(7)$ および $\dfrac{E(9)}{E(7)}$ の値を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132415)

0.253 次の設問に答えなさい．

(1) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \cdots$ がある．この数列の何項までの和をとれば，初めて 10000 を超えるか．
ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) n を自然数とするとき $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ を証明しなさい．

(福井大 2013)　　(m20132416)

0.254 以下の設問に答えよ．ただし以下で i は虚数単位である．

(1) $\dfrac{5-i}{5+i}$ を $a + bi$ の形で表せ．

(2) $\left| \dfrac{1+i}{2+i} \right|$ の値を求めよ．

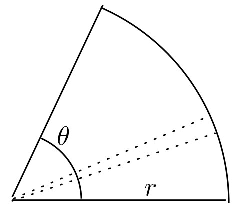
(3) 次の複素数を極形式で表せ．
1) $2 + 2\sqrt{3}i$　　　　2) $\dfrac{2}{1-i}$

(4) $x = \cos\alpha + i \sin\alpha$, $y = \cos\beta + i \sin\beta$ とするとき，$xy = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$ であることを確かめよ．

(5) 上記 (4) の x について，$x^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$ が成り立つことを示せ．ただし n は自然数とする．

(福井大 2013)　　(m20132417)

0.255 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．
ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は
1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする．



r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$

(1) ある量の i 回目の観測値を x_i，n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき，
$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする．最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい．

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ．

(3) 角度の最確値を度 ($^\circ$) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ．また，同じ角度をラジアン単位で示せ．だたし，円周率は π とする．

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から，もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい．

(5) この扇形の面積を，図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい．

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.256 次の設問に答えなさい．

(1) プールの水面の高さ h が，時間 t に関し $k\dfrac{h}{b}A\,dt = -a\,dh$ を満足するように変化している．ただし k, a, b, A は定数である．$t = 0$ のとき $h = h_0$ ，$t = t_1$ のとき $h = h_1$ として，定数 k を求めなさい．

(2) 時間 t での位置 (x, y) が $(e^t \cos t,\ e^t \sin t)$ で与えられる動点 P がある．ただし $0 \leq t \leq 2\pi$ とする．

(a) $t = 0$ における位置を示せ．
(b) 座標 x の時間 t に関するグラフの概形を示せ．
(c) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．
(d) $0 \leq t \leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132419)

0.257 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A = (1, 0)$，$B = (1, 1)$，$C = (0, 1)$ からなる正方形がある．関数 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$，$y = f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ．

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.258 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132421)

0.259 次の連立方程式を行列とベクトルで表し，ガウスの消去法（掃き出し法）を利用して解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 3x+3y\ \ -z=8 \\ 2x\ \ -y\ \ +z=-1 \\ x+2y-4z=\ 11 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a-\ \ b+2c+3d+4e=-8 \\ -2a+3b-4c-5d-5e=14 \\ -a+2b-2c-2d-2e=\ \ 7 \\ a+0b+3c+4d+6e=-7 \\ 0a-2b\ \ +c\ \ -d-3e=\ \ 1 \end{cases}$

(福井大 2013)　　(m20132422)

0.260 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに，正則性を調べ，正則なら逆行列を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132423)

0.261 次の行列の固有値を求め，最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132424)

0.262 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

(福井大 2014)　　(m20142401)

0.263 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=xe^{-x^2}$

(福井大 2014)　　(m20142402)

0.264 $\sin(ax)$ をマクローリン級数展開せよ．

(福井大 2014)　　(m20142403)

0.265 関数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ の原点における微分可能性を調べよ．

(福井大 2014)　　(m20142404)

0.266 次の関数を不定積分せよ．

(1) $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^3}$　　(2) $x^n\log_e x$

(福井大 2014)　　(m20142405)

0.267 $y=\log x$ $(1\leqq\ x\leqq\ e)$ と x 軸の囲む部分を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142406)

0.268 テイラーの定理によって $f(x,y)=x^2y+4y-5$ を $(x-1)$ と $(y+1)$ のべきで展開せよ.

(福井大 2014)　　(m20142407)

0.269 $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}(y+y^3)dydx$ の <u>積分順序を変更</u> して，その値を求めよ．また，<u>積分領域も図示</u> せよ.

(福井大 2014)　　(m20142408)

0.270 2 つの 2 次正方行列がある.

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\2&2\end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix}$

これらが

$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}$

を満たすとき，2 次正方行列である行列 $\boldsymbol{X}$ と行列 $\boldsymbol{Y}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{A}^T$ は行列の転置行列である．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ.

(福井大 2014)　　(m20142409)

0.271 次の 3 つの列ベクトルがある.

$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$

ある行列 $\boldsymbol{A}$ は 3 次正方行列である．この行列 $\boldsymbol{A}$ と前述のベクトルは，次の関係を満たすものとする.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=2\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{x}_2+3\boldsymbol{x}_3$

ベクトル $\boldsymbol{y}$ が実数 s と t によって次のように $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ の一次結合で表される.

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1+s\boldsymbol{x}_2+t\boldsymbol{x}_3$

また，行列 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ からなり $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$ である

以下の問に答えよ．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ.

(2) そのベクトル $\boldsymbol{y}$ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとなるとき，実数 s と t を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応する固有値を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142410)

0.272 次の微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y=x$　(初期条件：$x=0$ のとき，$y=1$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$　(初期条件：$x=0$ のとき，$y=0$)

(福井大 2014)　　(m20142411)

0.273 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解を求めよ.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$ の特殊解を求めよ.

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$ の一般解を求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142412)

0.274　以下の微分方程式を解け.

(1) $e^y dx+(xe^y-3y^2)dy=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$

(福井大 2014)　　(m20142413)

0.275　以下の問いに答えよ.

(1) 下記に示す行列の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有ベクトルが一次独立であることを示せ.

(3) (1) で与えられた行列を対角化せよ.（導出過程を示すこと）

(福井大 2014)　　(m20142414)

0.276　$y=x^3-3x$ の極大値と極小値を求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142415)

0.277　次の等式が成り立つように，定数 a と b の値を定めよ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+b}{x-2}=1$$

(福井大 2014)　　(m20142416)

0.278　以下の (1) および (2) の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

(福井大 2014)　　(m20142417)

0.279　行列 $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142418)

0.280　次の (1) および (2) の関数を微分せよ.

(1) $\dfrac{2x-1}{x^2}$　　(2) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$

(福井大 2014)　　(m20142419)

0.281　$f(x)=x^2-4x+5$ とする．関数 $f(x)$ のグラフ上の 2 点 $(2,\ f(2))$ と $(4,\ f(4))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しくなる a の値を求めよ.

(福井大 2014)　　(m20142420)

0.282 次の (1), (2) および (3) の関数の不定積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ (2) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ (3) $\dfrac{e^{3x}}{e^x-1}$

(福井大 2014) (m20142421)

0.283 次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限値を求めよ.

$a_1 = 0$ および $a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}a_n$

(福井大 2014) (m20142422)

0.284 以下の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$

(福井大 2014) (m20142423)

0.285 以下の関数 $f(x,y)$ に関して, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 及び $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2y^5$ (2) $f(x,y) = e^{-2y}\sin 3x$

(福井大 2014) (m20142424)

0.286 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = ay$ (2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = \cos 2t$

(福井大 2014) (m20142425)

0.287 $t < 0$ で $f(t) = 0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は, 以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t) = e^{at}$

(2) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014) (m20142426)

0.288 以下の与える行列 A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする. 行列 A を対角化する行列 U を求めよ.

(3) 行列 U を用いて対角化した行列 A の対角行列 Σ を求めよ.

(福井大 2014) (m20142427)

0.289 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+2}{e^x}$

(福井大 2015) (m20152401)

0.290 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^{\sin x} \quad (x > 0)$　　　(2) $y = \log(\sin^2 x)$

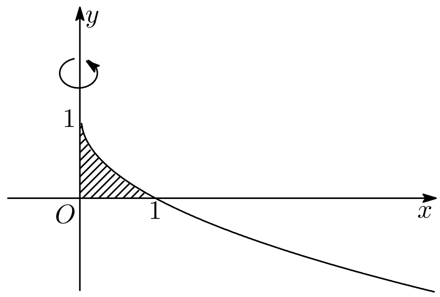
(福井大 2015)　　(m20152402)

0.291 次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ（計算過程も示せ）.

$\log(1+x)$

(福井大 2015)　　(m20152403)

0.292 曲線 $y = 1 - \sqrt{x}$ と直線 $x = 0$ および $y = 0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ.



(福井大 2015)　　(m20152404)

0.293 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ, g が微小量 $\triangle\ell$, $\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell} - \frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015)　　(m20152405)

0.294 $I = \displaystyle\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (R \,:\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2)$ の値を求めよ．さらに，$a \to \infty$ としたときの I の値を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152406)

0.295 次の式を満たす行列 A を求めよ．途中の過程も記載すること.

$$A\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152407)

0.296 次の 3 つのベクトルがある．ただし，x は定数とする．以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるように定数 x を求めよ.

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立で相互に直交するベクトルとなるように定数 x を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152408)

0.297 次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$$2x^2+6xy+2y^2=1 \ \cdots\cdots ①$$

行列 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる．

ここで，a_{11}，a_{22}，S は定数である．

$$1=2x^2+6xy+2y^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1>\lambda_2$ とする．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を X と Y の方程式に変換せよ．

(福井大 2015)　　(m20152409)

0.298 次の微分方程式の一般解を導出せよ

(1) $\dfrac{dy}{dx}+2y=x$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=y+y^2$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=0$

(福井大 2015)　　(m20152410)

0.299 以下の微分方程式の一般解を，(　) 内の変数変換を利用して求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$　（変数変換 $z=\dfrac{y}{x}$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx}(2x+2y-1)+x+y+1=0$　（変数変換 $z=x+y-2$）

(福井大 2015)　　(m20152411)

0.300 空間に 3 点 $P,\ A,\ B$ がある．点 A から直線 PB に下ろした垂線と，直線 PB との交点を R とする．

(1) $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PB}$ とするとき，

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\,\boldsymbol{b}$$

となることを示せ．

(2) $P(3,\ -6,\ 9)$，$A(-3,\ 2,\ 5)$，$B(-1,\ -3,\ 8)$ に対して，R の座標を求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152412)

0.301 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'+a=0 \quad (\,a \text{ は実数の定数}\,)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を，条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ のもとで解け．

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい．

(福井大 2015)　　(m20152413)

0.302 3 次方程式 $2x^3-3x^2+3x-1=0$ の実数でない 2 つの根を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の値を求めよ．

(1) α および β (2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ (3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ (4) $\alpha^3+\beta^3$

(福井大 2015) (m20152414)

0.303 次の関数を微分せよ．

(1) $y=(x^2+2)^4$ (2) $y=\sin(3x+\pi)$ (3) $y=\sin x\cdot\cos^2 x$ (4) $y=x^{2x}$

(福井大 2015) (m20152415)

0.304 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y=\dfrac{1-x}{x^2}$ (2) $y=\log(x+2)$

(福井大 2015) (m20152416)

0.305 関数 $y=e^{-x}\cos x,\quad 0\leq x\leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ．

(1) この関数の概形を示せ．

(2) この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(福井大 2015) (m20152417)

0.306 時間 t での位置が $(x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t)$ で与えられる動点 P がある．

(1) $t=0$ における位置を求めよ．

(2) $0\leq t\leq 2\pi$ での動点の軌跡の概形を示せ．

(3) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を求めよ．

(4) $0\leq t\leq 2\pi$ での動点 P の移動距離を求めよ．

(福井大 2015) (m20152418)

0.307 ある細菌の量を x，時間を t とする．細菌の増殖率 $\dfrac{dx}{dt}$ は x に比例し，その比例定数を α とする．

(1) $t=0$ における細菌の量を x_0 として，x を時間の関数で表せ．

(2) 細菌が T 時間で 2 倍になったとするとき α を T で表せ．また，最初の 1024 倍となる時間を求めよ．

(福井大 2015) (m20152419)

0.308 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

(2) $3\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$

(3) ${}^t\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$（$t$ は転置記号）

(4) $\begin{pmatrix}\cos 15^\circ & \sin 15^\circ\\-\sin 15^\circ & \cos 15^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ\\-\sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}$

(福井大 2015) (m20152420)

0.309 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解け．

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152421)

0.310 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152422)

0.311 行列 A, B, C に関して，行列式を計算しなさい．また，逆行列を，それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015)　　(m20152423)

0.312 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z \neq 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする.

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(1) $z = x+yi$ のとき，複素関数 $f(z) = u+iv$ の実部 $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ および虚部 $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ を x, y の関数として表しなさい.

(2) (1) の実関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい.

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が，

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$

となることを，実関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい.

(福井大 2015)　　(m20152424)

0.313 曲率 $\rho^{(注)}$ に関する以下の微分方程式について答えなさい.

$$y'' = \rho(1 + {y'}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい.

(2) 円の方程式 $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい.

(3) ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい．必要であれば，以下の置換法 $y' = \nu = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること.

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値.

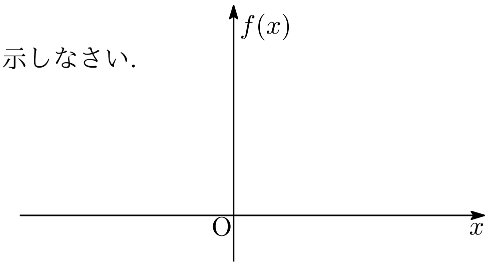
(福井大 2015)　　(m20152425)

0.314 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\, \sigma^2)$ は，確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ.

(1) $N(10,4)$ に従う確率変数 X の確率密度関数を図示しなさい.



(2) 確率変数 X が正規分布 $N(10,4)$ に従うとき，次の確率を求めなさい.
必要に応じて，別紙の標準正規分布表を用いなさい.

(i) $P[X > 13]$　　　　(ii) $P[8 < X < 12]$

(福井大 2015)　　(m20152426)

0.315 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = x^2y^3e^{2xy}$ とおく．このとき，$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ および $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152427)

0.316 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が直交行列となるように $b,\ c,\ d$ を決めよ.

(福井大 2015)　　(m20152428)

0.317 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ を一次独立なベクトル，さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ.

(福井大 2015)　　(m20152429)

0.318 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ の増減表を用いて，$f(x)$ のグラフの概形を描け.

(福井大 2015)　　(m20152430)

0.319 次の複素数の絶対値を求めよ.

(1) $-i(2+i)(1+2i)(1+i)$　　　　(2) $\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$

(福井大 2015)　　(m20152431)

0.320 領域 D を，$D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ とする．このとき，$\displaystyle\iint_D dxdy$ の値を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152432)

0.321 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

(福井大 2016)　　(m20162401)

0.322 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^3\sqrt{3x^2+1}$　　　　(2) $y = (1+x)^x$

(福井大 2016)　　(m20162402)

0.323 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin 3x| dx$　　　（必要であれば，変数変換 $3x = t$ を使用せよ.）

(福井大 2016)　　(m20162403)

0.324　テイラーの定理を使って，$f(x,y)=\sin xy$ を $(x-\pi/2)$ と $(y-1)$ の 2 次のベキまで展開せよ．

(福井大 2016)　　(m20162404)

0.325　$\displaystyle\int_0^1\int_y^1\sqrt{1+x^2}dxdy$ の積分順序を変更することによって，その値を求めよ．また積分領域も図示せよ．

(福井大 2016)　　(m20162405)

0.326　次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[A]=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

(1)　固有値を求めよ

(2)　大きさが 1 となるように正規化した固有ベクトルを求めよ．

(3)　(2) で求めた固有ベクトルを用いて対角化せよ．

(福井大 2016)　　(m20162406)

0.327　次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[B]=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

(1)　行列式の値を求めよ．　　(2)　余因子を求めよ．　　(3)　逆行列を求めよ

(福井大 2016)　　(m20162407)

0.328　次の微分方程式の一般解を導出せよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=0$　　(2)　$\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx}+2xy=x$　　(3)　$(x+y)\dfrac{dy}{dx}=-y$

(福井大 2016)　　(m20162408)

0.329　(1)　$A=\begin{pmatrix}a+b & a & a\\ a & a+c & a\\ a & a & a+d\end{pmatrix}$ に対して，　$|A|=abcd\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$

となることを示せ．ただし，$abcd\neq 0$ とする．

(2)　行列 $A_n=\big(a_{ij}\big)\ \big(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n,\ n$ は 3 以上の整数$\big)$ を，

$$a_{ij}=a_0+a_i\delta_{ij}\ ,\qquad a_i : \text{実数}\ (1\leq i\leq n)$$

で定義するとき，

$$|A_n|=a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right)$$

となることを示せ．ただし，$a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\neq 0$ である．また，δ_{ij} は，$i=j$ のときに 1，$i\neq j$ のときに 0 をとるものとする．

(福井大 2016)　　(m20162409)

0.330　連立微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax\ -\ y-6\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=5x-2y+1\end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，この微分方程式の解 $x(t)$，$y(t)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ただし，$a \neq \dfrac{5}{2}$ とする．

(1) 任意の t に対して $\boldsymbol{r}(t)$ が不変となるような解 $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ を，a を用いて表せ．

(2) 今，$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け．

(3) (2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\boldsymbol{d}(t)$ が，任意の初期値に対して $t \to +\infty$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ．

(4) $a = -4$，初期値ベクトル $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162410)

0.331 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (x^2 - 2x + 3)^5$　(2) $y = \cot x$　(3) $y = \sin^{-1} x$　(4) $y = xe^{2x}$

(福井大 2016)　　(m20162411)

0.332 次の関数の不定積分を求めよ．

(1) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$　(2) $y = \sin^3 x \cos^3 x$　(3) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$　(4) $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

(福井大 2016)　　(m20162412)

0.333 次の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$　(2) $(1 + x)dy + (1 + y)dx = 0$

(福井大 2016)　　(m20162413)

0.334 次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　　(m20162414)

0.335 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2016)　　(m20162415)

0.336 次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

(福井大 2016)　　(m20162416)

0.337 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162417)

0.338　2 変数関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.339　次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $=0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3, $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.340 以下の行列 A に関して，次の問いに答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式を計算しなさい．

(2) 逆行列を求めなさい．

(3) 固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162420)

0.341 以下の積分をおこないなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

(福井大 2016)　　(m20162421)

0.342 以下の積分をおこないなさい．

$\displaystyle\iint_D dxdy$　　ただし，$D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

(福井大 2016)　　(m20162422)

0.343 以下の積分をおこないなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\int e^{-i\omega t}dt$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{1-i}(iz+2)dz$　　なお，積分経路は直線とする．

(福井大 2016)　　(m20162423)

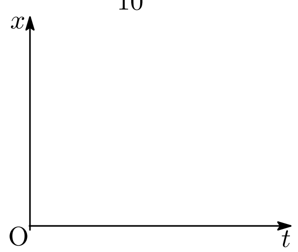
0.344 以下の微分方程式について答えなさい．（なお，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ である.）

$$\dot{x} = \left(1 - \frac{x}{K}\right)x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，K は正の定数である．

(1) 十分時間が経過したとき，つまり $t \to \infty$ のとき，x はどうなるかを答えなさい．

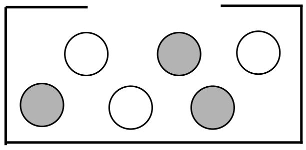
(2) $t = 0$ のとき，$x = \dfrac{K}{10}$ であった．t - x のグラフを描きなさい．



(3) 微分方程式 ① の解を求めなさい．

(福井大 2016)　　(m20162424)

0.345 下図のように，箱の中に赤玉と白玉が 3 個ずつ入っている．二人で交互に箱の中から玉を取り出すとき，次の問いに答えなさい．ただし，箱の中は見えないものとする．なお，先に玉を取り出すものを先攻，後で玉を取り出すものを後攻と呼ぶことにする．また，勝敗は点数の高いほうを勝ちとする．



(1) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う．ただし，取り出した玉は，箱には戻さないものとする．先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(2) 赤玉を 1 点，白玉を -2 点として，それぞれ交互に 3 回，玉を取り出して合計得点を競う． 今回は，取り出した玉を箱に戻すか，戻さないかを取り出した後に決められるものとする． 先攻と後攻では，どちらが有利かを議論しなさい．

(3) 赤玉を 1 点，白玉を α 点として，それぞれ交互に玉を取り出し， 合計得点が先に 5 点を超えたものを勝ちとする．ただし，取り出した玉は，箱に戻すものとする． 先攻と後攻のどちらが有利かを α の値を考慮して，議論しなさい．

(福井大 2016)　　(m20162425)

0.346 (1) $F(x,y)=0$ のとき，$F_y \neq 0$ ならば $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ となることを示せ．

(2) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ となることを示せ．

(福井大 2018)　　(m20182401)

0.347 $\displaystyle\int a^x dx=\frac{1}{\log a}a^x+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$ となることを示せ．ただし C は積分定数である．

(福井大 2018)　　(m20182402)

0.348 $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x}(y-x^3)dydx$ の 積分順序を変更し て，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2018)　　(m20182403)

0.349 x を実数とする時以下の 3 つのベクトルが一次従属となる x を求めよ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182404)

0.350 x,y,z を実数とする．以下のベクトルがそれぞれ直交するときの x,y,z を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182405)

0.351 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\, A\, \boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\, \boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n = \dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_n$ を求めよ.

(福井大 2018) (m20182406)

0.352 A の袋に数字 $1, 2, 3, 4$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 4 枚入っている．B の袋に数字 $1, 2, 3, 4, 5$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 5 枚入っている．C の袋に数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ が 1 つずつ書かれたカードが，1 枚ずつ，合計 6 枚入っている．A, B, C の袋から 1 枚ずつかカードを取り出すとき，その数字をそれぞれ x_A，x_B，x_C とする．次の問いに答えなさい.

(1) A と B の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B$ である確率を求めよ.

(2) A と B と C の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B \leq x_C$ である確率を求めよ.

(3) A と B と C の袋から 1 枚ずつカードを取り出すとき，$x_A \leq x_B > x_C$ である確率を求めよ.

(4) A と B の袋から 1 枚ずつカードを取り出し，$x_A \leq x_B$ となった場合を考える．このとき，C の袋からもう 1 枚カードを引き，$x_B > x_C$ となる確率を求めよ.

(福井大 2018) (m20182407)

0.353 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

(福井大 2018) (m20182408)

0.354 以下の微分方程式を解きなさい．また，特殊解のグラフは一般解のグラフにどのように関係づけられるかを答えなさい.

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(福井大 2018) (m20182409)

0.355 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい.

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい.

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018) (m20182410)

0.356 (1) 積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau = \theta(t-1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい.

(2) (1) の積分方程式を解きなさい.

(福井大 2018)　　(m20182411)

0.357 次の微分方程式にいて，以下の (1)〜(3) の問いに答えよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + b^2x = 0$$

ただし，x は $t(t \geqq 0)$ の関数で，a および b は正の定数である.

(1) $a < b$ の場合，この微分方程式の一般解を求めよ.

(2) $a < b$ の場合，初期条件「$t = 0$ のとき，$x = x_0$，$\dfrac{dx}{dt} = 0$」のもとでこの微分方程式の解を求めよ.

(3) $a = b$ の場合，初期条件「$t = 0$ のとき，$x = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = 1$」のもとでこの微分方程式の解を求め，t と x の関係を図示せよ.

(福井大 2018)　　(m20182412)

0.358 以下の (1)〜(3) に示した行列の逆行列を，それぞれ求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$　　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182413)

0.359 ベクトル $\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$ は一次独立であるとする．これら $\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$ の一次結合である以下のような 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$，$\overrightarrow{R}$ を考える.

$$\overrightarrow{P} = \alpha\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}$$

ただし，α，β，γ は定数とする.

上記の 3 つのベクトル $\overrightarrow{P}$，$\overrightarrow{Q}$，$\overrightarrow{R}$ が一次独立であるためには，定数 α，β，γ に関して，

$\alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \neq 0$ が成り立たなければならないことを証明せよ.

(福井大 2018)　　(m20182414)

0.360 未知数 x と y に関する以下の連立一次方程式を解け．ただし，a は定数であるとする.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x + (a^2 - 3)y = a - 1 \end{cases}$$

⟨ 注 ⟩ この連立一次方程式は定数 a によって，「一意的な解」，「2 つ以上の解」，「解なし」の 3 つの状態を取りえることに注意せよ.

定数 a のどのような値に対して，どのような解をもつのか，あるいは解をもたないのかを場合分けして答えよ.

(福井大 2018)　　(m20182415)

0.361 $\dfrac{\partial}{\partial t}\cos(kx - \omega t + \theta)$ を計算せよ.

(福井大 2018)　　(m20182416)

0.362 $\displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_0^1 \sqrt{x} e^{-2y} dx \right\} dy$ を計算せよ．

(福井大 2018)　　(m20182417)

0.363 e^x をマクローリン展開し，最初の 4 項までを答えよ．

(福井大 2018)　　(m20182418)

0.364 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182419)

0.365 縦，横，高さがそれぞれ x, y, z である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L，表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら x, y, z の値を変化させると，x, y, z がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして，以下の (1)〜(3) に答えよ．

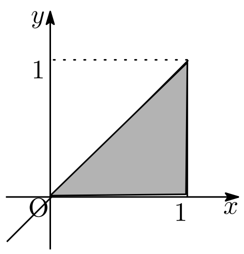
(1) 表面積 S を x, y, L のみを用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの x, y, z の値，および S の最大値を，L を用いて表せ．

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.366 下図の灰色で塗られた領域の面積を式 (A) の形に表したとき，$\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ にあてはまる値や式を答えよ（積分の計算を行う必要はない）．



$$\int_{\boxed{③}}^{\boxed{④}} \left\{ \int_{\boxed{①}}^{\boxed{②}} dy \right\} dx \qquad (A)$$

(福井大 2018)　　(m20182421)

0.367 (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を持つ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ 1 列目，2 列目，3 列目に持つ行列を P とする．P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182422)

0.368 xy 平面上の座標 (m, n) (m と n は整数) に，

サイコロの目に従って右方向と上方向へ移動する点 P が存在する (図 1 参照)．この点 P は，サイコロを振って出た目が整数 D 以下の場合には右方向へ 1 移動して座標が $(m+1, n)$ となる．一方，出た目が D より大きい場合には，上方向へ 1 移動して座標が $(m, n+1)$ となる．

また，点 P から x 軸におろした垂線と x 軸との交点を点 Q，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を点 R とし，座標 $(0,0)$ を原点 O とする．

サイコロの各目が出る確率を $\dfrac{1}{6}$ とするとき，以下の (1)〜(3) に答えよ．

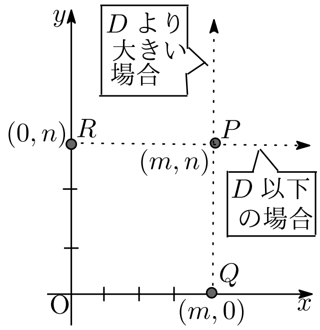


図 1 : xy 平面の点 P

(1) $D=4$ の場合を考える．すなわち，サイコロを振って 1 から 4 の目が出たら点 P が右方向に 1 移動し，5 か 6 の目が出たら上方向に 1 移動する．いま，原点 O に位置する点 P がサイコロを 2 回振ったときに座標 $(2,0)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 4 以下の目が出た回数，4 より大きい目が出た回数をそれぞれ示せ．

(b) サイコロを 2 回振ったときに，点 P が座標 $(2,0)$ に位置する確率を求めよ．

(2) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを 3 回振ったときに座標 $(2,1)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 例えば，1 回目に D 以下の目（右へ移動），2 回目に D 以下の目（右へ移動），3 回目に D より大きい目 (上へ移動）が出ると，点 P は座標 $(2,1)$ へ移動する．このように，原点 O から $(2,1)$ へ点 P が移動する経路の総数を答えよ．

(b) サイコロを 3 回振ったときに; 点 P が座標 $(2,1)$ に位置する確率を D を使って表せ．

(3) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを L 回振ったときに座標 (s,t) (s と t は整数) へ移動したとする．このとき，

(a) 座標 (s,t) の y 座標 t を L と s を使って表せ．

(b) サイコロを L 回振ったときに，点 P が座標 (s,t) に位置する確率を D, L, s を使って表せ．

(c) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積を s と L を使って表せ．さらに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる点 P の座標が 1 つだけ存在することを示し，面積が最大になるときの点 P の座標と面積を求めよ．

(d) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる座標に点 P が位置する確率を D と L を使って表せ．

(福井大 2018)　　(m20182423)

0.369　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$　　(2) $y = xe^{-x^2}$

(3) $y = (2^x+1)^3$　　(4) $y = \sqrt{\sin x}$

(福井大 2018)　　(m20182424)

0.370　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\sin 3x + \cos x)^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{5x-5}} dx$

(福井大 2018)　　(m20182425)

0.371　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3+x^2+5x+3+4\pi\sin\pi x+e^{2x})dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3\cos x dx$

(福井大 2018)　　(m20182426)

0.372 次の微分方程式を解け.

$$(7x+4y)\frac{dy}{dx}=-8x-5y$$

(福井大 2018)　　(m20182427)

0.373 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(2) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(4) ${}^t\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　(t:転置を表す)

(5) $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2018)　　(m20182428)

0.374 x の関数 $p(x),\ q(x)$ が $a,\ b$ を定数として $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で表されるとする.

ただし, i は虚数単位, e は自然対数の底である. この時, 以下の問いに答えよ.

(1) $x=0$ のとき上式を $\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}=(A)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表す. 行列 (A) を求めよ.

(2) 上の式を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=(B)\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と変形したときの行列 (B) を求めよ.

(3) (1)(2) の結果を利用し $\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix}=(C)\begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$ と表したとき, 行列 (C) を求めよ.

(4) (C) の成分を三角関数で表せ.

(福井大 2018)　　(m20182429)

0.375 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182430)

0.376 次の連立方程式を行列とベクトルを用いて書き直し, クラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} 2x-y+z=7 \\ x+2y-3z=-1 \\ x-3y-z=-2 \end{cases}$$

(福井大 2018)　　(m20182431)

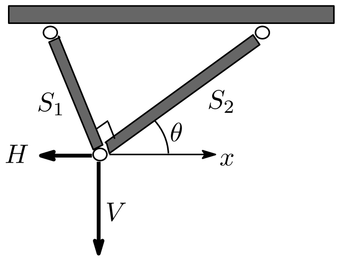
0.377 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182432)

0.378 図のように水平で剛な天井にピン支持されたトラスが荷重を支えている．

ただし θ は水平方向 (x 軸) からの角度



(1) 部材力 S_1, S_2 と外力 H, V との間のつり合式を行列とベクトルを用いた形で示せ．

(2) $H = 10\text{kN}$, $V = 20\text{kN}$, $\theta = 30°$の時 ，部材力を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182433)

0.379 次の関数 $f(x)$ について $x = 0$ における微分可能性を調べよ．

ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の関係を用いてもよいこととする．

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(福井大 2020)　　(m20202401)

0.380 次の関数を x で微分せよ．

(1) $y = \sin^3 e^x$　　(2) $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x-1}}$　（ただし，$x > 1$）

(福井大 2020)　　(m20202402)

0.381 次の定積分を求めよ．

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$　　(2) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2020)　　(m20202403)

0.382 関数 $u = f(x, y)$ が以下の式で表せるとき，導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ を求めよ．

$$u = x\cos y - y\cos x, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t$$

(福井大 2020)　　(m20202404)

0.383 次の重積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

(福井大 2020)　　(m20202405)

0.384 以下の行列の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$

(福井大 2020)　　(m20202406)

0.385 以下のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような実数 x のうち，$x > 0$ を満たすものを求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202407)

0.386 行列 $\boldsymbol{A}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 α_1，α_2，α_3 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を求めよ．固有値は $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ とし，固有ベクトルは大きさを 1 にせよ．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ．

(3) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202408)

0.387 6 面のサイコロについて考える．普通のサイコロと違って，各面における目の数は，

1, 1, 2, 3, 5, 8 である．このサイコロを 1 回振るときに出る目の数の期待値を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202409)

0.388 ある容器に赤玉 30 個，白玉 20 個，青玉 5 個が入っている．無作為に容器から玉を 5 個，一つずつ順に取り出す．赤，赤，青，青，白の順番で取り出す確率を求めよ．ただし，取り出した玉は容器に戻さない．

(福井大 2020)　　(m20202410)

0.389 次の微分方程式の解を求めよ．　$x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

(福井大 2020)　　(m20202411)

0.390 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

(福井大 2020)　　(m20202412)

0.391 関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換　$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$　を求めよ．

(福井大 2020)　　(m20202413)

0.392 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t\sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[t\sin at]$

(福井大 2020)　　(m20202414)

0.393 (1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次独立，1次従属を判定せよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j=n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j=n \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.394 (1) 次の連立微分方程式の解を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = \quad y(x) \ + \ z(x) + 1 \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 \end{cases}$$

(a) $z(x)$ を消去して，$y(x)$ のみに対する微分方程式を導出せよ．

(b) $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を (a) を利用して求めよ．

(2) 次の連立微分方程式の $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = \quad y(x) \ + \ z(x) + 1 \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 + \dfrac{e^{2x}}{(1+x)^2} \end{cases}$$

(3) 次の連立微分方程式の解を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = -y(x)z(x) \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = \quad y(x)z(x) \end{cases}$$

(a) $y(x) + z(x)$ が常に一定の値（定数）c_1 をとること，すなわち，

$$y(x) + z(x) = c_1$$

が成立することを証明せよ．

(b) 初期値として,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

が与えられたとき, $y(x)$ と $z(x)$ の解を (a) を利用して求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202416)

0.395 体積が一定で, 各辺の長さが変化する直方体について, 以下の問いに答えよ.

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし, 直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく.
このとき, z を x, y, C を用いて表せ. ただし, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ とする.

(2) 直方体の表面積を $f(x, y)$ とする. $f(x, y)$ を x, y, C を用いて表せ.

(3) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ. ただし,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

である.

(4) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を, C を用いて表せ.

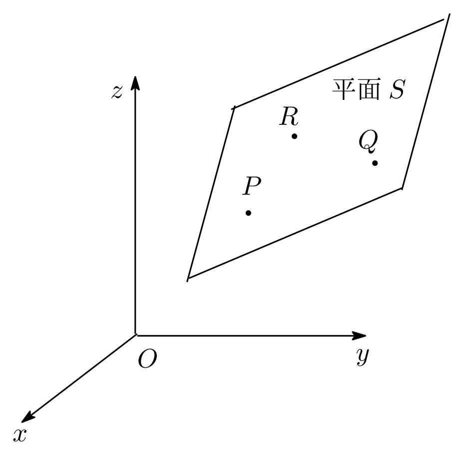
(5) 一般に, 以下の定理が知られている

> 定理
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x, y)$ について,
>
> $$g_x(a, b) = 0, \qquad g_y(a, b) = 0$$
>
> のとき,
>
> $$D = \{g_{xy}(a, b)\}^2 - g_{xx}(a, b) g_{yy}(a, b)$$
>
> とおくと, $g(x, y)$ は $x = a$, $y = b$ において, $D < 0$ かつ $g_{xx}(a, b) > 0$ のとき極小となる.

上記の定理を用いて, $f(x, y)$ は (4) で求めた x, y において極小となることを示せ. なお, 定理の証明は不要である.

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.396 xyz 空間に平面 S がある. 平面 S 上には 3 点 P, Q, R がある. 点 P の座標は $(1, 1, 1)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-1, 1, 2)$ である. このとき, 平面 S の方程式を求めよ. ただし, 平面 S の方程式を表すために用いてよい変数は x, y, z のみとする（解答の過程でこれら以外の変数を用いた場合でも, 最終的な答えは x, y, z のみを用いて表すこと）. 考え方と計算過程を明記すること.



(福井大 2020)　　(m20202418)

0.397　以下の行列 A の逆行列を求めよ．計算過程も明記すること．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202419)

0.398　以下の行列 B を考える．B の固有値の 1 つは 3 である．この固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．ただし，固有ベクトルを規格化する必要はない．考え方と計算過程を明記すること．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202420)

0.399　C と D は同じサイズの正則行列であるとする．CD の逆行列 $(CD)^{-1}$ を C の逆行列と D 逆行列を用いて表すと，$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ となる．この理由を式を用いて説明せよ．

(福井大 2020)　　(m20202421)

0.400　非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz, \quad ただし，\cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ．

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ．

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる．

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ．

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ．

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である．

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.401　次の関数を微分せよ．

(1) $y = \left(\dfrac{4x+3}{x^2-3x+4}\right)$　　(2) $y = \sin^5 x\ \cos 5x$

(3) $y = \log(1+x^2)$　　(4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(福井大 2020)　　(m20202423)

0.402　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^4-3x^2+4}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)dx$

(福井大 2020)　　(m20202424)

0.403　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 2x dx$

(福井大 2020)　　(m20202425)

0.404　次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = x^2+2x-1$

(福井大 2020)　　(m20202426)

0.405　次のベクトルと行列の演算を行え．

(1) $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

(福井大 2020)　　(m20202427)

0.406　$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ．

(福井大 2020)　　(m20202428)

0.407　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202429)

0.408 $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(3) 上の結果を利用して，A^n を求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202430)

0.409 次の連立方程式について以下の問に答えなさい.

$x + y + z = 3 \ \cdots\cdots$ ①
$x - y + z = 0 \ \cdots\cdots$ ②

(1) 上式を行列とベクトルを使って表現しなさい.

(2) はきだし法などを用いて解きなさい.

(3) 求めた解の概形を，式 ① と ② が示す図形とともに示し，簡潔な補足説明を加えなさい.

(福井大 2020)　　(m20202431)

0.410 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202432)

0.411 次式は，1 質点 1 自由度モデルの自由振動の運動方程式である．なお，m:質量，c:減衰係数，k:剛性であり，$x(t)$: 時間 t の関数である変位である.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(1) 両辺を m で除し，$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, $2h = \dfrac{c}{m\omega}$ とおいて，上式を書き換えなさい.

(2) a をゼロでない定数とするとき，$x(t) = ae^{\lambda t}$ が運動方程式の解となるための条件を示せ.

(3) 上の結果を利用して $x(t)$ の一般解を示せ.

(4) $0 < h < 1$ の時，(3) で得られた解を，三角関数を用いて表せ.

(福井大 2020)　　(m20202433)

0.412 次の関数 y を x で微分せよ.

(1) $y = xe^{-x^2}$　　　　(2) $y = \dfrac{x^x}{(x+1)^{x+1}}$

(福井大 2021)　　(m20212401)

0.413 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

ただし，m および n は正の整数とする.

(福井大 2021)　　(m20212402)

0.414 $\cosh x$ をマクローリン級数展開せよ．ただし，一般項も示すこと．

(福井大 2021)　　(m20212403)

0.415 次の関数 $u = f(x, y, z)$ の全微分を求めよ．

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(福井大 2021)　　(m20212404)

0.416 次の重積分を計算せよ．ただし，D は $x^2 + y^2 = 2$ と $y = x^2$ で囲まれた領域である．

$$\iint_D y dx dy$$

(福井大 2021)　　(m20212405)

0.417 以下に示す行列の行列式及び固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(福井大 2021)　　(m20212406)

0.418 以下の行列を対角化せよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212407)

0.419 以下のベクトルがそれぞれ直交するときの実数 x を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212408)

0.420 あるくじ引きにおいて，1 回くじを引いて当たりの出る確率が $p = 1/3$ である．A, B, C の 3 人が，順番にくじを引く．一回一回のくじ引きの結果が独立であるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) $A \to B \to C$ の順でこのくじを 1 回ずつ引き，最初に当たりを出した人を勝ちとする. 3 人とも当たりを出さなかった場合は，勝者はいないものとする．C が勝つ確率を求めよ．

(2) $A \to B \to C \to A \to B \to C \to \cdots$ の順で誰かが当たりを出すまでこのくじ引きを続けることとし，最初に当たりを出した人を勝ちとする．C が勝つ確率を求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212409)

0.421 2 つの確率変数 X と Y　$(-1 < X < 1,\ -1 < Y < 1)$ の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ が下記のように表されるとき，以下の問いに答えよ．

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2 + x + y}{8}\ , \quad -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1$$

(1) 確率変数 X と Y のそれぞれの期待値 EX,　EY を求めよ．

(2) 確率変数 $Z = X - Y$ の期待値 EZ を求めよ．

(福井大 2021)　　(m20212410)

0.422 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+10\dfrac{dx}{dt}+3x=0$　　　(1) $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+10\dfrac{dx}{dt}+3x=9t+5\cos t$

(福井大 2021)　　(m20212411)

0.423 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021)　　(m20212412)

0.424 正方行列 A がある．ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ が行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルである ($A\boldsymbol{\varphi}=\lambda\boldsymbol{\varphi}$) とき，以下の問いに答えよ．ただし，$I$ は A と同じ次数の単位行列とする.

(1) ベクトル $-\boldsymbol{\varphi}$ も行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A+I$ の固有値 $\lambda+1$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 A^2 の固有値 λ^2 に属する固有ベクトルであることを示せ.

(福井大 2021)　　(m20212413)

0.425 次の関数の 1 階導関数と 2 階導関数を求めよ．なお，n は整数，e は自然対数の底である.

$x^{n-1}e^{1/x}$

(福井大 2021)　　(m20212414)

0.426 次の定積分を計算せよ.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(福井大 2021)　　(m20212415)

0.427 以下の行列 A，およびベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を考える．a を実数とし，以下に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{u}$ を計算することにより，$\boldsymbol{u}$ は a の値によらず A の固有ベクトルであることを示せ．また 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する固有値を求めよ.

（注）固有方程式を使う必要はない.

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}$ が A の固有ベクトルとなるように，a の値を定めよ．また，そのときの固有値（固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対する固有値）を求めよ.

（注）固有方程式を使う必要はない.

(3) $a=0$ のとき，A の固有値を全て求めよ.

(福井大 2021)　　(m20212416)

0.428 実数 x と y に対する連立方程式 $2x-3y=0$, $ax+6y=0$ について，以下の問いに答えよ．，

(1) この連立方程式を 2×2 行列 A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて $A\boldsymbol{u} = 0$ の形に表せ．また，その結果を使い，連立方程式が $x = y = 0$ 以外の解を持つように実数 a の値を定めよ（逆行列 A^{-1} が存在すればどのような解が得られるか考えるとよい）．

(2) 上で求めた a の値を a_0 とする．$2x - 3y = 0$ と $ax + 6y = 0$ の図形的意味（それらが xy 平面上で表す図形はどのようなものか）に基づき，$a = a_0$ のときに連立方程式が $x = y = 0$ 以外の解を持つ理由を説明せよ．

(福井大 2021)　　(m20212417)

0.429 以下のベクトル $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ を考え．$\boldsymbol{h} = x\boldsymbol{f} + y\boldsymbol{g}$ を成立させる実数 x と y が存在するか否かを調べることにより，$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ が一次独立か一次従属かを判定せよ．

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212418)

0.430 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta \cos\theta \\ y = \theta \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる．

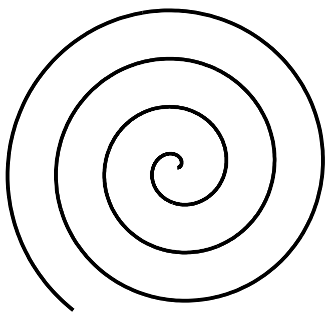


図 1 ：蚊取り線香

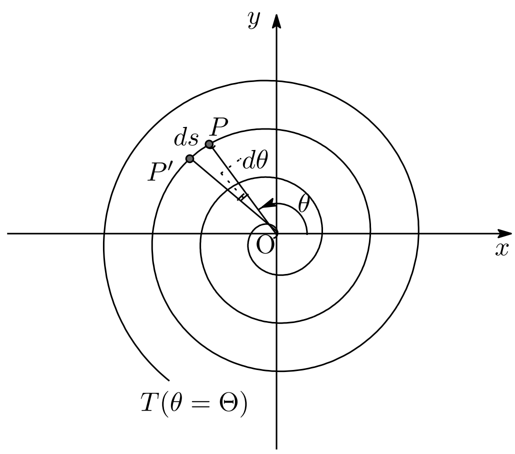


図 2 ：「アルキメデスのらせん」

図 2 に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P - P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は，

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意．

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ．

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta = \Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい $\Big)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.431　次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log x(5-x)$

(2) $y = \dfrac{4x-1}{e^x}$

(3) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

(4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}+2x}$

(福井大 2021)　　(m20212420)

0.432　(1) 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-16}{e^x-4}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_6^{10} x(x-6)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos\theta+1)^2 d\theta$

(福井大 2021)　　(m20212421)

0.433　次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

$$x = 2(t - \sin t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$
ここで，$0 \leq t \leq 2\pi$

(福井大 2021)　　(m20212422)

0.434　次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

(福井大 2021)　　(m20212423)

0.435　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ とし，t が転置を表すとき，${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つことを示せ.

(福井大 2021)　　(m20212424)

0.436 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2021) (m20212425)

0.437 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A) = 0$（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(福井大 2021) (m20212426)

0.438 次の連立方程式について以下の問に答えよ.

$$\begin{aligned} x - 3y + 3z = 0 \quad \cdots \quad ① \\ 2x + y - z = 0 \quad \cdots \quad ② \end{aligned}$$

(1) 上式を行列とベクトルを使って表現しなさい.

(2) はきだし法などを用いて解きなさい.

(3) (2) で求めた解の概形を図示しなさい.

(福井大 2021) (m20212427)

0.439 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(福井大 2021) (m20212428)

0.440 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) $x = e^{\lambda t}$ が運動方程式の解になるための条件を示せ.

(2) 上の結果を利用して x の一般解を示せ.

(3) (2) で得られた解を，三角関数を用いて表せ.

(福井大 2021) (m20212429)

0.441 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \log\left(5\sqrt{x^2+1} + 5x\right)$ (2) $y = \dfrac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $y = \cos\dfrac{5\pi}{x^2+5}$ (4) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(福井大 2022) (m20222401)

0.442 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{(4e^x+2)^2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\log 3x}$

(福井大 2022)　　(m20222402)

0.443 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\sqrt{e^x}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\ dx$

(福井大 2022)　　(m20222403)

0.444 $f(x)=4\sin x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\sin 2x\ \ (0\leq x\leq\pi)$ の最大値を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222404)

0.445 次のベクトルと行列の演算を行え.

(1) $2\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $a\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & b-a \end{pmatrix}-b\begin{pmatrix} a-b & -a \\ a & b-a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(福井大 2022)　　(m20222405)

0.446 以下に示す行列の演算を行いなさい. ただし, 三角関数は数値に置き換えて算出すること. また, 式中の t は転置を意味する.

$4\begin{pmatrix} \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \\ \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \end{pmatrix}^t$

(福井大 2022)　　(m20222406)

0.447 次の連立一次方程式をガウスの消去法（掃き出し法）を用いて解きなさい.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(福井大 2022)　　(m20222407)

0.448 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222408)

0.449 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ を求めよ.

(2) $\Phi_A(A)=0$　（ケーリー・ハミルトンの定理）が成り立つことを示せ.

(福井大 2022)　　(m20222409)

0.450 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222410)

0.451 次式は，単振動の運動方程式である．なお，m : 質量，k : バネ定数，x : 変位，t : 時間である.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(1) 角速度 ω(rad/s) を m および k を用いて表しなさい.
なお，上に示した運動方程式の解は $x = A\cos(\omega \cdot t) + B\sin(\omega \cdot t)$ になる.
ここに，A, B は初期値によって決まる定数である.

(2) $m = 1$ (kg)，$k = 1$ (N/m) の場合について，$t = 0$ 秒における初期値を $x = 1$ (m)，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ (m/s) として 単振動の運動方程式を解きなさい.

(福井大 2022)　　(m20222411)

0.452 次の関数 $f(x)$ について $x = 0$ における微分可能性を調べよ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

(福井大 2022)　　(m20222412)

0.453 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \log(x - x\log x)$　　(2) $y = x^{e^x}$

(福井大 2022)　　(m20222413)

0.454 次の定積分を求めよ，

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \cos 2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

(福井大 2022)　　(m20222414)

0.455 $z = f(u) + g(v)$，$u = x + ct$，$v = x - ct$ のとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

が成り立つことを示せ．ただし，c は正の実定数である.

(福井大 2022)　　(m20222415)

0.456 次の積分の値を計算せよ.

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-y)dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq x-y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

(福井大 2022)　　(m20222416)

0.457 3 次元ベクトル $\mathbf{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に関する数列を以下のように定義する.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}_n\ , \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ を用いて，$\mathbf{x}_n$ を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222417)

0.458 以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である．

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ．

(2) n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ．

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される．
$\exp(\mathbf{S})$ を計算せよ．

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022)　　(m20222418)

0.459 以下の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(福井大 2022)　　(m20222419)

0.460 各面の目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 である普通のサイコロが 2 つある．このサイコロ 2 つを同時に振ったとき，目の数の合計の平均値，標本分散をそれぞれ求めよ．ただし，標本分散の有効数字は 2 桁として解答すること．

(福井大 2022)　　(m20222420)

0.461 確率変数 $\mathbf{a}$ の期待値は 240 で標準偏差は 4，確率変数 $\mathbf{b}$ の期待値は 40 で標準偏差は 12，確率変数 $\mathbf{c}$ の期待値は 30 で標準偏差は 3 である．ここで，確率変数 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は互いに独立である．このとき，以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(2) $\mathbf{f} = \mathbf{ab}/\mathbf{c}$ について，$\mathbf{f}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222421)

0.462 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = -20\sin t$

(福井大 2022)　　(m20222422)

0.463 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

(福井大 2022) (m20222423)

0.464 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を含む定積分，あるいは不定積分に関し，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

であることを用いてよい．答えを導く思考過程あるいは計算過程を丁寧に記述すること．

(1) 式 (1) を利用して，定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xf(\sqrt{2}x)dx$ を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(\sqrt{2}x)dx$ の値を求めよ.

(福井大 2022) (m20222424)

0.465 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{0}$ は n 次元ゼロベクトルを表し，$\boldsymbol{v}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す.

(1) 次の行列 A_1，A_2 の行列式をそれぞれ求めよ.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 問 (1) の A_1 を係数行列とする以下の連立一次方程式の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，x_1，x_2，x_3 は実数とする.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}$，および n 次の実対称行列 A_3 を用いて

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^\top A_3\, \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}}$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u})$ の最大値は A_3 の最大固有値に一致し，そのときの $\boldsymbol{u}$ は A_3 の最大固有値に対応する固有ベクトルであることが知られている．A_3 が次の行列であるとき，この事実を使って $f(\boldsymbol{u})$ の最大値，および対応する $\boldsymbol{u}$ をひとつ求めよ.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対し，行列 A_4 を次のように定める.

$$A_4 = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^\top$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ は A_4 の固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{c}$ に対応する固有値を求めよ.

(福井大 2022) (m20222425)

0.466 (1) 点 $P(x,y)$ を点 $A(a,b)$ を中心として反時計回りに角 θ だけ回転したとき，移動後の点 $Q(x',y')$ を行列で表せ．また，点 P が $(2,1)$，点 A が $(3,2)$ であったときに 30° 回転したときの点 Q を求めよ．

(2) 3 次元直交座標系（原点を O）において，任意の点 (x,y,z) を x 軸周りに角 θ だけ回転させる行列 $\boldsymbol{R}$ を表せ．また，固有値を求めよ．

(福井大 2022) (m20222426)

0.467 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z) = (a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ．

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$||\cdot||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は $\theta,\ \phi$ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022) (m20222427)