[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：茨城大

0.1 $D=\{(x,y)\mid y\geqq 0\ ,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\dfrac{2x}{a}\}$ のとき，
次の 2 重積分の値を求めよ．ただし， a , b は正の定数とする．

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

(茨城大 1998)　(m19981701)

0.2 次の微分方程式を解け．

$$y''+2y'+10y=e^{-t}\sin t\ ,\ \ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

(茨城大 1998)　(m19981702)

0.3 次に与える行列の固有値，および行列式の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(茨城大 1998)　(m19981703)

0.4 次の各問に答えよ．

(1) 複素平面で， i を中心とした，原点を通る円の方程式を求めよ．

(2) 複素関数 $w=\dfrac{1}{z}$ によって，(1) で求めた円がどのような図形に移るか具体的に答えよ．

(茨城大 1998)　(m19981704)

0.5 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ を求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ である．

(茨城大 1999)　(m19991701)

0.6 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を求めよ．

(茨城大 1999)　(m19991702)

0.7 $f_0(x)$ を値 1 をとる定数関数とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x f_0(t)dt\,,\quad f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt\,,\quad f_3(x)=\int_0^x f_2(t)dt$ を求めよ．

(2) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ (ただし，$n=1,2,3,\cdots$) を求めよ．

(3) $E(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ とおくとき $\dfrac{d}{dx}E(x)$ を求めよ．

(茨城大 1999)　(m19991703)

0.8 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(茨城大 1999)　(m19991704)

0.9 (1) 微分方程式 $\begin{cases} y''+2y'+2y=0 \\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1 \end{cases}$ の解 $y(t)$ を求めよ．

(2)　(1) で求めた関数 $y(t)$ のグラフを $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の範囲でかけ．

（茨城大 1999）　　(m19991705)

0.10　(1)　A, B, C を２次の正方行列とするとき，$(A+B)C = AC + BC$ が成り立つことを示せ．

(2)　２次の行列の行列式，３次の行列の行列式，４次の行列の行列式のそれぞれの定義を記せ．

(3)　行列について，上記の (1), (2) 以外に知っていることを記せ．

（茨城大 1999）　　(m19991706)

0.11　$A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ x & 1 & y \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1)　A の階数が 1 となる数の組 (x, y, z) をすべて求めよ．

(2)　$x = 1$, $y = 2$ のとき，

(a) $\det A = 0$ となる z を求めよ．

(b) $\det A \neq 0$ のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

（茨城大 1999）　　(m19991707)

0.12　複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-1}$ について，

(1)　$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．

(2)　次に示された曲線上を正の向きにとった積分路を C として，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ．

(a)　$C : |z-1| = 1$

(b)　$C : |z-i| = 2$

（茨城大 1999）　　(m19991708)

0.13　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r) = \log r$ とする．次の各問に答えよ．

(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ を示せ．

（茨城大 2000）　　(m20001701)

0.14　次の微分方程式を解け．　$y' = \dfrac{y}{x} \log \dfrac{y}{x}$

（茨城大 2000）　　(m20001702)

0.15　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1)　A が正則であるための a の条件を求めよ．

(2)　A が正則であるとき，A^{-1} の $(1, 2)$ 成分を求めよ．

（茨城大 2000）　　(m20001703)

0.16　２つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z} dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z} dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta = 0$ のときの点から $\theta = \pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000)　　(m20001704)

0.17 (1) $y = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\, dx$ を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011701)

0.18 次の定積分を求めよ．ただし，m と n は 0 以上の整数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

（ヒント：階乗を利用すると結果を簡潔に表示できる．$0! = 1$ である．）

(茨城大 2001)　　(m20011702)

0.19 集合 S を　$S = \left\{ a \;\middle|\; a = \dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は 1 以上の整数},\ p \text{ は } 1 \leq p < 10^k \text{である整数} \right\}$
と定義するとき，次の各問に答えよ．

(1) $a \in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ．

(2) S は無限集合であることを示せ．

(3) 任意の $a \in S$ に対して，$x_n \notin S$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ．

(茨城大 2001)　　(m20011703)

0.20 次の微分方程式を解け．　$y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$

(茨城大 2001)　　(m20011704)

0.21 (1) 行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$　の行列式を求めよ（どのように計算したかも書くこと）．

(2) 次の四つのうちから一つを選び，それについて知っていることを説明せよ．

(i) 基本行列　(ii) 置換　(iii) 行列式　(iv) 線形空間

(茨城大 2001)　　(m20011705)

0.22 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．次の各問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A を対角化するユニタリー行列を求めよ．

(3) A^6 を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011706)

0.23 z を複素数とするとき，$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ， $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ である．次の各問いに答えよ．

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ を示せ．

(2) y を実数とするとき，$\cos(iy) \geqq 1$ を示せ．

(3) $\cos z$ が実数となる z の条件を求めよ．

(茨城大 2001)　　(m20011707)

0.24 a, b, c を定数として，３次関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と法線の方程式を求めよ．

(2) どのような場合に，関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとるといわれるのかを説明せよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ が x のいかなる値でも極値をとらない条件を a, b, c を用いて示せ．

(茨城大 2002)　　(m20021701)

0.25 (1) 次の等式が $x = -1$ を除くすべての実数 x について成立するように，４つの定数 A, B, C, D を求めよ．

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$

(茨城大 2002)　　(m20021702)

0.26 (1) 関数 $f(x) = \sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.27 (1) $P(x, y) = 2x^m(y + x^2),\ Q(x, y) = -x^{m+1}(1 + x^2) + y$ とするとき，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ となるように m を定めよ．

(2) (1) で求めた m を考えるとき，微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ の一般解を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021704)

0.28 (1) 下記の方程式をみたす x の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の連立１次方程式をクラメルの公式を用いて解け．

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

（この公式を知らないときは，公式を用いないでよい．）

(茨城大 2002)　　(m20021705)

0.29 行列 $A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ について

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を A の固有ベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) 自然数 n に対して，$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021706)

0.30 次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)dz,\ C:0$ から $1+i$ に至る線分，ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を表す．

(2) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$, ただし，積分路は正の向きにとる．

(茨城大 2002)　　(m20021707)

0.31 $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ について

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる x と，そのときの y の値を求めよ．

(2) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ のグラフの増減，凹凸および漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

(茨城大 2003)　　(m20031701)

0.32 $k > 0$ に対して，微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x^{k+1} \quad (t \geqq 0) \\ x(0) &= 1 \end{cases}$ の解を $x_k(t)$ とする．

(1) $x_k(t)$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{k\to 0} x_k(t)$ を求めよ．

(茨城大 2003)　　(m20031702)

0.33 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 0 \\ 2x+3y+az &= a-3 \end{cases}$ について

(1) 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

(2) 拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) この方程式が解をもつか否かを判定し，解をもつ場合にはその解を求めよ．

(茨城大 2003)　　(m20031703)

0.34 複素関数 $\omega = \dfrac{z-i}{z+i}$ について

(1) $z = 1$ のとき，$|\omega| = 1$ であることを示せ．

(2) z を ω の式で表せ．

(3) z 平面の円 $|z+1| = \sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか．

(茨城大 2003)　　(m20031704)

0.35 (u,v) 平面における正方形 $A=\{(u,v)|0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1\}$ が,

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$$

で表される写像により,(x,y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x,y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B x\,dx\,dy$ を求めよ.

(茨城大 2004) (m20041701)

0.36 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin x$$

(茨城大 2004) (m20041702)

0.37 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

(1) A の固有値を求めよ.

(2) T の逆行列 T^{-1} を求めよ.

(3) $T^{-1}AT$ を求めよ.

(茨城大 2004) (m20041703)

0.38 複素平面上の曲線 $z(t) = \cos t + i(1+\sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ を C とするとき,

(1) C を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C z\,dz$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ を求めよ. ただし,$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す.

（茨城大 2004） (m20041704)

0.39 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & -11 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(茨城大 2005) (m20051701)

0.40 関数 $y = \tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y = \mathrm{Arctan}\,x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y = \mathrm{Arctan}\,x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \mathrm{Arctan}\,x\,dx$ を求めよ.

(茨城大 2005) (m20051702)

0.41 (1) $x = e^t$ とおくとき, x の関数 y に対して,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

を満たすことを示せ.

(2) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

の一般項を求めよ.

(茨城大 2005) (m20051703)

0.42 複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ とするとき, 次の各問に答えよ.

(1) 実数 h を 0 に近づけるときの極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\overline{z+hi}\right)^3 - (\,\overline{z}\,)^3}{hi}$ を計算せよ.

(2) 0 から i までにいたる線分を積分路とする複素積分 $\displaystyle\int_0^i (\,\overline{z}\,)^2\,dz$ を求めよ.

(茨城大 2005) (m20051704)

0.43 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ. (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ.

(茨城大 2006) (m20061701)

0.44 $t > 0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t) : t^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4t^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ 上の二重積分
$F(t) = \displaystyle\iint_{D(t)} \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ について，次の問に答えよ.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ.

(2) $F'(t)$ を計算せよ.

(茨城大 2006) (m20061702)

0.45 次の微分方程式の一般解を求めよ． $(1+y^2)\dfrac{y}{x} + (1-y)^2\left(\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}\right) = 0$

(茨城大 2006) (m20061703)

0.46 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta} - 1\right)d\theta$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta} - 1\right|d\theta$

(茨城大 2006) (m20061704)

0.47 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$ $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義する．次の各問に答えよ.

(1) ${a_n}^2 < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ. (2) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ.

(3) 数列 $\{{a_n}^2\}$ は収束することを示せ．また，その極限値を求めよ.

(茨城大 2006)　　(m20061705)

0.48 (1) V をベクトル空間とし，W_1 , W_2 をその部分ベクトル空間とする．このとき、$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ は V の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) 実 4 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトルを

$$a_1 = (1, 0, 1, 2)\ , \quad a_2 = (0, 1, 1, -2)\ , \quad a_3 = (1, 1, 0, 2)\ , \quad a_4 = (1, 1, -1, 3)$$

と定める．また，a_1 と a_2 で張られる（生成される）部分ベクトル空間を W_1 とし，a_3 と a_4 で張られる部分ベクトル空間を W_2 とする．このとき，$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ の次元および基底を求めよ．

(茨城大 2006)　　(m20061706)

0.49 (1) 2 次元ユークリット空間（即ち平面）$\mathbb{R}^2$ の部分集合に関する次の性質を考える：
(1) 開集合である；**(2)** 閉集合である；**(3)** コンパクトである；**(4)** 連結である．
次の条件を満たす空でない部分集合の例をひとつずつあげよ：

(a) **(1)** かつ **(2)**
(b) **(1)** であるが **(2)** ではない
(c) **(1)** ではないが **(2)** である
(d) **(1)** でも **(2)** でもない
(e) **(3)** でないがその閉包（closure）は **(3)**
(f) **(4)** でないがその内部（interior）は **(4)**

(2) 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ．

(3) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の 2 つの部分集合 $[0, 1]$ と $[0, 1] \cup [2, 3]$ の間には全単射対応（即ち 1 対 1 かつ上への対応）が存在し得るか否か，その理由もこめて，述べよ．
ここで，$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqq x \leqq b\}$ である．

(茨城大 2006)　　(m20061707)

0.50 関数 $y = \sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，その逆関数 $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ を考えることができる．次の各問に答えよ．

(1) $f(x) = (\mathrm{Arcsin}\, x)^2$ は，どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ．

(2) 合成関数の微分公式に従い，$f(x) = (\mathrm{Arcsin}\, x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ．

(茨城大 2007)　　(m20071701)

0.51 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ．

(茨城大 2007)　　(m20071702)

0.52 次の微分方程式を解け， $y'' - y = e^x\ , \quad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 1$

(茨城大 2007)　　(m20071703)

0.53 複素数の数列 $z_n = \left(\dfrac{i}{2}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ.　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ を求めよ.　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} nz_n$ を求めよ.

(茨城大 2007)　(m20071704)

0.54 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．

$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y)\mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　(m20071705)

0.55 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限 $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す．

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007)　(m20071706)

0.56 3 次正方行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ．

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を　$\boldsymbol{u}_n=A^n\begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$，　$(n=0,1,2,\cdots)$　で定める．ただし，$\varepsilon=2^{-100}$ とし，A^0 は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ．

(a) $\lim_{n\to\infty}||\boldsymbol{u}_n||$　(b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　(c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left\|\boldsymbol{u}_n-\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|\le 2^{-10}$ なる n の存在の有無．

(茨城大 2007)　　(m20071707)

0.57 (1) 3つの元からなる集合 $\{a,b,c\}$ の部分集合をすべてあげよ．

(2) 一般に n 個 $(n \geq 1)$ の元からなる集合 X の部分集合は総計何個あるか論ぜよ．

(3) 一般に，写像 $f\ :\ X \to Y$ について次の主張は正しいか否か判定し，その理由を述べよ．

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$　　(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$　　(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ただし，A, B は X の部分集合とし，C, D は Y の部分集合を表す．また，X の部分集合 X'，Y の部分集合 Y' に対して，

$f(X') = \{f(x) \in Y \mid x \in X'\}$，　$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$　である．

(茨城大 2007)　　(m20071708)

0.58 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の部分空間 $V = \{A\boldsymbol{u}\ ;\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3\}$ が 2 次元となるための k についての必要十分条件を求めよ．また，そのときの V の基底を一組求めよ．

(3) 前問 (2) の k に対し，行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081701)

0.59 $x > 0,\ y > 0$ とする．$a > 0,\ 0 < b < 1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \log \dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y = ax,\ y = (a^2+1)x$，および曲線 $xy = b,\ xy = b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.60 X, Y を 2 つの集合とし，X の任意の元 x に対して Y の元 y をただ 1 つ対応させる規則を，X から Y への写像という．集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ は，次の条件 (i) を満たすとき単射であるといい，条件 (ii) を満たすとき全射であるという．特に，条件 (i),(ii) を同時に満たすとき全単射であるという．

(i) X の元 x_1, x_2 について，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．

(ii) Y の任意の元 y に対し，$y = f(x)$ となる X の元 x が少なくとも 1 つ存在する．

また，X から Y への全単射が存在するとき，2 つの集合 X と Y は対等であるという．

(1) 2 つの写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が全単射ならば，f は単射，g は全射であることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to Y$ は全射でなく，$g : Y \to Z$ は単射でないが，合成写像 $g \circ f$ が全単射となる例を 1 つ挙げよ．ただし，X, Y, Z はすべて空集合ではないとする．

(3) X, Y を元の個数がそれぞれ m, n の有限集合とする．X から Y への写像全体の集合 $F(X, Y)$ の元の個数を求めよ．また，$F(X, Y)$ に属する写像のなかで単射となるものの個数を求めよ．

(4) 自然数全体の集合 N と整数全体の集合 Z は対等であることを示せ．また，N と実数全体の集合 R は対等でないことを示せ．

(茨城大 2008)　　(m20081703)

0.61　次の連立不等式で表される領域を D とする．　$x + y \leqq 2$,　$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．　(2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081704)

0.62　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ．

ここで，固有値 λ の固有空間とは，λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2008)　　(m20081705)

0.63　$x = x(t)$, $y = y(t)$ のとき，次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ のもとで解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(茨城大 2008)　　(m20081706)

0.64　n を正の整数とする．C は複素平面上の円 $|z| = \dfrac{1}{2}$ を正の向きに一周する閉曲線とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{z^n(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n} + \dfrac{b}{z-1}$ を満たすような定数 $a_1, a_2. \cdots, a_n, b$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(z-1)}\,dz$ を求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081707)

0.65　(1) 関数 $y = \cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,\quad y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2)dx \right) dy$$

(茨城大 2009)　　(m20091701)

0.66　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ （a は実数）について，次の各問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の行列式の値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091702)

0.67　(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x$ を解け．

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ を解け．

(3) 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0$，$y(0) = 1$ のもとで解け．

$$\frac{dx}{dt} = -y\ , \quad \frac{dy}{dt} = x$$

(茨城大 2009)　　(m20091703)

0.68　複素数 $z = x + iy$（x, y は実数）の関数 $f(z) = x^2 - y^2 + y + i(2xy - x)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z)$ はすべての z で正則で，$f'(z) = 2z - i$ となることを示せ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f'(z)}dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面上の円 $|z| = 1$ を正の向きに一周する閉曲線とする．

(茨城大 2009)　　(m20091704)

0.69　実数体上のベクトル空間 V 上の一次変換 f に対して，V の部分空間 $\mathrm{Ker}\ f$ を

$$\mathrm{Ker}\ f = \{x\ :\ f(x) = 0\ ,\ x \in V\}$$

と定義する．また，$u_1,\ u_2, \cdots, u_h$ を $\mathrm{Ker}\ f$ の基底とし，それに $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ を加え V の基底とする．以下の各問いに答えよ．

(1) $v_1,\ v_2, \cdots, v_k$ が $\mathrm{Ker}\ f$ を法として一次独立である，すなわち

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \in \mathrm{Ker}\ f \quad \text{ならば} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

となることを示せ．

(2) $f(v_1)\ ,\ f(v_2)\ , \cdots, f(v_k)$ が一次独立であることを示せ．

(3) $f(V) = \{f(x)\ :\ x \in V\}$ とするとき，

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim f(V)$$

となることを示せ．

(茨城大 2009)　　(m20091705)

0.70 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする．また a,b は $a,b > 0$ を満たす実数とし，$g(x,y) = f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0\,,\,1\,] \times \left[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.71 集合 X の部分集合全体からなる集合をべき集合といい，2^X と表す．以下の各問いに答えよ．

(1) $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ とする．このとき，2^X に属する全ての要素を記述せよ．

(2) 集合 X, Y に対して

$$X \subset Y \Longleftrightarrow 2^X \subset 2^Y$$

となることを示せ．

(3) 集合 X, Y に対して

$$2^{X\cap Y} = 2^X \cap 2^Y$$

となることを示せ．

(4) 集合 X, Y に対して

$$2^{X\cup Y} \supset 2^X \cup 2^Y$$

となることを示せ．また，$2^{X\cup Y} \subset 2^X \cup 2^Y$ とならない例を一つ挙げよ．

(茨城大 2009)　　(m20091707)

0.72 2 変数関数 $z = f(x,y) = x^2+3xy+y^2$ について, 以下の各問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(1,2,11)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(1+at\,,\,2+bt)-f(1,2)}{t}$ を求めよ．

(3) 「$f(0,0)$ は極大値である」,「$f(0,0)$ は極小値である」,「$f(0,0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ．

(茨城大 2010)　　(m20101701)

0.73 実数を成分にもつ n 次列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す. すべての成分が実数である n 次正方行列 A に対して，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathrm{Ker}A$ と $\mathrm{Im}A$ を次のように定める．

$$\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}\,,\quad \mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}$$

ただし, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

以下の各行列 A について, Ker$A$ および ImA の次元と 1 組の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(茨城大 2010) (m20101702)

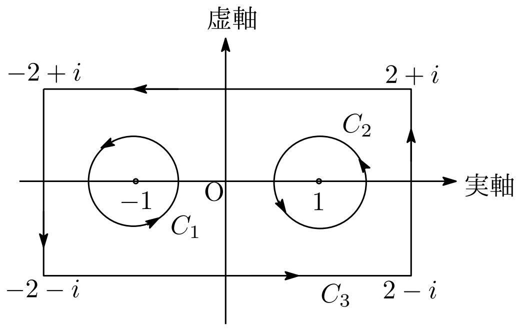
0.74 初期条件 $x = 1,\ y = 1$ のもとで, 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = y(1+y)$ の解を求めよ.

(茨城大 2010) (m20101703)

0.75 以下の各閉曲線 $C_k (k = 1, 2, 3)$ に沿う複素積分

$$\int_{C_k} \frac{ze^z}{(z+1)(z-1)^2}\, dz \quad (k = 1, 2, 3)$$

の値を求めよ. ただし, 各閉曲線 $C_k (k = 1, 2, 3)$ はいずれも正の向きに一周するものとする.



(1) C_1 : -1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(2) C_2 : 1 を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(3) C_3 : 4 点 $-2-i,\ 2-i,\ 2+i,\ -2+i$ を頂点とする長方形の辺

(茨城大 2010) (m20101704)

0.76 座標平面内の領域 $D = \{(x, y)\,|\, x, y$ は実数で $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x, y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x, y)\, dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010) (m20101705)

0.77 実数 $\alpha,\ \beta$ に対して, 2 次実正方行列 A で

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I = O$$

(I は 2 次単位行列, O は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, A は I の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A-\alpha I$ と $A-\beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y} = (A-\beta I)\boldsymbol{x}$ とおく. このとき任意の $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(A-\alpha I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

となることを示せ. また, α は A の固有値であることも示せ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ を α に対する固有ベクトルとするとき,

$$(A-\beta I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ で, $\{\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 P を

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1\,, \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $p^{-1}A^nP$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101706)

0.78 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0, 1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f, g に対し, X の上で定義された関数 $f * g$, $f\Box g$ を

$$(f*g)(x) = f(x)g(x)\,, \quad (f\Box g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)\,, \quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき}, \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f, g, h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f*(g\Box h) = (f*g)\Box(f*h)\,, \quad (f\Box g)\Box h = f\Box(g\Box h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) * \Phi(B)\,, \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A)\Box\Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010)　　(m20101707)

0.79 3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) 一次方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}$ を満たす $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ をすべて求めよ.

(2) 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ から 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 T を

$$T\ :\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$$

で定める．このとき，T は $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像であることを示せ．また，T の核空間の基底を求めよ．

(3) 前問 (2) の写像 T に対し，T の像空間の基底を求めよ．

(茨城大 2011) (m20111701)

0.80 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ について．以下の各問に答えよ．

(1) すべての $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y) = (\alpha x - y)(\beta x + y)$$

が成り立つように正定数 α, β を定めよ．

また $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ ．

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy = f(a,b)$$

(茨城大 2011) (m20111702)

0.81 X を空でない集合とし，R を X 上の同値関係とする．すなわち，R は直積集合 $X \times X$ の部分集合で，次の (i),(ii),(iii) を満たすとする．

(i) すべての $x \in X$ に対し，$(x,x) \in R$ である．

(ii) $(x,y) \in R$ ならば，$(y,x) \in R$ である．

(iii) $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば，$(x,z) \in R$ である．

また，同値関係 R による $x \in X$ の同値類 $\{y \in X \mid (x,y) \in R\}$ を記号 $[x]$ で表す．

以下の各問に答えよ．

(1) すべての $x \in X$ に対し，$[x] \neq \emptyset$ であることを示せ．ただし．$\emptyset$ は空集合を表す．

(2) 次の命題が成り立つことを示せ．

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow [x] = [y]$$

(3) すべての $x, y \in X$ に対し，$[x] \cap [y] = \emptyset$ または $[x] = [y]$ が成り立つことを示せ．

(茨城大 2011) (m20111703)

0.82 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(4) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121701)

0.83 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \leqq 1$ と $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121702)

0.84 f を集合 A から集合 B への写像とし，B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す，$A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする．このとき，次の (1) および (2) に答えよ．

(1) $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$ であることを示せ．

(2) f が全射ならば，$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ であることを示せ．

(茨城大 2012)　　(m20121703)

0.85 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y \geqq x\,,\ y \geqq -x\,,\ 4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$ に対して，$J = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.86 x, y を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，A の行列式を $|A|$ で表す．

x, y が条件 $|A| = 0$ を満たすとき，点 (x, y) の描く図形を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121705)

0.87 以下の各問に答えよ．

(1) 初期条件 $x = 0,\ y = 1$ のもとで，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = xy$ を解け．

(2) 初期条件 $x = 0,\ y = 1$ のもとで，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ を解け．

(茨城大 2012)　　(m20121706)

0.88 実数 x, y に対して，$z = x+iy$ とする．複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて，$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ とおく．$u(x,y) = e^{-2x}\cos 2y$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ．

(2) $v(x,y)$ は，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすとする．このとき，$v(0,0) = 3$ となるような $v(x,y)$ を求めよ．

(3)　$f(z)$ を z の関数として表せ.

(茨城大 2012)　　(m20121707)

0.89　以下の問に答えよ.

(1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x - e^x\log 2 - 1 + \log 2}{x^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする.

(2)　関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ の区間 $[0,\infty)$ における最大値と最小値を求めよ.

(茨城大 2013)　　(m20131701)

0.90　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y=\tan^{-1}x$ は，$y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y=\tan x$ の逆関数を表す.

(茨城大 2013)　　(m20131702)

0.91　以下の各問に答えよ.

(1)　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2)　連立一次方程式 $\begin{cases} 2x-3y\ \ +z = \ \ 2 \\ -6x+9y-3z=-6 \\ \ \ x-3y\ \ +z = \ \ 2 \end{cases}$ を解け.

(茨城大 2013)　　(m20131703)

0.92　$x=x(t),\ y=y(t)$ のとき，次の連立微分方程式を初期条件 $x(0)=5$，$y(0)=2$ のもとで解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x-4y \\ \dfrac{dy}{dt} = \ \ x-2y \end{cases}$$

(茨城大 2013)　　(m20131704)

0.93　複素数 z の絶対値を $|z|$，z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す．$w=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ.

(1)　次の値をそれぞれ求めよ.

(i)　w^3　　(ii)　$|w|$　　(iii)　$w\overline{w}$　　(iv)　$1+w+w^2$

(2)　複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対して,

$$c_n = \alpha + \beta\,\overline{w^n} + \gamma\,\overline{w^{2n}} \qquad (n=0,1,2)$$

とおく．このとき,

$$d_n = c_0 + c_1 w^n + c_2 w^{2n} \qquad (n=0,1,2)$$

とおく．d_0，d_1，d_2 をすべて計算して，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を使って表せ.

(茨城大 2013)　　(m20131705)

0.94　2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + xy + \dfrac{1}{2}y^2$ の極値を求めよ.

(茨城大 2014)　　(m20141701)

0.95　i を虚数単位とし，$z=\dfrac{\sqrt{3}(i-1)-(1+i)}{1+i}$ とおくとき，以下の各問に答えよ.

(1) $z=a+ib$ を満たす実数 a,b を求め，絶対値 $|z|$ を答えよ．

(2) $z=re^{i\theta}$ となる r と θ を求めよ．ただし，$r>0$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(3) z^n が実数となるような最小の自然数 n を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141702)

0.96 $y=y(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} + \frac{y}{x} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) 新しい未知関数 $u=u(x)$ を $u=\dfrac{y}{x}$ によって定義する．このとき，微分方程式 $(*)$ を $u=u(x)$ に関する微分方程式に書き換えよ．

(2) 初期条件 $x=2,\ y=4$ のもとで，微分方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141703)

0.97 a を実数の定数とする．xy 平面において，関数 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ のグラフが 3 点 $(2,1)$, $(3,-1)$, $(a,0)$ を通るとする．このような実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ がただ 1 組定まるための必要十分条件は，$a \neq 2$ かつ $a \neq 3$ であることを示せ．また，この条件のもとで，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の値を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141704)

0.98 有理関数 $f(x)=\dfrac{5}{(x^2+1)(x+2)}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}$ を満たす定数 a,b,c を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151701)

0.99 4 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2+2b^2 & a^3 \\ 1 & b & 2a^2+b^2 & b^3 \\ 1 & -a & a^2+2b^2 & -a^3 \\ 1 & -b & 2a^2+b^2 & -b^3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えよ．

ただし，a,b は実数とする．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) $a=0$ かつ $b=-1$ のとき，連立 1 次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解け．

(茨城大 2015)　　(m20151702)

0.100 $y=y(x)$ に関する微分方程式について，以下の各問に答えよ．

(1) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ の一般解を求めよ．

(2) $y'''-6y''+11y'-6y=e^{4x}$ の一般解を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151703)

0.101 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.102 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{x}_2=(2,-1,-1)$, $\boldsymbol{x}_3=(-1,1,0)$, $\boldsymbol{y}_1=(-4,2,2)$, $\boldsymbol{y}_2=(0,-1,1)$, $\boldsymbol{y}_3=(-1,1,0)$ とする．また T を $T(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{y}_i$　$(i=1,2,3)$ を満たす 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の線形写像とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $T(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)$ を求めよ．

(3) $T(\boldsymbol{x})$ が零ベクトルとなる $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ をすべて求めよ．

(4) T の固有値及び，各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151705)

0.103 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ を

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数}\\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数}\end{cases}$$

と定義する．f による，偶数全体の集合の像と，奇数全体の集合の像を求めて，f が全単射であることを示し，f の逆写像 $f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151706)

0.104 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z=f(x+ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．

$$\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(2) $z=f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.105 a を $0\leq a$ を満たす定数とし，

$$f(x,y)=x^2+y^2-2axy$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 次の重積分の値が 0 になるように a を定めよ.

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ , \qquad \text{ただし,}\ D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}.$$

(茨城大 2015) (m20151708)

0.106 k を実数とし, 3 次の正方行列 A, 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$$

により定める. 以下の各問に答えよ.

(1) $k=1$ のとき, A の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $k=1$ のとき, f は全単射となることを示せ.

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ. また, f がこの条件を満たすとき, f の核 $\ker(f)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\ ;\ f(\boldsymbol{x})=0\}$ と f の像 $\mathrm{Im}(f)=\{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.

(茨城大 2016) (m20161701)

0.107 xy 平面内の領域 D を $D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ とする. D から $\mathbb{R}$ への 2 変数関数

$$f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big(f_x(x,y)+f_y(x,y)\big)$ が存在するかどうか確かめよ.

(茨城大 2016) (m20161702)

0.108 xy 平面内の領域 $E=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq y,\ 1\leq y\leq 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$ を計算せよ.

(茨城大 2016) (m20161703)

0.109 次の連立不等式で表される領域を D とする. $\dfrac{1}{2}y\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ の順序を交換して, 値を計算せよ.

(茨城大 2016) (m20161704)

0.110 成分がすべて実数である行列に関して, 以下の各問に答えよ.

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つか否か, 理由を付けて答えよ.

(3) 一般に，3 行 2 列の行列 A と 2 行 3 列の行列 B の積 AB は単位行列にならないことを示せ．

(茨城大 2016)　　(m20161705)

0.111　$-\infty < x < \infty$ において，微分可能な関数 $y(x)$ が次の等式

$$y(x) = x^2 + \int_0^x ty(t)dt$$

を満たしているとする．関数 $y(x)$ を求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161706)

0.112　複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C : z(t) = t + i\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ．

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.113　実数を成分とする 3 次正方行列 A のうち，$A^3 = O$ かつ $A^2 \neq O$ を満たすもの全体の集合を X とする．ただし O は 3 次零行列とする．以下の各問いに答えよ．

(1) X の元を 1 つあげよ．

(2) X の任意の元 A の行列式は 0 であることを示せ．

(3) X の任意の元 A の固有値はすべて 0 であることを示せ．

(4) A を X の元とする．$\boldsymbol{a}$ を $A^2\boldsymbol{a}$ が零ベクトルでない 3 次実ベクトルとするとき，$\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ．

(茨城大 2017)　　(m20171701)

0.114　実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3x - 3y^2$ に対して，xyz 空間内の曲面 S を

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ z = f(x, y)\right\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) k を正の定数とする．曲面 S 上の点 $(k, k, f(k, k))$ における接平面が原点 $(0, 0, 0)$ を通るように定数 k の値を定めよ．

(茨城大 2017)　　(m20171702)

0.115　n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n) = \iint_{D_a} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n} dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n \geq 2$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to \infty} I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017)　　(m20171703)

0.116 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f, g を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ.

(1) f が線形写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ.

(2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(4) g は線形写像でないことを示せ.

(5) g は全単射であることを示せ.

(茨城大 2018)　　(m20181701)

0.117 $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x, y)$ を考える.

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{y^2 - 1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ.

(茨城大 2018)　　(m20181702)

0.118 次の関数を考える.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ f(x, y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ.
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^\infty F(t) dt = \iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.119 R^4 の線形部分空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \quad : \quad \begin{array}{c} 2x+z+8w=0 \\ x+y+z+w=0 \end{array} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \quad : \quad x=-2y-w=-3z+w \right\}$$

以下の各問に答えよ.

(1) 線形空間 V_1 と V_2 の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) 線形空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ.

(3) $V_1 \cup V_2$ が R^4 の線形部分空間ではないことを示せ.

(4) $V_1 \cup V_2$ を含む, R^4 の最小の線形部分空間の基底を一組求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191701)

0.120 A は $A^2 = A$ をみたす n 次実正方行列で, 零行列でも単位行列でもないとする. 0 と 1 は A の固有値であり, A の固有値は 0 と 1 に限ることを示せ.

(茨城大 2019)　　(m20191702)

0.121 実 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y + 2$ を考える. 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $z = f(x,y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.122 実 2 変数関数 $g(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ を考える. また, $\boldsymbol{R}^2$ の点 (a,b) について,

$$D(a,b) = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq 1 \right\}$$

とする. 以下の各問に答えよ.

(1) $D(0,0)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分を求めよ.

(2) $D(a,b)$ 上の $g(x,y)$ の 2 重積分は $g(a,b)\pi$ となることを示せ.

(茨城大 2019)　　(m20191704)

0.123 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える. 以下の各問に答えよ.

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ.

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ.

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ.

(4) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする.

$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ.

(茨城大 2020) (m20201701)

0.124 $G(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ で定義される陰関数 $y = g(x)$ の極値を調べよ.

(茨城大 2020) (m20201702)

0.125 a を正の定数とする. 関数 $f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.
ただし, 対数は自然対数とする.

(茨城大 2020) (m20201703)

0.126 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x^2+3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2+8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2}dxdy$ を計算せよ.

(茨城大 2020) (m20201704)

0.127 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の各固有値の固有空間を求めよ. ここで, 固有値 λ の固有空間とは, λ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである.

(茨城大 2020) (m20201705)

0.128 $x = x(t)$ に関する 2 つの微分方程式

(i) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 0$

(ii) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 4t^4 - 11t^2 + 2$

について, 以下の各問に答えよ. ただし, (1),(2) は答のみを書けばよい.

(1) $x_1(t) = e^{t^2+t},\ x_2(t) = e^{t^2-t}$ はそれぞれ (i) の解である. (i) の一般解を求めよ.

(2) $x_0(t) = t^2$ は (ii) の解の 1 つである. (ii) の一般解を求めよ.

(3) 初期条件 $x(0) = 0,\ x'(0) = 2$ のもとで (ii) の解を求めよ.

(茨城大 2020) (m20201706)

0.129 i を虚数単位とするとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき, 複素数 $1 - e^{i2x}$ を $a + ib$ (a, b は実数) の形で答え, その絶対値を求めよ.

(2) 前問 (1) で得られた複素数 $a + ib$ を $re^{i\theta}$ の形で表せ. ただし, $r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で, $1 - e^{i2x}$ の絶対値が $\sqrt{2}$ になるときの x を求めよ.

(茨城大 2020) (m20201707)

0.130 実対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ.

(茨城大 2020) (m20201708)

0.131 λ を 0 でない実数とする．4 次実正方行列 A の固有値はすべて重複し λ であるとする．また，

$$W_1 = \left\{ (A - \lambda E)u \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (A - \lambda E)u = 0 \right\}$$

とおく．ただし，E は 4 次の単位行列，0 は零ベクトルを表す．以下の各問に答えよ．

(1) W_1 および W_2 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $\dim W_2 = 3$ のとき，$W_1 \subset W_2$ であることを示せ．

(茨城大 2020)　　(m20201709)

0.132 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を一組求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ の次元が 2 となる自然数 n を求め，その n について V の基底を一組求めよ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ かつ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を満たす，一次独立であるベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ の組を決定せよ．

(茨城大 2021)　　(m20211701)

0.133 関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ で 2 回連続微分可能（すなわち，2 次までの偏導関数がすべて存在し，かつ連続）で，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たしているとする．このとき，次の小問 (1) および (2) に答えよ．

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$w(x, y) = xu(x, y) - yv(x, y)$ とおく．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(茨城大 2021)　　(m20211702)

0.134 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25 - 6x^2 + 15y^2})^3} dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2021)　　(m20211703)

0.135 X, Y が空でない集合で，f は X から Y への写像とする．Y の空でない部分集合で A, B に対し，$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成り立つことを示せ．ただし，Y の空でない部分集合 C に対し，$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$ と定める．

(茨城大 2021)　　(m20211704)

0.136 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ および，$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対して，

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathrm{V}(\mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{V}(\mathbf{a})$ の基底を一組求めよ．

(3) A の固有値および各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(4) $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \geqq 0$ であることを示せ．

(茨城大 2022) (m20221701)

0.137 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ．

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ．

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ．

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ．

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ．

(茨城大 2022) (m20221702)