[選択項目] 年度：1991～2023 年　大学：岩手大

0.1 不等式 $\log_{1/2} x > -3$ を満足する x の範囲を求めよ．

(岩手大 1994)　(m19940301)

0.2 $\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994)　(m19940302)

0.3 放物線 $y^2 = 4x$ の焦点を F，この放物線上の頂点以外の任意の点を $P(x_1, y_1)$，P から x 軸に下ろした垂線の足を H，点 $(-x_1, 0)$ を Q とする．以下の問に答えよ．

(1) $PF = QF$ であることを示せ．

(2) 直線 PQ は，点 P において放物線に接することを示せ．

(岩手大 1994)　(m19940303)

0.4 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x\cos^2 x$　(2) $y = (x^2-1)\,e^{2x}$　(3) $y = \log(2-x)$

(岩手大 1994)　(m19940304)

0.5 次の関数の極値とそのときの x の値，および変曲点における関数の値と x の値を求めよ．ただし，極値については極大であるか極小であるかを明記せよ．

(1) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

(2) $f(x) = 1/(1+x^2)$

(岩手大 1994)　(m19940305)

0.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)\log x\ dx$　(3) $\displaystyle\int e^{-3x}dx$

(岩手大 1994)　(m19940306)

0.7 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\exp[-(x-t)^2]dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-x^2]dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,a_n}}\exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ． $\quad I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994)　　(m19940307)

0.8 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が，次のような行列 A で表されるとする．

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また，x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする．次の各問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は，１次変換 f により，どのようなベクトルに移されるか．

$$x_1 = e_1 + e_3, \qquad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような３つのベクトル ${e_1}', {e_2}', {e_3}'$ を考える．

$${e_1}' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \qquad {e_2}' = e_2, \qquad {e_3}' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

６つの内積 ${e_1}'\cdot{e_1}'$, ${e_2}'\cdot{e_2}'$, ${e_3}'\cdot{e_3}'$, ${e_1}'\cdot{e_2}'$, ${e_2}'\cdot{e_3}'$, ${e_3}'\cdot{e_1}'$ の値を求めよ．

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から ${e_1}'$, ${e_2}'$, ${e_3}'$ に変えると，１次変換 f を表す行列は，どのような形になるか．

(5) １次変換 f はどのような変換か，明確に述べよ．

(岩手大 1994)　　(m19940308)

0.9 任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

(a) $\quad f_0(x) = x^2$

(b) $\quad f_n(x)\,e^{-x} = \displaystyle\int_x^{\infty} f_{n-1}(t)\,e^{-t}dt$

次の問に答えよ．

(1) 次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t}dt\,, \quad J = \int_x^{\infty} t\,e^{-t}dt\,, \quad K = \int_x^{\infty} t^2\,e^{-t}dt$$

(2) ２つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (\,n = 0, 1, 2, \cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3) 前問の２つの数列の一般項 $a_n, b_n(\,n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960301)

0.10 関数 $r = f(\theta)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = a$$

に関し，次の問に答えよ．ただし，a は正の定数である．

(1)　上の常微分方程式の一般解を求めよ．

(2)　一般解の積分定数を次の条件によって決定せよ．

$$\theta = 0 \text{ において } \quad f = 2a, \quad \frac{df}{d\theta} = 0$$

(3)　θ の範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ とする．(r, θ) を極座標とするとき，方程式 $r = f(\theta)$ で表される図形の概形を描け．

(4)　前問の図形によって囲まれる面積を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960302)

0.11　３つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\phi \qquad (a)$$

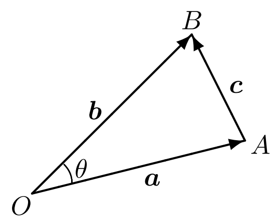
で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (b)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

３つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996)　　(m19960303)

0.12　t を実変数，x, y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y \qquad (\mathbf{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる．

$$\frac{dr}{dt} = Ar \qquad (\mathbf{b})$$

ここで，行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ．

(1)　実定数を成分とする２行２列の正則行列 P を導入すると，上記の $(\mathbf{b})$ が次のように書きかえられることを示しなさい．

$$\frac{dR}{dt} = BR \qquad (\mathbf{c})$$

ここで，B, R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる．

$$B = P^{-1}AP, \quad R = P^{-1}r$$

(2) P を次のようにとると，B が対角行列になることが分かった．

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $det\, P$,P の逆行列 P^{-1}，および B を求めよ．

(3) 次式のように，列ベクトル R の成分を X, Y とする．

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 (**c**) を解き，X, Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ．

(4) $t = 0$ において $x = x_0, y = y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 (**a**) の解を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960304)

0.13 $f(x) = \sqrt{x} \log x \quad (x \geq 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(岩手大 1997)　　(m19970301)

0.14 $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x+1) = x f(x)$ を部分積分を用いて証明せよ．

(2) x が自然数 n のとき，$f(n) = (n-1)!$ を証明せよ．

(3) $f(5)$ を求めよ．

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ．ただし，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(岩手大 1997)　　(m19970302)

0.15 以下の問に答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を $y = C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}$ と仮定して求めよ．ただし，C_1 及び C_2 は任意定数とする．

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

(2) 次の微分方程式の特殊解を $y = Ae^{Bx}$ と仮定して求めよ．

$$y'' - 5y' + 4y = e^x$$

(3) 次の 2 つの微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x), \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

の一般解をそれぞれ $y = f(x),\ y = g(x)$ とするとき，$y = f(x) + g(x)$ は次の微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

の解であることを示せ．

(4) (3) の結果を用いて，次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 5y' + 4y = e^x + e^{4x}$$

(岩手大 1997)　　(m19970303)

0.16　３次元空間内の３点 A, B, C の各々の座標を $(a, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を２辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997)　　(m19970304)

0.17　次の式の分母を有理化せよ．$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(岩手大 1998)　　(m19980301)

0.18　次の２重根号をはずせ．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(岩手大 1998)　　(m19980302)

0.19　次の不等式を解け．$2x^2 - x - 3 > 0$

(岩手大 1998)　　(m19980303)

0.20　2 と 8 の相加平均と相乗平均を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980304)

0.21　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$$

(岩手大 1998)　　(m19980305)

0.22　範囲 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x) = \sin x + x\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt + \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 I_1，I_2，I_3，J_1，J_2，J_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-t}dt, \qquad I_2 = \int_0^\infty te^{-t}dt, \qquad I_3 = \int_0^\infty e^{-t}\sin t\,dt$$

$$J_1 = \int_0^\pi \cos t\,dt, \qquad J_2 = \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt, \qquad J_3 = \int_0^\pi t\cos t\,dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる２つの定積分を，次のように A，B とおく．

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt = A, \qquad \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = B$$

A，B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980306)

0.23 次の和を求めよ．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(岩手大 1998) (m19980307)

0.24 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad (x \geqq 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x，y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x, y) に対し，原点と点 $\left(\dfrac{x}{2}\,,\ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ．

(岩手大 1998) (m19980308)

0.25 次の 2 つのベクトルの和と差が直交するように，x を定めよ．

$\boldsymbol{a} = (9, 4)$，$\boldsymbol{b} = (4, x)$

(岩手大 1998) (m19980309)

0.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の和と積を求めよ．

(岩手大 1998) (m19980310)

0.27 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998) (m19980311)

0.28 次の複素数の計算をせよ. ただし,i は虚数単位 $(=\sqrt{-1})$ をあらわす.

$$\frac{1}{\dfrac{1}{5-2i}+\dfrac{1}{6}}$$

(岩手大 2004)　　(m20040301)

0.29 次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004）　　(m20040302)

0.30 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta)=\sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0<\theta<1$）

(2) $f(i\theta)=e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする.

(3) $f(\theta)=\cos\theta$ を無限級数へ展開し, $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を証明せよ.

(4) $f(t)=5+0.4\sin\omega t+0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t+0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t)=\sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t)=0.4\sin 2\omega t+0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t)=A\sin(2\omega t+\phi)$$

（岩手大 2004）　　(m20040303)

0.31 次の関数を各変数について偏微分せよ.

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

（岩手大 2004）　　(m20040304)

0.32 $\dfrac{dq(t)}{dt}=-\dfrac{q(t)}{CR}$ を解き, $q(t)$ を求めよ. ただし,C,R は定数, $q(t)$ は $t=0$ において $q(0)=q_0$ （ただし q_0 は定数）とする.

(岩手大 2004)　　(m20040305)

0.33 次の微分方程式の一般解を, $y=e^{\lambda x}$ と置くことで求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-y=0$$

(岩手大 2004)　　(m20040306)

0.34 次の２つのベクトルの内積 $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$（スカラー積）および外積 $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}$（ベクトル積）を求めよ。

$\overrightarrow{A}(2,3,4)$, $\overrightarrow{B}(3,-2,0)$

（岩手大 2004）　(m20040307)

0.35 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ. ただし, E は２次の単位行列である.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) $2A^2-3A+E=O$ を満たす, a の値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた a の値を代入して, $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

（岩手大 2004）　(m20040308)

0.36 曲線 $C: y=2\sqrt{x+4}$, 直線 $l: y=x+a$, 及び 無理方程式 $2\sqrt{x+4}=x+a$ に関し, 次の問に答えなさい. ただし, a は実定数です.

(1) $a=2$ として, 曲線 C と直線 l のおよそのグラフを同じ図の中に描きなさい.

(2) 上の無理方程式が２重解をもつとき, a のとる値を求めなさい.

(3) 上の無理方程式が相異なる２重解をもつとき, a のとる範囲を求めなさい.

(4) 上の無理方程式が１つの実数解しかもたないとき, a のとる範囲を求めなさい.

(5) $a=0$ のとき, 上の無理方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2006)　(m20060301)

0.37 ３つの行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

に関し, 次の問に答えよ.

(1) 行列の和 $A+B$ と差 $A-B$ および積 AB を求めなさい.

(2) 行列式 $|B|$ および $|C|$ の値を求めなさい.　(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(岩手大 2006)　(m20060302)

0.38 微分方程式 $(2x-y+1)dx-(x-2y+5)dy=0$ に関し, 次の問に答えなさい.

(1) ２直線 $2x-y+1=0$, $x-2y+5=0$ の交点の座標を求めなさい.

(2) (1) で求めた交点を原点とする座標系 (X,Y) を用いて, 上の微分方程式を表しなさい.

(3) (2) で求めた微分方程式を解きなさい.

(4) (3) で求めた解を, (x,y) で表しなさい.

(岩手大 2006)　(m20060303)

0.39 重積分 $\displaystyle\int_0^1\int_0^x e^{x-y}dydx$ に関し, 次の問に答えなさい.

(1) この重積分の積分範囲を図示しなさい.

(2) この重積分の値を求めなさい.

(3) この重積分の積分順序を変更した式を示しなさい.

(4) 積分順序を変更した式から, 重積分の値を求める計算をしなさい.

(岩手大 2006)　　(m20060304)

0.40　xyz 空間に 2 つの平面

$$\alpha \ : \ x+3y-2z+1=0$$
$$\beta \ : \ 2x-y+3z-2=0$$

があるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい．

(2)　(1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい．

(3)　点 $(1,2,-1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080301)

0.41　(1)　次の行列の積を求めなさい．

$$\text{(i)} \ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，次のものを求めなさい．

(i)　A の行列式 $|A|$　　(ii)　A の逆行列 A^{-1}

(3)　次の等式を証明しなさい．$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$

(岩手大 2008)　　(m20080302)

0.42　次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1)　$y' = y^2 + y$　　(2)　$y + 2xy' = 0$　　(3)　$y'' - 4y' + 3y = x$

(岩手大 2008)　　(m20080303)

0.43　球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部と円柱 $x^2+y^2=ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい．

(1)　球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ を図示しなさい．

(2)　極座標 (r,θ) を用い $x = r\cos\theta$ ，$y = r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい．

(3)　共通部分の体積を求めなさい．

(岩手大 2008)　　(m20080304)

0.44　区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$，$g(x)$ は，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ．

(1)　次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k, l はともに自然数である．

(a)　$\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx \quad (k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx \quad (k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は，$\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 $a_0,\ a_k,\ b_k$ をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\,,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.45　xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(2) 3 点 $A,\ B,\ C$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(3) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(4) (3) で求めた平面が，球 $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = r^2 \quad (r > 0)$ に接しているとき，r の値を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.46　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 次の式を計算しなさい．

(i) A の逆行列 A^{-1}　　(ii) $\left(A + 6A^{-1}\right)\left(A - 6A^{-1}\right)$

(2) 行列 A で表される一次変換を f とするとき，一次変換 f による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めなさい．

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090303)

0.47　関数 $z = \log\left(x^2 + 2y^2\right)$ について，次の問いに答えなさい．ただし，対数は自然対数である．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 変数 $x,\ y$ が変数 $r,\ \theta$ の関数

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めなさい．

(3) (1) および (2) の結果を用いて，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(岩手大 2009)　　(m20090304)

0.48　1 階微分方程式

$$(x-1)\frac{dy}{dx}+2y=0\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

および 2 階微分方程式

$$(y-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0\cdots\cdots ②$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 ① の一般解を求めなさい．

(2) 微分方程式 ② に対して，$\dfrac{dy}{dx}=u$ と変数変換することにより，y の関数 u についての 1 階微分方程式を求めなさい．ただし，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{du}{dy}u$ である．

(3) (2) で求めた 1 階微分方程式の一般解を求めなさい．

(4) 微分方程式 ② の一般解を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090305)

0.49　xyz 空間の点 $P(0,0,t)$ を通り, ベクトル $\vec{a}=(2,2,1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z=11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t>0$ とする.

(1) 平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2) 球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4) 球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100301)

0.50　行列 $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 P をひとつ求めなさい.

(4) 任意の自然数 n に対し A^n を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100302)

0.51　2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\sin\Omega t$$

について, 次の問いに答えなさい. ただし, 初期条件

$$t=0 \text{ のとき, } x=\frac{dx}{dt}=0$$

とする. また, ω と Ω は正の定数とする.

(1) $\omega\neq\Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(2) $\omega = \Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100303)

0.52 重積分

$$I = \iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1$$

の共通部分である.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(3) $x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100304)

0.53 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r = 1 + \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100305)

0.54 xyz 空間に 2 点 $A(5,3,4)$, $B(1,-1,2)$ を直径の両端とする球 S と点 $C(-1,-3,1)$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 球 S の方程式を求めなさい.

(2) 2 点 A, B を通る直線に垂直で, 球 S の中心を通る平面の方程式を求めなさい.

(3) 2 点 A, B を通る直線に平行で, 点 C を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S が交わる点の座標を求めなさい.

(岩手大 2011)　　(m20110301)

0.55 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 f によって直線 $\ell : x - 1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2) 線形変換 f によって平面 $\alpha : x + y + z = 1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4) 線形変換 f によって平面 $\beta : x + y = 1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011)　　(m20110302)

0.56 $D = \left\{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 2y\right\}$ とするとき, 次の重積分について以下の問いに答えなさい.

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) x , y を極座標変換したとき，領域 D が移る領域 G を求め，図示しなさい.

(3) (1) および (2) の結果を用いて，重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2011)　　(m20110303)

0.57 $a^2+b^2=5$, $a>0$, $b<0$ であるとき，次の微分方程式について以下の問いに答えなさい.

$$(axy-e^x\cos y)\,dy=\left(e^x\sin y+by^2\right)\,dx$$

(1) この微分方程式が完全微分方程式であるときの a および b の値を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて，この微分方程式を解きなさい.

(岩手大 2011)　　(m20110304)

0.58 xyz 空間内に４点 $A(-3,-3,1)$, $B(2,-8,1)$, $C(-2,-3,-2)$, $D(2,1,4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) ４点 A, B, C, D を通る球 S の方程式を求めなさい.

(2) 球 S の中心を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい.

(3) 点 C を通り，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ に垂直な平面 α の方程式を求めなさい．また，平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=z-2$$

との交点の座標を求めなさい.

(4) 点 D から平面 α に直線を引き，α との交点を E とするとき，線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい．このとき，線分 DE の長さを求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120301)

0.59 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&5&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&2\\-1&3\end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 B,C と２次の単位行列 E に関して $BC=E$ が成り立つとき，行列 C を求めなさい.

(3) 行列 B の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(4) 行列 B を対角化しなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120302)

0.60 球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$〜$\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい.

直交座標 (x,y,z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z=\boxed{\text{（イ）}}$ で表される.

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる.

$$V=2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\,dxdy\cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 $(r,\,\theta)$ を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z=\boxed{\text{（カ）}}$ で表される.

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい.

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120303)

0.61　2 階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $y = A\sin 3x - B\cos 3x$（A, B は任意定数）は一般解であることを証明しなさい.

(2) 初期条件「$x = 0$ のとき $y = 1$, $y' = 3$」を満たす特殊解を求めなさい.

(3) 境界条件「$x = \dfrac{\pi}{3}$のとき $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{9}$のとき $y = 1$」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120304)

0.62　方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 4z - 4 = 0$ で表される球 S について，次の問いに答えなさい.

(1) 球 S の中心座標と半径を求めなさい.

(2) 球 S が xy 平面と交わってできる図形は円である．この円の中心座標 P と半径を求めなさい.

(3) 球 S が yz 平面と交わってできる円の中心座標を Q とするとき，2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S との交点座標を求めなさい.

(岩手大 2013)　　(m20130301)

0.63　対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，a, b は定数とする.

(1) 定数 a, b を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2013)　　(m20130302)

0.64　次の各問いに答えなさい.

(1) $D_1 = \{(x, y) \,|\, 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ のとき，領域 D_1 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{D_1} (x + 2y)dxdy$$

(2) $D_2 = \left\{(x, y) \,|\, 0 \leqq y \leqq -x^2 + 4x\right\}$ のとき，領域 D_2 を図示し，次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{D_2} xdxdy$$

(3) $D_3 = \left\{(x, y) \,|\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}$ のとき，領域 D_3 を図示しなさい，また，次の 2 重積分の値を極座標に変換して求めなさい.

$$\iint_{D_3} x^2\,dxdy$$

(岩手大 2013)　　(m20130303)

0.65　2 階微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = -85\sin 3x$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $y = 6\cos 3x + 7\sin 3x$ が上の微分方程式の 1 つの解であることを示しなさい.

(2) (1) の結果を利用して上の微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) $x=0$ のとき $y=0,\ y'=0$ を満たす上の微分方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2013)　　(m20130304)

0.66 xyz 空間内に 2 点 $A(1,0,0),\ B(2,1,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) 点 A を通り，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(2) 点 B を通り，直線 ℓ に垂直な平面が y 軸と交わる点の座標を求めなさい.

(3) 点 B を中心とし，原点 O を通る球 S の方程式を求めなさい.

(4) 球 S と直線 ℓ が交わる 2 つの点の座標を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140301)

0.67 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 行列 A を直交行列により対角化しなさい.

(3) $X^2-E=A$ を満たす行列 X をひとつ求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140302)

0.68 次の立体について，以下の問いに答えなさい.

曲面 $x^2+y^2=z^2$，平面 $z=0$，平面 $z=1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい.

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる. $\boxed{\quad(ア)\quad}$，$\boxed{\quad(イ)\quad}$ にあてはまる式を答えなさい.

$$V=\iint_D \left(1-\boxed{\quad(ア)\quad}\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \boxed{\quad(イ)\quad}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.69 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+\sin t \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+2y \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を消去し，$y(t)$ に関する微分方程式を求めなさい.

(2) $y=A\sin t+B\cos t$ が (1) で求めた微分方程式の解になるような，適当な定数 A,B を求めなさい.

(3) (2) の結果を利用して，(1) で求めた微分方程式の一般解を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140304)

0.70 xyz 空間内に 3 点 $A(1,0,0),\ B(0,2,1),\ C(1,2,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ を求めなさい. その結果を用いて，3 点 A,B,C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(2) 平面 α の方程式を求めなさい.

(3) 原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい.

(4) 接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150301)

0.71 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 固有値を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求め，A を対角化しなさい．

(4) A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(岩手大 2015)　　(m20150302)

0.72 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 = b^2 \ \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

　この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

　この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \boxed{\text{（オ）}}\, dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

　また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2 \iint_{D_1} \boxed{\text{（キ）}}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.73 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ の一般解を求めなさい．ただし，$\omega \neq 0$ とする．

(2) $\omega = 1$ のとき，微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 2\sin 3t$ の一般解を求めなさい．

(3) (2) において，$t = 0$ のとき $x = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ を満たす解を求めなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150304)

0.74 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(12,12,0)$, $B(0,12,12)$, $C(12,0,12)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 3 点からなる三角形 ABC の重心 G の座標を求めなさい.

(2) 重心 G を中心とする半径 4 の球面の方程式を示しなさい.

(3) 上の (2) で求めた球面の半径が 4 から毎秒 2 で増加するとき，球面が原点 $O(0,0,0)$ に達するまでの時間を求めなさい.

(岩手大 2016) (m20160301)

0.75 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ を考える．$B'=AB=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C=AC$ であるとき，次の問いに答えなさい

(1) a,b,c,d の値をそれぞれ求めなさい.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) $D=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $D'=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}=AD$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて u, v の値をそれぞれ求めなさい.

(4) 行列 A の固有値，および，それに属す固有ベクトルを求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(岩手大 2016) (m20160302)

0.76 2 階微分方程式 $y''+3y'+2y=4x^2-14$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 上の微分方程式の特性方程式 $S^2+3S+2=0$ の解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $y''+3y'+2y=4x^2-14$ の一般解を求めなさい.

(3) 上の (2) の微分方程式について，初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=-4$ を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2016) (m20160303)

0.77 2 つの曲線 $y=\cos 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$, $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい.

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい.

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(岩手大 2016) (m20160304)

0.78 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0,1,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(1,1,0)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(3) 原点を通り，(2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

(岩手大 2017) (m20170301)

0.79 行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の各成分の余因子を求めなさい.

(3) A は正則であるかどうかを述べなさい，また，正則ならば，A の逆行列を求めなさい.

(岩手大 2017)　　(m20170302)

0.80 関数 $f(x)=x^2e^{-x+2}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $y=f(x)$ の増減と極値を調べ，そのグラフをかきなさい.

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めなさい.

(3) $\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい，

(岩手大 2017)　　(m20170303)

0.81 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2x+y-1}$ に関する次の問いに答えなさい.

(1) $u=2x+y-1$ とおき，与えられた微分方程式を変数分離形になおしなさい.

(2) この微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) 初期条件「$x=1$ のとき $y=-1$」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2017)　　(m20170304)

0.82 点 O を原点とする xyz 座標空間において，中心が点 $(2,\ -1,\ -2)$ で，点 O を通る球面を S とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S と xy 平面の交わりは円になる. この円の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になる. k の値を求めなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180301)

0.83 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) $AB=C$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて $u,\ v,\ w$ の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180302)

0.84 関数 $f(x)=xe^{-2x}$ について次の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x)$ を微分しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい.

(3) 関数 $f(x)$ の極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい.

(4) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい. また，極値と変曲点の座標も示しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180303)

0.85 微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2) 微分方程式の一般解を求めなさい．

(3) 微分方程式について，初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ をみたす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180304)

0.86 3 次元直交座標系 (x, y, z) において，中心が点 $(-1, 2, 4)$ で半径 5 の球面を S とする．
次の問いに答えなさい．

(1) 球面 S の方程式を求めなさい．

(2) 球面 S の中心の x 座標が毎秒 2 で増加するとき，その球面の方程式を求めなさい．ただし，時刻 $t = 0$[秒] のときの中心は点 $(-1, 2, 4)$ とする．

(3) 上の (2) で求めた球面 S と平面 $x = 4$ との交わりが半径 4 の円になるときの時刻 t[秒] を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190301)

0.87 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 行列 A のランク（階数）rank (A) が 3 であることを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい．

(3) 行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい．

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190302)

0.88 関数 $f(x) = x^2 e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を作成し，概形を図示しなさい．また，(1) で求めた極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190303)

0.89 微分方程式 $y'' - 2y' + 4y = e^{2x}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2) 微分方程式の特殊解を求めなさい．

(3) 微分方程式の一般解を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190304)

0.90 3 次元直交座標系 (x, y, z) において $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2kz + 14 = 0$ が球を表すとき，次の問いに答えなさい．ただし，k は実数とする．

(1) k の範囲を求めなさい.

(2) この球は, xy 平面と交わらないことを示しなさい.

(3) この球が, yz 平面, zx 平面 と交わり, かつ, yz 平面との切口の面積が, zx 平面との切口の面積の 2 倍となるときの k の値を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200301)

0.91　2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について　次の問に答えなさい.

(1) 次の等式を満たすことを示しなさい.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

ただし, E は単位行列, O は零行列である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, $A^4 - 5A^3 + 10A^2 + 7A + 3E$ を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200302)

0.92　関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について, 次の問に答えなさい.

(1) $f(x)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めなさい.

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を作成し, この範囲における $f(x)$ のグラフの概形をかきなさい. また, 極値と変曲点の座標も示しなさい.

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200303)

0.93　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - y = -2y^2$ について, 次の問に答えなさい.

(1) $u = y^{-1}$ とおき, 与えられた微分方程式を線形微分方程式になおしなさい.

(2) 与えられた微分方程式の一般解を求めなさい.

(3) 初期条件「 $x = 0$ のとき $y = \dfrac{1}{4}$ 」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200304)

0.94　(1) 点 $A(-3, 2, 6)$, 点 $B(5, 2, 0)$ を直径の両端とする球面 C の方程式を求めなさい.

(2) 球面 C と yz 平面の交わりは円になる. この円の中心座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 C と x 軸の交点は 2 点存在する. この交点間の距離を求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210301)

0.95　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,　$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）$\mathrm{rank}(A)$ が 3 であることを示しなさい.

(2) $AB = C$ であるとき, 行列を用いて x, y, z の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210302)

0.96 関数 $f(x)=4x^4\log_e x$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$x>0$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求めなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ をそれぞれ求めなさい．

(3) 関数 $f(x)$ の増減表を凹凸を含めて作成しなさい．また，極値と変曲点の座標も示しなさい．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めなさい．

(岩手大 2021) (m20210303)

0.97 微分方程式 $\dfrac{x}{2}y'+y=g(x)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $g(x)=0$ のときの一般解を求めなさい．

(2) $g(x)=x^2+\dfrac{1}{4+x}$ のときの一般解を求めなさい．

(3) (2) のときの「$x=-3,\ y=2$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2021) (m20210304)

0.98 原点 O の xyz 空間に点 $A(2,1,3)$，点 $B(3,-2,1)$ が与えられている．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0\leqq\theta<\pi$ とする．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい．

(3) 3 点 $O,\ A,\ B$ を通る平面 α の方程式を求めなさい．

(4) 点 $C(-1,-2,3)$，点 $D(5,6,5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい．

(5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい．

(岩手大 2022) (m20220301)

0.99 3 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}-2 & a & 3\\ 4 & 1 & -a\\ 10 & 2 & b\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 行列 A が固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ をもつとき，a と b の値を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい．

(岩手大 2022) (m20220302)

0.100 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=e^{-x^2}$$

関数 $f(x)$ の極値および変曲点を調べ，増減表を作成しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

(岩手大 2022) (m20220303)

0.101 e を自然対数の底とする．次の問いに答えなさい．

(1) 次の関数 $g(x)$ を考える．ただし，$a,\ b$ を定数とし，$a > 0,\ b < 0$ とする．

$$g(x) = ae^{bx}$$

広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = 1$ が成り立つとき，$a = -b$ を示しなさい．

(2) $a = 2,\ b = -2$ のとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} xg(x)dx$ の値を求めなさい．

(岩手大 2022) (m20220304)

0.102 微分方程式 $y'' - y' - 2y = g(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい．

(2) $g(x) = e^{3x}$ のときの特殊解を求めなさい．

(3) (2) のときの一般解を求めなさい．

(岩手大 2022) (m20220305)