[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：金沢大

0.1 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする．$m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(3) 数列 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ は有界である．

(金沢大 1999)　(m19992201)

0.2 次の積分を行いなさい．　$a > 0$ で a は定数．

(1) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{ax} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

(金沢大 1999)　(m19992202)

0.3 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して，$f^{(n)}(x)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して，$g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表せ．

(金沢大 1999)　(m19992203)

0.4 (1) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に対して，ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 1} \sqrt{x^2+y^2}\, \exp\Bigl(-\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)^3\Bigr) dxdy$$

を求めよ．ただし，$\exp(t) = e^{\,t}$ である．

(金沢大 1999)　(m19992204)

0.5 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $(1+x)y + x(1-y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = ay$　,　$\dfrac{dy}{dt} = -ax$　$(a > 0)$

(金沢大 1999)　(m19992205)

0.6 ある化学反応では，物質の濃度が減少する速さは，その物質の濃度に比例する．時刻 $t = 0$ で，濃度 $x = x_0$ として，濃度の時間的変化を求めなさい．

(金沢大 1999)　(m19992206)

0.7 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次に答えよ．

(1) A の行列式 $|A|$ の値を，第 2 行に関して（余因子）展開することにより求めよ．

(2) A は正則か．正則ならば，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

（金沢大 1999）　(m19992207)

0.8 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 行列式 $|\lambda I - A|$ が 0 となる λ の値を求めよ．

(2) (1) における λ の値に対して， $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ をすべて求めよ．

（金沢大 1999）　(m19992208)

0.9 V を実ベクトル空間とする．

(1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の 1 つの基底であることの定義を述べよ．

(2) V を 3 次元列ベクトル空間とし，

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とおく．(1) の定義に基づき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の 1 つの基底であることを示せ．

（金沢大 1999）　(m19992209)

0.10 次のベクトル解析の公式を証明しなさい．

(1) $\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})=\overrightarrow{B}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})-\overrightarrow{C}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})$

(2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A})=0$

（金沢大 1999）　(m19992210)

0.11 位置ベクトルを $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ と示す．ベクトル $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は各々x, y, z 方向の単位ベクトルである．このとき以下の式が成り立つことを示しなさい．

$\mathrm{grad}(r^n)=n\,r^{n-2}\,\overrightarrow{r}$

（金沢大 1999）　(m19992211)

0.12 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で， $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする．

$s>0$ に対して $g(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f''(x)\,dt=s^2g(s)-sf(0)-f'(0)$ を示せ．

(2) ω は定数とする． $f(t)=\sin\omega t$ のとき， $g(s)$ を求めよ．

（金沢大 1999）　(m19992212)

0.13 (1) マクローリンの展開

$$\sqrt{1-x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) $\sqrt{1-x} \fallingdotseq a_0 + a_1 x$ を用いて，積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c\sin^2\theta}\, d\theta \quad (0 < c < 1)$$

の値がおよそ $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{c}{4}\right)$ であることを示せ．

(金沢大 2000)　　(m20002201)

0.14 変数変換 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(a, b$ は正定数$)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，(x, y) の動く領域 D を図示せよ．

(2) ヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002202)

0.15 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる直交行列 P と α, β, γ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002203)

0.16 (1) 関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ を微分せよ．　　(2) 関数 $\sin^{-1} x$ を微分せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{1}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012201)

0.17 重積分 $\displaystyle I = \iint_D \frac{x}{y\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dxdy$ について次の問に答えよ．

ここに　$D = \left\{(x, y)\ :\ y \geq x \geq 0\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$　とする．

(1) D の形を図示せよ．

(2) 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて重積分 I の値を求めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012202)

0.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と $\alpha, \beta, \gamma\ (\alpha < \beta < \gamma)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく．$X^2 = A$ が成立するように行列 B を定めよ．

(金沢大 2001) (m20012203)

0.19 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\log 1.1 - 0.095\right| < \frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002) (m20022201)

0.20 不等式 $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を利用して次の問いに答えよ．

ただし，$D_1 = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$, $D_2 = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2\}$ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx < \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)}$ を示せ．

(金沢大 2002) (m20022202)

0.21 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + ay + az = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ ax + ay + z = 0 \end{cases}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x = y = z = 0$ 以外の解をもつように a の値を定めよ．

(2) 上で定めた a の値に対して，この方程式の解を求めよ．

(金沢大 2002) (m20022203)

0.22 (1) $y = \cos x$ の第 n 階導関数 $y^{(n)}$ は，

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

で与えられることを示せ．

(2) 次の関数の第 n 階導関数 $y^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めよ．

(a) $y = (ax+b)\cos x$ (a, b は定数) (b) $y = \cos^2 x$

(金沢大 2003) (m20032201)

0.23 関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 閉領域 $D(a) = \left\{(x,y) | 1 \leqq x^2+y^2 \leqq a\right\}$ $(a > 1)$ に対して $\displaystyle\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}$ であるとき，a の値を求めよ．

(金沢大 2003) (m20032202)

0.24 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる正則行列 P を 1 つ求めよ．さらに α, β, γ の値を求めよ．

(金沢大 2003)　　(m20032203)

0.25 $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) n 階導関数 $\sinh^{(n)} t$, $\cosh^{(n)} t$ $\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(2) $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$ とおく. t を消去し, x と y の関係を求めよ.
また, $-\infty < t < \infty$ のとき, 点 (x, y) の描く曲線の概形を示せ.

（金沢大 2004）　　(m20042201)

0.26 閉領域 $D(R) = \{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ $(R > 1)$ に対して,

$$I_a(R) = \iint_{D(R)} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dxdy \quad (a > 0)$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(R)$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} I_a(R)$ を調べよ.

(金沢大 2004)　　(m20042202)

0.27 $A = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -29 \\ -12 & -4 & 22 \\ 6 & 3 & -11 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ とする.
次の問いに答えよ.

(1) $v = au_1 + bu_2 + cu_3$ をみたす定数 a, b, c を求めよ.

(2) u_1, u_2, u_3 は A の固有ベクトルであることを示し, 対応する固有値を求めよ.

(3) 自然数 n に対して $A^n v$ を求めよ.

(金沢大 2004)　　(m20042203)

0.28 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -a & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A が固有値 1 をもつときの a 値を求めよ.

(2) (1) で求めた a について, 行列 A の固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052201)

0.29 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} < f(x) < 1 + x - \dfrac{x^2}{2!}$ $\quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ を示せ.

(2) (1) を利用して $\cos(0.1) + \sin(0.1)$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052202)

0.30 領域 $D(R)=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leqq\ R^2\ ,\ y\geqq\ |x|\right\}$ $(R>0)$ に対して

$$I(R)=\iint_{D(R)}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) $I(R)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}I(R)$ を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052203)

0.31 t を実数とし, $A=\begin{pmatrix}1&t&t\\t&1&t\\t&t&1\end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052204)

0.32 (1) 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して, ある数 k とある零行列と異なる 2 次正方行列 B が存在して, $AB=BA=k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) t を実数とする. 連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{ccc}3x+5y+2z&=&0\\x+(t+2)y+z&=&0\\tx+y+(t-1)z&=&0\end{array}\right.$$

が $(x,y,z)=(0,0,0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(金沢大 2005)　　(m20052205)

0.33 関数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(2+\cos x)}{x-\pi} & (x\neq\pi)\\ 0 & (x=\pi)\end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ は $x=\pi$ で連続であるかどうか調べよ.

(2) $x=\pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ.

(金沢大 2005)　　(m20052206)

0.34 a,b は正の実数とする.

(1) $\dfrac{x}{a}=r\cos\theta\,,\ \dfrac{y}{b}=r\sin\theta$　$(0<r\,,\ 0<\theta<2\pi)$　とおくとき, ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r}&\dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\\dfrac{\partial y}{\partial r}&\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\quad を求めよ.$$

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$　を計算せよ. ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ y\geqq\ 0\,,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq\ 1\right\}$ とする.

(金沢大 2005)　　(m20052207)

0.35 (1) 関数 $\sin x$ を $x=0$ でテーラー展開したときのテーラー級数の最初の 3 項を求めなさい.

(2) (1) の結果を使い, 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における導関数の値 $f'(0)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) 次の関数 $g(x)$ を $x=-\pi/2$ から $x=1$ まで定積分しなさい.

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2 x & (x < 0) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

(金沢大 2005)　　(m20052208)

0.36 行列 L を

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します. 行列 L の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(金沢大 2005)　　(m20052209)

0.37 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とします. x, y, z は直交座標系の座標で, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです. 3 次元ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\ U(r)$$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\ ,\quad U(r) = \exp(-ar)$$

で, a は定数です.

(1) $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$　　(2) $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$

(3) 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B = \oint \boldsymbol{A} \cdot da$$

(金沢大 2005)　　(m20052210)

0.38 行列 $A = \begin{pmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 1-k & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (k は定数, $0 < k < 1$) について, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.　　(2) A を対角化せよ.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + d_n)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062201)

0.39 (1) 関数 e^{-x} にマクローリンの定理をあてはめた式を書け.

(2) 上を用いて, m を 2 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{(2m)!}$$

が成立することを示せ.

(3) m を 3 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{500}$$

が成立することを示せ.

(金沢大 2006)　　(m20062202)

0.40 関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0))$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(2) $0 < \varepsilon < 1$ とする. 積分 $I(\varepsilon) = \displaystyle\iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} (\sin\varepsilon) I(\varepsilon)$ を求めよ.

(金沢大 2006)　　(m20062203)

0.41 A を任意ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ を満たす 3×3 行列とする.

(1) A を求めよ.　　(2) A^3 を求めよ.

(3) A の 3 つの固有値及び各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072201)

0.42 $f(x)$ を $f'(x) = f(x),\ f(0) = 1$ を満たす関数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\left(e^{-x} f(x)\right)' = 0$ を示せ. また, これを用いて $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.43 領域 $D(\varepsilon) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 - \varepsilon,\ |y| \leqq x\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して
$I(\varepsilon) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\iint_{D(\varepsilon)} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 領域 $D(\varepsilon)$ を図示せよ.　　(2) $I(\varepsilon)$ を計算せよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\log I(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ の値を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072203)

0.44 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \to \infty$ のとき, $3^{-n} A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007)　　(m20072204)

0.45 4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ の部分ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = \{(x,y,z,w) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x + y + z + w = 0,\ x + 2y + 2z + 3w = 0\}$$

で定義する.

(1) $\boldsymbol{V}$ の基底を一つ求めよ. (2) $\boldsymbol{V}$ の正規直交基底を一つ求めよ.

(金沢大 2007) (m20072205)

0.46 次を示せ.

(1) $0 < a < b < \pi$ ならば, $\dfrac{\sin b}{b} < \dfrac{\sin a}{a}$ である.

(2) $0 < c < 1$ ならば, $\dfrac{\sin d}{d} = c$ となる d が開区間 $(0, \pi)$ のなかにただ一つ存在する.

(金沢大 2007) (m20072206)

0.47 $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする. 次の積分の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+2xy+4y^2)}dxdy$

(金沢大 2007) (m20072207)

0.48 (1) ある定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ と正の定数 M が存在して

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqq Mx^{n+1} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$ が成り立つとき, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$ を示せ.

(金沢大 2007) (m20072208)

0.49 次のことを示せ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする. $f(x)$ は連続でない.

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする. $m \geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2007) (m20072209)

0.50 n を自然数とし, I_n を次の広義積分で定める. $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき, 次の漸化式が成り立つことを示せ. $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ. $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007) (m20072210)

0.51 何回でも偏微分可能な関数 $u(x, y, z)$ が $\Delta u = 0$ $\left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$
をみたしているとする. このとき, $v = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ に対して, Δv を計算せよ.

(金沢大 2007) (m20072211)

0.52 (1) 自然数 n に対して, 集合 $D_n = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.

(2) 集合 $R_n=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leq x\leq n\,,\ 0\leq y\leq n\}$ に対して,
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)=0$ となることを示せ.

(3) 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2007) (m20072212)

0.53 連立方程式 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+\ \ x_4=0 \end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^4$ の全体を V とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ. (2) V の基底を一つ求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^4$ の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2007) (m20072213)

0.54 次の 4 × 4 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A=\{A\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072214)

0.55 $A=\begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(金沢大 2007) (m20072215)

0.56 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in M$ に対し, 線形写像 $F\ :\ M\to M$ を

$$F(X)=AX-XA \qquad (X\in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F=\{X\in M\mid F(X)=O\}\,,\quad \mathrm{Im}F=\{F(X)\mid X\in M\}$$

の次元を求めよ. ただし, O は零行列を表す.

(金沢大 2007) (m20072216)

0.57 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i=1,2,3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルで，その第 1 成分を 1 としたものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $i=1,2,3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ を満たす定数 a,b,c を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$A^n\boldsymbol{u}_1$ および $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082201)

0.58 $f(x)=\sqrt{1+x}\ (x>-1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ．

(3) (2) で得られた結果を $n=2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ．

(金沢大 2008)　　(m20082202)

0.59 (1) 変数変換 $x=u,\ y=uv$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy,\ D=\{(x,y)\mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ を求めよ．

(3) $R>1$ とし，$D_R=\{(x,y)\mid 1 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく．実数 α について，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R}\frac{x^\alpha}{x^2+y^2}dxdy$ 　が存在するかどうか調べよ．存在する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082203)

0.60 $A=\begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix}B$ となる行列 B を一つ見つけよ．

(2) A の行列式 $\det A$ を求め，A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a,b,c の条件として答えよ．

(金沢大 2008)　　(m20082204)

0.61 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) A の階数（ランク）を求めよ．

(2) ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f を $f(x)=Ax$ で定める．このとき，f の像の正規直交基底を一組求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082205)

0.62　$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082206)

0.63　$D=\{(x,y)\ ;\ 0\leq y<x\leq 1\}$ とする．$0<\alpha<1$ のとき，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2-y^2)^\alpha}dxdy$ 　の値を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082207)

0.64　実数 x と正の整数 n に対して，$R_n(x)$ を

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+R_n(x)$$

によって定める．ただし，$\arctan x$ は $y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．このとき，次に答えよ.

(1)　$1-t^2+t^4-\cdots+(-t^2)^{n-1}=\dfrac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$ を用いて，$R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$ となることを示せ.

(2)　$|x|\leq 1$ のとき　$R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$ となることを示せ.

(金沢大 2008)　　(m20082208)

0.65　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　行列式 $\det A$ を求めよ.

(2)　$\det A=0$ のとき，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解け.

(3)　$\det A\neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092201)

0.66　$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x$, $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x$ を示せ.

(2)　$\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\ \cosh\beta+\sinh\alpha\ \sinh\beta$ を示せ.

(3)　$f(x)=e^{x\cosh\alpha}\cosh(x\sinh\alpha)$ とする．ただし，α は定数とする.

$$\frac{d^nf}{dx^n}=e^{x\cosh\alpha}\cosh(n\alpha+x\sinh\alpha)\,,\quad n=1,2,3,\cdots$$

を示せ.

(金沢大 2009)　　(m20092202)

0.67　次の問に答えよ.

(1)　変数変換 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．ただし，a, b は正の定数とする.

(2)　重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(1+2x^2+y^2)^2}dxdy$,　$D=\{(x,y)\ :\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092203)

0.68 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092204)

0.69 1 変数 x の実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間 V を考える．

(1) $i = 0, 1, 2$ について，$x^i = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} a_{ij}(1+jx)^2$ を満たす a_{ij} を求めよ．

(2) $\{1,\ (1+x)^2,\ (1+2x)^2\}$ は V の基底であることを示せ．

(金沢大 2009)　　(m20092205)

0.70 (1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$ で定めるとき，$a_n > 0$ かつ $a_n > a_{n+1}$ となることを示せ．

(金沢大 2009)　　(m20092206)

0.71 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極値を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092207)

0.72 $a > 0$ とする．座標空間内に球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092208)

0.73 任意の x, y, z について，$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる $3 \times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．

(3) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列である．

(金沢大 2010)　　(m20102201)

0.74 関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ とする. 次の問いに答えよ．

(1) 公式 $\dfrac{d}{dy}\tan y = \tan^2 y + 1$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を利用して

$$(x^2+1)f'(x) = 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

となることを示せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

が成立することを示せ.

(3) $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 微分係数 $f^{(2m+1)}(0)$ の値を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102202)

0.75 (1) $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ とおく.

$$1 \leqq u \leqq 2\,,\ -\infty < v < \infty \text{ のとき } x \geqq 1\,,\ 1 \leqq x^2 - y^2 \leqq 4$$

となることを示せ. ただし, $\cosh v = \dfrac{e^v + e^{-v}}{2}\,,\ \sinh v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}$ である.

(2) 変数変換 $x = u\cosh v\,,\ y = u\sinh v$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{\log(x^2-y^2)}{x}\,dxdy$$

を計算せよ. ただし $D = \left\{(x, y) \,|\, x \geqq 1\,,\ 1 \leqq x^2 - y^2 \leqq 4\right\}$ とする.

(金沢大 2010)　　(m20102203)

0.76 a, b, c を正の実数として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & a & c \\ a & -(a+b) & b \\ c & b & -(b+c) \end{pmatrix}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102204)

0.77 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(2) $(A-2E)^2,\ (A-2E)^3$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102205)

0.78 $0 < x < \pi$ のとき

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

となることを示せ.

(金沢大 2010) (m20102206)

0.79 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{e^x - e^y - x + y}{x^2 + y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2010) (m20102207)

0.80 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x, y \geqq 0\right\}$ とするとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy\ .$$

(2) $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x, y \geqq 0,\ x + y \leqq 1,\ (x,y) \neq (0,0)\right\}$ とするとき

$$\iint_E \log(x+y)\,dxdy\ .$$

(金沢大 2010) (m20102208)

0.81 次の微分をしなさい.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

(金沢大 2010) (m20102209)

0.82 次の不定積分をしなさい.

$$\int x \cos x\,dx$$

(金沢大 2010) (m20102210)

0.83 関数 $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$ に対して, $\left(\partial f/\partial x\right)^2 + \left(\partial f/\partial y\right)^2 + \left(\partial f/\partial z\right)^2$ を求めなさい. ただし, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする.

(金沢大 2010) (m20102211)

0.84 $\vec{c}$ を定ベクトル, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ を位置ベクトルとするとき, $\vec{c} \times \vec{r}$ の回転 (rot) を求めなさい. ただし, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は, 右手直交座標系の x, y, z 軸に対する基本ベクトルである.

(金沢大 2010) (m20102212)

0.85 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2010) (m20102213)

0.86 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$) とする．$i=1,2,3$ に対して，λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i=1,2,3$ に対して，λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) ${}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 P を 1 つ求めよ．ただし，${}^tP$ は P の転置行列である．

(3) ${}^tP\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．また自然数 n に対して，$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112201)

0.87 次の問に答えよ．

(1) $(1+\sqrt{x}\,)^3$ は x の整式 $p(x), q(x)$ を用いて

$$(1+\sqrt{x}\,)^3 = p(x)+q(x)\sqrt{x}$$

と表すことができる．$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ．

(2) 次の等式

$$\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)} = \frac{-(2n-3)}{2x}\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n-1)} \quad , \quad n=2,3,4,\cdots$$

を示せ．ただし，$(\sqrt{x}\,)^{(n)}$ は $\sqrt{x}$ の n 階導関数である．

(3) $f(x)=(1+\sqrt{x}\,)^3$ とおくとき，

$$f^{(n)}(x)=3\left(1-\frac{x}{2n-3}\right)\left(\sqrt{x}\,\right)^{(n)} \quad , \quad n=2,3,4,\cdots$$

を示せ．

(金沢大 2011)　　(m20112202)

0.88 関数 $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) $D_a=\{(x,y)\mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2 \leqq x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とする．

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112203)

0.89 行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112204)

0.90 $V = R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ とする．次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ.

(2) V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は V の部分空間であることを示せ．また，$\mathrm{Im}f$ の基底を一つ求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112205)

0.91 次の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$ とおくとき，広義積分 I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) I_n の値を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112206)

0.92 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し，微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112207)

0.93 xyz空間内の二つの曲面　$x^2 + y^2 - x = 0$ と $z^2 = x$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112208)

0.94 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい.

(金沢大 2011)　　(m20112209)

0.95 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i} = \lambda_i \vec{p_i}\,,\ |\vec{p_i}| = 1\ (i = 1, 2, 3)\,, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ.

(3) $\vec{x}=x_1\vec{p}_1+x_2\vec{p}_2+x_3\vec{p}_3$ とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|A^n\vec{x}|=\infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ.

(金沢大 2012)　　(m20122201)

0.96 関数 $f(x)$ が $f(0)=0,\ f'(0)=1$ および微分方程式

$$(1-x^2)f''(x)=xf'(x)\qquad(-1<x<1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m=1,2,3,\cdots$ について

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x)-2mxf^{(m+1)}(x)-m(m-1)f^{(m)}(x)=xf^{(m+1)}(x)+mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m=2,3,4,\cdots$ について

$$f^n(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(0)}(x)=f(x)$ とする.

(3) $f(x)$ は区間 $-1<x<1$ でマクローリン級数に展開できるとする. その級数が

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

となることを示せ. ただし, $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)$, $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)$ である.

(金沢大 2012)　　(m20122202)

0.97 (1) 変換 $\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}\right.$ $(r\geqq 0)$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 2}\log(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

を計算せよ.

(金沢大 2012)　　(m20122203)

0.98 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して, $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2$ とする. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して, 次を示せ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\end{vmatrix}$$

が 0 でないならば, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は 1 次独立である.

(2) 上の行列式が 0 ならば, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は 1 次従属である.

(金沢大 2012)　　(m20122204)

0.99 行列

$$A=\begin{pmatrix}1-2r & r & r\\ r & 1-2r & r\\ r & r & 1-2r\end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ. ただし $r>0$ とする.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ.

(2) A の固有値，および対応する固有空間を求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n \ (n \geqq 1)$$

により定める．$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が収束するための r の条件，およびそのときの $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の極限を求めよ.

(金沢大 2012)　　(m20122205)

0.100 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して，

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．ただし必要ならば，$e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122206)

0.101 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ から，$y = x$ へ下ろした垂線の足を Q とする．点 Q の座標を，t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする．$t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を，(2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする．$y = x$ と $y = x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を，$y = x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を，s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V = \dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122207)

0.102 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = xye^{-(x^2+2y^2)}$ の極値と，それを与える点を求めよ.

(金沢大 2012)　　(m20122208)

0.103 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) A が固有値 3 と 1 をもつことを確かめ，固有値 3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を 1 つずつ求めよ.

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{z} - A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z}$ を 1 つ求めよ.

(3) (1), (2) の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ を用いて行列 $P = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ をつくるとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132201)

0.104 $a_n \neq 0$ を満たす実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots .\ a_n$ に対して

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \middle| a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0 \right\}$$

とおく．次の問い (1)〜(3) に答えよ

(1) V が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

(2) V の次元が $n-1$ であることを，実際にその基底を与えることによって，示せ．

(3) V の直交補空間を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132202)

0.105 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1.$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x.$

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0.$

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.106 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める．次の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 偏導関数 $f_x(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(3) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(金沢大 2013)　　(m20132204)

0.107 xyz空間において，条件

$$x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ x^2 + z^2 \leqq 1$$

で定まる立体の体積を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132205)

0.108 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ とする.

(a) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ.

(b) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ とする. $\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2},\ \overrightarrow{p_3}$ を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132206)

0.109　$a > 0,\ t > 0$ とする. $I_a(t) = \displaystyle\int_0^a t^x dx$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $I_a(1)$ を求めよ.

(2) $t \neq 1$ のとき $I_a(t)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{t \to 1} I_a(t)$ を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132207)

0.110　$0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とし,

$$D_\varepsilon = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ 1,\ y \geqq\ (\tan\varepsilon) x \right\},$$

$$I_\varepsilon = \iint_{D_\varepsilon} xy^2 dxdy$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) D_ε を図示せよ.

(2) I_ε を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-3}(I_\varepsilon - a) = b$ となる定数 a, b を求めよ.

(金沢大 2013)　　(m20132208)

0.111　行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする. $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して, λ_i および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \boldsymbol{v}$ とおく. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142201)

0.112　関数 $\varphi(x) = x \log x\ (x > 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\varphi'(x),\ \varphi''(x)$ を求めよ.

(2) テイラーの定理を適用して, $\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ.

(3) (2) の $p(x)$ に対し, $x > 0$ において $\varphi(x) \geqq\ p(x)$ が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 1$ を満たすとする. このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\, dx \geqq\ 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.113 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\ x\,,\ y\geqq\ 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 極座標による変数変換を用いて，2 重積分

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

を計算せよ．

(金沢大 2014)　　(m20142203)

0.114 線形変換 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

をみたすとする．ただし $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底，即ち

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\,f)$ の次元が 2 とする．

(a) b を a と c で表せ．

(b) f の核 $(\mathrm{Ker}\,f)$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142204)

0.115 行列 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\ \frac{1}{3}&0&0&-1\\ \frac{1}{4}&0&0&0\\ \frac{1}{5}&-1&0&0\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142205)

0.116 $D\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ |\ -1\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ y-x\leqq\ 1\right\}$ とするとき, 広義積分

$$\iint_D (x^2-y^2)^2e^{y-x}dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142206)

0.117 xy平面上の関数

$$f(x,y) = x^3y^2 - y^3 - x^4$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 f_x, f_y の値が共に 0 となる点をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた点での $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ の値を求めよ.

(3) f は極値をとらないことを示せ.

(金沢大 2014) (m20142207)

0.118 実数 ℓ に対して，連続関数 f_ℓ : $(-\pi,\ \pi) \to \boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin \ell\theta}{\sin\theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014) (m20142208)

0.119 任意の x, y, z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える．次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$, $\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152201)

0.120 関数 $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ $(|x| < 1)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) $(x - x^3)f''(x) = f'(x)$ を示せ.

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152202)

0.121 (1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ を示せ．ここで，$\sin^{-1} x$ は逆正弦関数を表す.

(2) 座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

に対するやコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$$

を求めよ．ただし，$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; \dfrac{1}{4} \leqq x^2 + y^2 \leqq \dfrac{3}{4},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とする．

(金沢大 2015)　　(m20152203)

0.122 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f : R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152204)

0.123 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ついて，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ．

(金沢大 2015)　　(m20152205)

0.124 次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015)　　(m20152206)

0.125 (1) R 上の滑らかな関数 $f(x)$ がつねに $f''(x) \geqq 0$ を満たすならば，任意の $a, b \in R$ と任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$f((1-t)a + tb) \leqq (1-t)f(a) + tf(b)$$

が成り立つことを示せ．

(2) R^2 上の滑らかな関数 $g(x_1, x_2)$ が任意の点 $P = (p_1, p_2)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1.v_2)$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial {x_1}^2}(P)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\,\partial x_2}(P)v_1 v_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial {x_2}^2} \geqq 0$$

を満たすならば，任意の 2 点 $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$，および任意の $t \in [0,\ 1]$ に対して

$$g((1-t)P + tQ) \leqq (1-t)g(P) + tg(Q)$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2015)　　(m20152207)

0.126 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \ \middle|\ \frac{1}{2} \leqq x^2 + y^2 \leqq x \right\},$$
$$E = \left\{ (r, \theta) \in R^2 \ \middle|\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta \right\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする．$(r, \theta) \in E$ のとき $T(r, \theta) \in D$ であることを示せ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152208)

0.127 次の微分，積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^{\sin x}\right)$　　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(金沢大 2015)　　(m20152209)

0.128 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい．

(1) $\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y \neq 0$ とする．

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい．

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい．

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.129 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる． P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152211)

0.130 k を実数とする． R^3 の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x + 10y + 3z = 0, \\ 3x + 15y + kz = 0 \end{array} \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と基底の 1 組を求めよ．

(3) W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162201)

0.131 A, B を n 次正方行列とする，次のことを示せ．

(1) $\det AB = 0$ のとき，0 はそれぞれ AB, BA の固有値である．

(2) $\det AB \neq 0$ のとき，0 は AB の固有値である．

(3) λ が AB の固有値ならば，λ が BA の固有値でもある．

(金沢大 2016)　　(m20162202)

0.132 $Q_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_n(t)$ は n 次式 $(n = 1, 2, 3)$ で

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2 \, dt = 1$,

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_m(t)Q_n(t)dt = 0 \;\; (0 \leqq \; m < n \leqq \; 3)$,

(c) $Q_n(t)$ の t^n の係数は正

とする．このとき $Q_n(t) \;\; (n = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162203)

0.133 閉領域

$$\left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq \; 0, \; y \geqq \; 0, \; x + y \leqq \; 1\right\}$$

上の関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - y$$

の最大値と最小値を求め，最大値・最小値を与える点 (x, y) を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162204)

0.134 λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq \; 0, \; x^2 + y^2 \leqq \; t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^{\lambda} dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ.

(2) $t \to \infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.135 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす．次の問いに答えよ.

(1) $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ.

(2) 行列 A を求めよ.

(3) 行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して，$x_{11} + x_{22} + x_{33}$ を $\mathrm{tr(X)}$ で表す．自然数 n に対して $\mathrm{tr}(A^n)$ を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162206)

0.136 関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をそれぞれ関係式

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1, \qquad \varphi_0(0) = 1,$$
$$\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = \varphi_{n-1}'(x), \qquad \varphi_n(0) = e^{\varphi_{n-1}(0)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ.

(1) $\varphi_0(x) = e^x$, $\varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ.

(2) $\ell = e^\ell$ を満たす実数 ℓ は存在しないことを示せ.

(3) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ において，どんな実数 c に対しても数列 $\{\varphi_n(c)\}$ は収束しないことを示せ

(金沢大 2016)　　(m20162207)

0.137 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leqq x + y \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v \\ y = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3} dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.138 次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである.

(1) スカラー関数 $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016) (m20162209)

0.139 始点 $(0,0,0)$ と終点 $(1,1,1)$ を直線で結ぶ経路を C とする．経路 C に沿ったベクトル関数 $\boldsymbol{A} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (xy+z)\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot dr$ を計算しなさい．

(金沢大 2016) (m20162210)

0.140 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A, B, C，3 点 A, B, C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする．

(金沢大 2016) (m20162211)

0.141 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を計算しなさい．

(金沢大 2016) (m20162212)

0.142 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする．$m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(金沢大 2016) (m20162213)

0.143 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める． $I_n = \displaystyle\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ． $I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ． $I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016) (m20162214)

0.144 何回でも偏微分可能な関数 $u(x,y,z)$ が

$$\Delta u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

を満たしているとする．このとき，

$$v = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$

に対して，Δv を計算せよ．

(金沢大 2016) (m20162215)

0.145 (1) 自然数 n に対して，集合 $D_n = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ における関数 $e^{-x^2-y^2}$ の積分 $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) 集合 $\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le n,\ 0\le y\le n\right\}$ を R_n と表すとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy\right)=0 \quad \text{を示せ.}$$

(3) 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

(金沢大 2016) (m20162216)

0.146 変数 x,y が集合

$$D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 1\le x+y\right\}$$

を動くとき，関数

$$f(x,y)=(1-x)(1-y)(x+y-1)$$

の最大値を求めよ（その値が最大値となることの証明をつけること）.

(金沢大 2016) (m20162217)

0.147 $x>0$ の範囲で考えて， $f(x)=x^2\log x$ と置く. 次の小問に答えよ.

(1) $f(x)$ のグラフの概形をかけ，また $f(x)$ の極値を求めよ.

(2) すべての自然数 n に対して $f(x)$ の n 次導関数を求めよ

(金沢大 2016) (m20162218)

0.148 函数 $y=\sin^{-1}x,\ x\in[-1,1]$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $y=\sin^{-1}x$ の導函数を求めよ.

(2) $y=\sin^{-1}x$ のグラフの概形をかけ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162219)

0.149 次の問いに答えよ．ただし，以降 a,b は正の定数とする.

(1) $f(x)=a^x$ の導函数を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\frac{a^x+b^x}{2}$ を求めよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162220)

0.150 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n\ge 2)$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cos^5 x dx$ を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162221)

0.151 x は $0<x<1$ を満たす実数とし，n は $n>2$ を満たす整数とする.

(1) $f(x)=\sin^{-1}x$ の導関数を求めよ．ここで，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数である.

(2) $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^n} < 1$ を示せ.

(3) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

(金沢大 2016)　　(m20162222)

0.152　a, b, c は正の定数とし, x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする.

$$D = \left\{ (x,y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う. この時,
関数行列式（ヤコビアン）$\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて重積分　$\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$　を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.153　重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{y}dxdy, \qquad D = \left\{ (x,y) \in R^2 \ \middle|\ 1 \leq xy \leq 6,\ 0 < y \leq x \leq 4y \right\}$$

を考える. 次の各小問に答えよ.

(1) 変数 u, v を用いて, 変数変換 $x = uv,\ y = u/v$ を行なう. このときヤコビアンを求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて I の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162224)

0.154　連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ の全体を V とする.

(1) V は R^4 の線形部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一つ求めよ.

(3) R^4 の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162225)

0.155　次の $4 \times\ 4$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in R^4$ ついて以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ．

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基底と次元を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162226)

0.156 $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162227)

0.157 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする．
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\, F = \big\{X \in M \mid F(X) = O\big\}. \qquad \mathrm{Im}\, F = \big\{F(X) \mid X \in M\big\}$$

の次元を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162228)

0.158 写像 $f\ :\ R^3 \to R^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) f は線形写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．ただし，

$$\mathrm{Im}\, f = \big\{f(\boldsymbol{x}) \bigm| \boldsymbol{x} \in R^3\big\}$$
$$\mathrm{Ker}\, f = \big\{\boldsymbol{x} \in R^3 \bigm| f(\boldsymbol{x}) = 0\big\}$$

である．

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか．持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ．

(金沢大 2016)　　(m20162229)

0.159 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) A の固有値とその固有値に属する固有空間を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162230)

0.160 R^3 の 2 つの部分集合

$$V = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| \, 2x+y+z=0 \right\}$$

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| \, x-2y+z=0 \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $V \cap W$ の基底を求めよ．

(2) V と W の基底を求めよ．

(3) $V+W$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162231)

0.161 (1) $M = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{array} \right)$ の階数 (rank$M$) を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4 & = & 1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3-3x_4 & = & -2 \\ x_1+2x_2+6x_3-6x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

(金沢大 2016)　　(m20162232)

0.162 (1) 次の行列式を求めよ．

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

(2) 次の n 次正方行列（ 対角成分は 0, 対角成分以外は 1 ）の行列式を求めよ．

$$\left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{array} \right|$$

(金沢大 2016)　　(m20162233)

0.163 $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1 \cdots (*)$ を次の手順で，(x,y) 平面に図示せよ．

(1) $(*)$ の左辺は $2\times$ 2 の対称行列 A を用いて，$(x \quad y)A \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$ と表すことが出来る．A を求めよ．

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)$ (λ_1に対応)，

$v_2 = \left(\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right)$ (λ_2に対応) を求めよ．ただし，$a>0$, $c>0$ と選ぶ．

(3) 行列 $P = \left(\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right)$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x, y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ．

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.164 n 次正方行列 A, B に対して，$[A, B] = AB - BA$ と定める．

(1) 任意の A に対して，$[A, X] = 0$ を満たす X を求めなさい．

(2) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ を示しなさい．

(金沢大 2016)　　(m20162235)

0.165 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \left\{ \boldsymbol{v} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \right\}$ で定義する．V の基底を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162236)

0.166 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の各小問に答えよ．

(1) P の固有値をすべて求めよ．またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ．

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ．

(3) $P^n\boldsymbol{v}$ を求めよ．さらに極限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\lim\limits_{n\to\infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162237)

0.167 k を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A による $\boldsymbol{R}^3$ の変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．

(a) f が $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であることを示せ．

(b) f の像 (Im f) の次元が 2 のとき，f の核 (Ker f) の次元と基底の 1 組を与えよ．

(金沢大 2017)　　(m20172201)

0.168　行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　A を対角化せよ．

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ と定めると，$f(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であることを示せ．さらに $f(\boldsymbol{x}) = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ を求めよ．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(3)　$A = B^2$ となる行列 B を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172202)

0.169　(1)　$\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ．

(2)　実数列 $\{a_n\}$ が $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ．

(3)　実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする．もし $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束することを示せ．

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.170　$f(x,y)$ を C^2 級の実数値関数とする．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行ったとき $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が r だけの関数（$g(r)$ とする）になるならば，以下が成り立つことを示せ．

(1)　$f_x y = f_y x$　.

(2)　$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r$　.

(金沢大 2017)　　(m20172204)

0.171　(1)　不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ を示せ．

(2)　n を自然数とする．広義積分

$$I_n = \int_1^{\infty} e^{1-t} \frac{1}{t^n} dt$$

は関係式

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! + (-1)^{n+1} (n+1)!\, I_{n+2}$$

を満たすことを示せ．

(金沢大 2017)　　(m20172205)

0.172　行列　$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　I を 3 次の単位行列とするとき，A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2)　A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ．

(3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ.

(金沢大 2017)　　(m20172206)

0.173 関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $x > 0$ に対し，$f'(x)$ と $f''(x)$ を計算せよ.

(2) 正の整数 n に対し，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y} = 0$ を示せ.

(3) $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ であることを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172207)

0.174 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

(2) 領域 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \geqq 1,\ x \leqq 1\right\}$ を図示せよ.

(3) (2) の領域 D 上の重積分

$$\iint_D \{f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)\}\, dxdy$$

を求めよ.

(金沢大 2017)　　(m20172208)

0.175 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = 1$

(金沢大 2017)　　(m20172209)

0.176 流体の密度を $\rho(x, y, z, t)$，速度を $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ とする．湧き出しも吸い込みもないとき，連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2017)　　(m20172210)

0.177 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が恒等的に $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ を満たすとき，始点を P_1，終点を P_2 とする $\boldsymbol{A}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ は，P_1 から P_2 への経路によらないことを示しなさい.

(金沢大 2017)　　(m20172211)

0.178 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい.

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい.

(2) ある行列 V を用いて，行列 $A' = V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる．V と A' を求めなさい.

(金沢大 2017)　　(m20172212)

0.179 (1) 線形写像

$$f : \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

の像 ($\mathrm{Im}\, f$) と核 ($\mathrm{Ker}\, f$) の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z^2 \geqq x^2 + y^2 \right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ.

(金沢大 2018)　　(m20182201)

0.180 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について 次の問いに答えよ.

(1) ${}^tPAP$ が対角行列となるような 3 次の直交行列 P を一つ求めよ．ただし ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とおく（${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す）.

集合 $S = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ における，$f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，およびそれらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ をすべて求めよ.

(3) $A^5 - 5A^4 + 2A^3 + 9A^2$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182202)

0.181 (1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，2 階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018)　　(m20182203)

0.182 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし，その極限値を p とする．自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - p_k|$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x),\ f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182204)

0.183 実数 $t\,(0 < t < 1)$ に対して，集合 R_t を

$$R_t = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ t \leqq x + y \leqq 1 \right\}$$

と定める．このとき次の問いに答えよ.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_{R_t} \frac{dxdy}{x+y}$ の値を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\iint_{R_t} \frac{dxdy}{(x+y)^{\lambda}}$ が存在するような，実数 λ の範囲を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182205)

0.184 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，I は 3 次の単位行列，O は 3 次の零行列である.

(1) A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.

(2) A の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 a, b, c を求めよ.

(4) 行列 A^{2018} を計算せよ.

(金沢大 2018)　　(m20182206)

0.185 定数 $a>0$ を与えて，開区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で関数 $f(x)=\dfrac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $x=0$ での右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} f(x)$ と $x=\dfrac{\pi}{a}$ での左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{a}-0} f(x)$ をそれぞれ調べよ.

(2) $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{a}\right)$ 上で，$f'(x) = -a\left(1 + f(x)^2\right)$ を満たすことを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示し，その導関数 $(f^{-1})'(x)$ を求めよ.

(4) (3) の関数 $f^{-1}(x)$ と $f(b)=b$ を満たす定数 b $\left(0<b<\dfrac{\pi}{a}\right)$ に対して，広義積分

$$\int_b^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left\{1+\left(f^{-1}(x)\right)^2\right\}}dx$$

を a と b を用いて表せ.

(金沢大 2018)　　(m20182207)

0.186 関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 a,b,c を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.187 行列 A は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている．次の問いに答えよ.

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，行列式 $\det P$ および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A を求めよ．

(3) E を 4 次の単位行列とするとき，

$$(A^2 - E)^2(A^2 - 4E) + A^2 + A = aA^2 + bA + cE$$

を満たす実数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192201)

0.188 被積分関数に自然対数を含んでいる定積分

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

の値が $0.18 < I < 0.28$ となることを確かめる．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log(1+x)}{1+x^2} \geqq \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)(1 - x^2)$$

が成り立つことを示し，これを用いて $I \geqq \dfrac{11}{60}$ であることを導け．

(2) 2 つの等式

$$1 + \tan\theta = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

および

$$\int_0^{\pi/4} \log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(\cos\theta) d\theta$$

がそれぞれ成り立つことを示し，これらを用いて定積分 I を計算せよ．

(3) $\pi < 3.2$ および $\log 2 < 0.7$ であることと問題 (1)(2) の結果を合わせて，
$0.18 < I < 0.28$ であることを確かめよ．

(金沢大 2019)　　(m20192202)

0.189 正接関数 $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ とし，$x \neq 0$ となる (x, y) に対して関数 $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を定める．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数を計算して，$f_y(x, y) - f_x(x, y)$ と $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ に対し

$$D_a = \left\{(x, y) \;\middle|\; a^2 \leqq x^2 + y^2,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

とするとき，重積分

$$I_a = \iint_{D_a} \{f_y(x, y) - f_x(x, y)\}\, dxdy$$

を計算し，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} I_a$ を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192203)

0.190 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 3 次の正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものは存在しないことを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192204)

0.191 k を実数とする．行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ．

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と，その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ．

$$\begin{cases} x + y + z = k - 7 \\ \quad -y + z = 3k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ : \ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底，f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.192 関数 $f \ : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次式で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x^2}{4} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値をとり，かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 0$ のときに限ることを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192206)

0.193 (1) $A(0, \sqrt{3})$，$B(-1, 0)$，$C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 P，Q，R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P，Q，R は A，B，C のいずれとも異なるとする．$Q(t, 0)$，$\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{ (t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.194 次の問いに答えよ．

(1) 実数 α に対し，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ が存在するような α の値の範囲を求めよ．

(2) $L > 1$ に対し，集合 D_L を

$$D_L = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq L^2 \right\}$$

と定める．実数 β に対し，極限値

$$\lim_{L \to \infty} \iint_{D_L} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}$$

が存在するような β の値の範囲を求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192208)

0.195 p と q を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) p と q が満たす条件を求めよ．

(2) 次を満たす正則行列 P の一つを，α と β を用いて与えよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(3) 漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を，$a_1,\ a_2,\ \alpha,\ \beta$ を用いて表せ．

(金沢大 2020)　　(m20202201)

0.196 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と，B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f の核 (Ker f) を求めよ.

(2) f が全射であることを示せ.

(3) E_3 を 3 次の単位行列とする．このとき,

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え，存在しない場合にはその理由を述べよ.

(金沢大 2020)　　(m20202202)

0.197 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6xy^2}{2x^2+3y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ.

(金沢大 2020)　　(m20202203)

0.198 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (x^2-y^2)e^{2x}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ のすべての極値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の 4 点 $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ を頂点とする正方形の周および内部を D とする．このとき，重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の値を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202204)

0.199 $\boldsymbol{R}$ 上の 3 回微分可能な関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $x > a$ に対して,

$$\frac{|f''(a)|}{2}(x-a)^2 \leqq |f(x)| + |f(a)| + |f'(a)|(x-a) + \frac{|f'''(c)|}{6}(x-a)^3$$

を満たす c $(a < c < x)$ が存在することを，テイラーの定理を用いて示せ.

(2) $f(x)$ および $a \in \boldsymbol{R}$ は，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとする.

(i) $|f(x)| \leqq 1 \quad (x \in \boldsymbol{R})$

(ii) $|f'''(x)| \leqq 3 \quad (x \in \boldsymbol{R})$

(iii) $f'(a) = 0$

このとき，$|f''(a)| \leqq 3$ を示せ.

(金沢大 2020)　　(m20202205)

0.200 (1) 集合 $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \leq 1\right\}$ の概形を描け.

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x-y+1)\,e^{x+y}\,dx\,dy$ を求めよ．

(3) $\max\{u,v\} = \begin{cases} u & (u \geq v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy \right) dx$ を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.201 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(x) = x\Big(\log\Big(x^2 + \frac{1}{2}\Big) - 2\Big) + \sqrt{2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2}x\big)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\log(x)}$ を求めよ．

(2) f の導関数を求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(金沢大 2020)　　(m20202207)

0.202 (1) n を自然数とする．$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ を求めよ．

(2) 次の行列の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を 1 組求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2020)　　(m20202208)

0.203 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y)dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.204 関数

$$f(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} \ (t \in \boldsymbol{R}), \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt \ (x \in \boldsymbol{R})$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t)$ を求めよ．

(2) $y = f(t)$ のグラフの概形を図示せよ．

(3) $y = F(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ．

(4) $a > 0$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{F(ax)}{x}$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212201)

0.205 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| - \sin x)dx$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212202)

0.206 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; |y| \leq e^{-x^2}, x \geq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D xy^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212203)

0.207 α を実数とする．2 以上の自然数 n に対して，n 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める．ここで，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$，$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である．

また，$a_n = \det(A_n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_n を求めよ．

(3) $\alpha \geq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212204)

0.208 次の行列が対角化可能であるか調べ，対角化可能ならば，与えられた行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とそのときの対角行列を 1 組求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(金沢大 2021)　　(m20212205)

0.209 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうを調べよ．さらに，A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(3) 3 次実正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとき，B は対角化可能であることを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212206)

0.210 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.211 $\boldsymbol{R}$ 上の関数 f は，任意の有界閉区間において積分可能であり

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \;\; (x, y \in \boldsymbol{R})$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy \;\; (x \in \boldsymbol{R})$ とするとき，f は

$$f(x) = F(x+1) - F(x) - F(1) \;\; (x \in \boldsymbol{R})$$

を満たすことを示せ．

(2) f は微分可能であり，任意の実数 x に対して，$f'(x) = f(1)$ が成り立つことを示せ．

(3) 任意の実数 x に対して，$f(x) = f(1)x$ が成り立つことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212208)

0.212 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sqrt{3}x - 3y$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f のすべての極値を求めよ．

(2) 閉領域 $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 9, \; y \geqq 0 \right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の D に対して，重積分

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212209)

0.213 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; A(x-\alpha)^2 + By^2 \leqq 1\right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

と平面 $H = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+z=1\right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

0.214 虚数単位 i の平方根を複素平面上に図示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212211)

0.215 t の関数 $x(t)$ に対し，初期条件 $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$ の下で，微分方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ の解を求めなさい．ただし，$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ であり，$0 < \gamma < \omega_0$ とする．

(金沢大 2021)　　(m20212212)

0.216 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.217 (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(b) 関数 $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ は任意の実数 x, y に対して $f(x,y) \geq 0$ を満たすことを示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212214)

0.218 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x+|x|)^\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) 集合 $\left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{4}(x+|x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2\right\}$ の面積を求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022)　　(m20222201)

0.219 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する．

$$D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x\right\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 関数 $g(x,y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x} dxdy$ 　の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.220 次の命題の真偽を判定し，命題が真の場合は証明を与え，命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ．

(1) V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とし，m 個の元 $e_1, \cdots, e_m \in V$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立とする．ベクトル $v \in V$ が $e_1, \cdots, e_m$ の $\boldsymbol{R}$ 上の 1 次結合であるとき，$v = c_1e_1 + \cdots + c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1, \cdots, c_m)$ はただ一通りに定まる．

(2) 2×2 行列 A, B について，$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する．

(3) $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \boldsymbol{R} \right\}$ に対し，写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-2y+1 \end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である．

(4) n を任意の自然数とする．正則な $n \times n$ 行列は，固有値 0 を持たない．

(金沢大 2022)　　(m20222203)

0.221 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を全て求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(金沢大 2022)　　(m20222204)

0.222 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ．対角化可能ではない場合はその理由を述べよ．

(金沢大 2022)　　(m20222205)

0.223 (1) 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする． 線形写像 $g : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222206)

0.224 関数 $f \quad \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を C^2 級とし，導関数 f' は $\boldsymbol{R}$ 上で単調増加であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対して

$$f'(a)(b-a) \leqq f(b) - f(a) \leqq f'(b)(b-a)$$

を示せ．

(2) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ を固定する．関数 $F_{a,b} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$F_{a,b}(t) = (1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb)$$

と定めるとき

$$F_{a,b}(t) \geqq 0 \quad (t \in [0,1])$$

を示せ．

(金沢大 2022)　　(m20222207)

0.225 C^1 級関数 $z = f(x,y)$ に対して，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad (r \neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2022)　　(m20222208)

0.226 閉領域 $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ に対して，重積分

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(金沢大 2022)　　(m20222209)

0.227 $(\ ,\ )$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする．2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める． 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ．

(2) ベクトル $\mathbf{a_1} \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める．このとき f_1, f_2, f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ．

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ．

(金沢大 2022)　　(m20222210)

0.228 次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい．

(1) $f(x) = \tan^{-1} x$

(2) $f(x) = \log(\log x)$

(金沢大 2022)　　(m20222211)

0.229 微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = x$ の一般解を求めなさい．

(金沢大 2022)　　(m20222212)

0.230 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

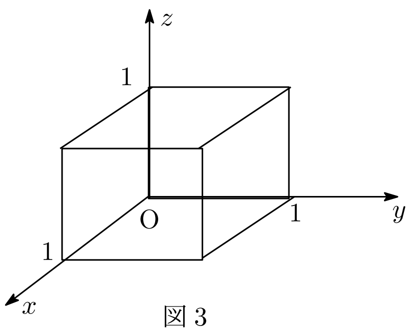

図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.231 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

(2) ある直交行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P を求めなさい．

(金沢大 2022)　　(m20222214)