[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：神戸大

0.1 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$ という関係がある．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として，$(x,y)\to(r,\theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x,y)=g(r,\theta)$

(神戸大 1994)　(m19943801)

0.2 微分方程式

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-y}{x+y}$ を $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて u の微分方程式にせよ．

(2) (1) の一般解を求めよ．

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}\dfrac{(6x^2-y^2-2)}{(x^2+y^2+2)}$ の一般解を求めよ．

(神戸大 1994)　(m19943802)

0.3 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(神戸大 1994)　(m19943803)

0.4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子を使って求めよ．

(神戸大 1994)　(m19943804)

0.5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．(変換行列も示せ)

(神戸大 1994)　(m19943805)

0.6 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を用い，正規直交基底を求めよ．

(神戸大 1994)　(m19943806)

0.7 $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$　とするとき，I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963801)

0.8 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$　で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963802)

0.9 関数 $f(x)=2^x$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ と n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ をマクローリン (Maclaurin) の定理によって

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R_{n+1}$$

の形で表すとき，a_1，a_n，剰余項 R_{n+1} を求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963803)

0.10　$f(x) = a^x$ とする．$(0 < a)$

(1)　$f(x)$ を $x = 0$ でマクローリン展開せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ $(1 < a)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x x^n = 0$　$(0 < a < 1)$　を証明せよ．

(神戸大 1996)　(m19963804)

0.11　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

について，次の問に答えよ．

(1)　行列 A は正則であるか．

(2)　連立方程式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$　に解があれば，その解を求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963805)

0.12　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963806)

0.13　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　P は正則であることを示し，P^{-1} を求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(3)　A の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(神戸大 1996)　(m19963807)

0.14　x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられることを説明（証明・解説）せよ．

(神戸大 1997)　(m19973801)

0.15　次の微分計算をせよ．

$$(1)\frac{d}{dx}\left(x \log x - x\right) \qquad (2)\frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right) \qquad (3)\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)$$

(神戸大 1997)　(m19973802)

0.16　積分 $\displaystyle\int_1^e \log x \, dx$ を計算せよ．

(神戸大 1997)　(m19973803)

0.17 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n \geq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し， $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973804)

0.18 次の微分計算をせよ． $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3)$

(神戸大 1997)　　(m19973805)

0.19 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2\, dx\, dy$

(2) $\displaystyle\iint_A (\,|x| + |y|\,)\, dx\, dy \quad \left(A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \leq 1\right\}\right)$

(神戸大 1997)　　(m19973806)

0.20 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\right\}$ とするとき，

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973807)

0.21 次のベクトルの組は一次独立かそれとも一次従属であるか調べよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(神戸大 1997)　　(m19973808)

0.22 A を n 次の正則行列， $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 1 次独立な n 次元列ベクトルとし，$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{b}$ とおくとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ も 1 次独立であることを示せ．

(神戸大 1997)　　(m19973809)

0.23 次の各行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(神戸大 1997)　　(m19973810)

0.24 次の行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 1997)　　(m19973811)

0.25 公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を使って，次の (1)〜(3) を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$

(神戸大 1998)　　(m19983801)

0.26 $y=\sin^{-1}x$ のとき，等式 $(1-x^2)y''-xy'=0$ が成り立つかどうか調べよ.

(神戸大 1998)　　(m19983802)

0.27 関数 $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$ について，積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(神戸大 1998)　　(m19983803)

0.28 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}|\,t\,|\,dt\quad(x\in R)$ とおくとき，次の問に答えよ.

(1) $F(x)$ を求めよ（すなわち x の式で表せ）. そして，$y=F(x)$ のグラフを描け.

(2) $\dfrac{d}{dx}F(x)$ を求めよ.

(3) 実数全体 R で定義された関数 $G(x)$ で 2 次導関数 $G''(x)$ はあるが 3 回は微分可能でない点があるような関数を作れ.

(神戸大 1998)　　(m19983804)

0.29 $A=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -4 & 9\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $T^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ （n は任意の整数）を示せ.

(2) $AT^n=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$ とするとき，$0<d_1<|\,c_1\,|$ をみたす n を求めよ.
（以下の (3)，(4) ではこの n を使う）

(3) $AT^nST^m=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ とするとき，$d_2=0$ となる m を求めよ.

(4) A を S と T を用いて表せ.

(神戸大 1998)　　(m19983805)

0.30 行列式 $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -3 & 0\end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(神戸大 1998)　　(m19983806)

0.31 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 1 & -3\\ -1 & -5 & -3 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 9 & -2 & 8\\ 2 & -4 & 6 & 2 & -5\\ 2 & 5 & 7 & 9 & 4\end{vmatrix}$$

(神戸大 1998)　　(m19983807)

0.32 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ のとき,

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立一次方程式 $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ が解を持つように a を定めよ.

(3) 定めた a に対して，上の連立一次方程式を解け.

(神戸大 1998)　　(m19983808)

0.33 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ の値を求めよ.

(神戸大 1999)　　(m19993801)

0.34 $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$　I_n と I_{n+2} の関係を調べ，I_{2n+1} を求めよ.

(神戸大 1999)　　(m19993802)

0.35 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)}{x^{n+1}}$ が有限な値として確定するように $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を定め，この極限値を求めよ．但し，ロピタルの定理を用いてはならない.

(神戸大 1999)　　(m19993803)

0.36 次のような変数変換について以下の問いに答えよ.

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

ただし，$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ $E = \{(u,v)|u^2+v^2 \leq 1\}$ とする.

(1) $u^2+v^2 \leq 1$ が $x^2+y^2 \leq 1$ に移ることを証明せよ.

(2) ヤコビアンを求めよ.

(3) $\displaystyle\int_D dxdy$, $\displaystyle\int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D dxdy = \int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$ は成立しない．何故か.

(神戸大 1999)　　(m19993804)

0.37 $y'' - 4y' + 3y = 9x^2 + 1$ の一般解を求めよ.

(神戸大 1999)　　(m19993805)

0.38 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999)　　(m19993806)

0.39 以下の問に答えよ.

(1) n を自然数とし，$0 < i < n$ とするとき，${}_nC_i = {}_{n-1}C_i + {}_{n-1}C_{i-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} {}_0C_0 & {}_1C_1 & {}_2C_2 & {}_3C_3 & {}_4C_4 & {}_5C_5 & {}_6C_6 \\ {}_1C_0 & {}_2C_1 & {}_3C_2 & {}_4C_3 & {}_5C_4 & {}_6C_5 & {}_7C_6 \\ {}_2C_0 & {}_3C_1 & {}_4C_2 & {}_5C_3 & {}_6C_4 & {}_7C_5 & {}_8C_6 \\ {}_3C_0 & {}_4C_1 & {}_5C_2 & {}_6C_3 & {}_7C_4 & {}_8C_5 & {}_9C_6 \\ {}_4C_0 & {}_5C_1 & {}_6C_2 & {}_7C_3 & {}_8C_4 & {}_9C_5 & {}_{10}C_6 \\ {}_5C_0 & {}_6C_1 & {}_7C_2 & {}_8C_3 & {}_9C_4 & {}_{10}C_5 & {}_{11}C_6 \\ {}_6C_0 & {}_7C_1 & {}_8C_2 & {}_9C_3 & {}_{10}C_4 & {}_{11}C_5 & {}_{12}C_6 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999)　　(m19993807)

0.40 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$ のうち，a_{24}，a_{42}，a_{63} を含む項の合計を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993808)

0.41 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ．

(神戸大 2000)　　(m20003801)

0.42 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．$\Delta \log(x^2 + y^2)$ を求めよ．

(神戸大 2000)　　(m20003802)

0.43 xy 平面 $\mathbf{R}^2$ 上に x 座標が互いに相異なる 4 点 (u_i, v_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ が与えられたとき，関数

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

のグラフがこの 4 点を通るような実数 A, B, C, D がただ一つ定まることを示せ．

(神戸大 2000)　　(m20003803)

0.44 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 T は存在するか．存在するならそれを求め，存在しないならその理由を述べよ．

(神戸大 2000)　　(m20003804)

0.45 p を素数とする．任意の自然数 d は，

$$d = p^n m, \quad m \text{ は } p \text{ で割りきれない整数}, n \text{ は負でない整数}$$

と表せる．この n を $\mathrm{ord}_p(d)$ と表すことにする．次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$ を示せ．

(2) $\mathrm{ord}_p(\mathrm{lcm}(a, b)) = \max(\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．ここで，$\mathrm{lcm}(a, b)$ は a, b の最小公倍数，また $\max(\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の大きい方を表す．

(3) $\mathrm{ord}_p(a+b) \geq \min(\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b))$ を示せ．また $\mathrm{ord}_p(a) \neq \mathrm{ord}_p(b)$ のとき，等号が成立することを示せ．ここで，$\min(\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b))$ は $\mathrm{ord}_p(a)$ と $\mathrm{ord}_p(b)$ の小さい方を表す．

（神戸大 2001） (m20013801)

0.46 $(-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が任意の $a \leq b,\ 0 < t < 1$ に対し

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

を満たすとき下に凸であるという．$f(x)$ を $(-\infty, \infty)$ 上で定義された微分可能な実数値関数とするとき，$f'(x)$ が単調増加なら $f(x)$ は下に凸であることを上の定義に基づいて示せ．

（神戸大 2001） (m20013802)

0.47 関数 $f(x) = \sqrt{1+x},\ |x| < 1$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) n 次導関数 $f^{(n)}(x),\ n \geq 1$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン (Maclaurin) 展開を求めよ．

(3) (2) を利用して，$\sqrt{101}$ を小数第 5 位まで求めよ．

（神戸大 2001） (m20013803)

0.48 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = xy \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

（神戸大 2001） (m20013804)

0.49 $f(x,y)$ は何回でも微分できる関数とする．$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ g(r,\theta) = f(x,y)$ とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

（神戸大 2001） (m20013805)

0.50 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)^4 dxdy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2 + 2xy + 2y^2 \leq 1\}$$

（神戸大 2001） (m20013806)

0.51 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) - 3\frac{df}{dx}(x) + 2f(x) = 0, \qquad f(0) = \frac{df}{dx}(0) = 1$$

（神戸大 2001） (m20013807)

0.52 次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ．また A が正則であれば，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（神戸大 2001） (m20013808)

0.53 次の等式を示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_n}^2 \\ {x_0}^3 & {x_1}^3 & {x_2}^3 & \ldots & {x_n}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_0}^{n-1} & {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \ldots & {x_n}^{n-1} \\ {x_0}^n & {x_1}^n & {x_2}^n & \ldots & {x_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

（神戸大 2001）　　(m20013809)

0.54 次の３元連立一次方程式の解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+y+z &=& 3a \\ x+ay+z &=& 2a+1 \\ x+y+az &=& a+2 \end{array}\right.$$

（神戸大 2001）　　(m20013810)

0.55 行列 A を次のようにするとき，次の各問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n $(n \geq 2)$ を求めよ．

（神戸大 2001）　　(m20013811)

0.56 A, B を $AB = BA$ を満たす n 行 n 列の行列とする．$\overrightarrow{u}$ を行列 A の固有ベクトルとするとき，$B\overrightarrow{u}$ が 0 ベクトルでなければ $B\overrightarrow{u}$ も行列 A の固有ベクトルであることを示せ．

（神戸大 2001）　　(m20013812)

0.57 a , b を実数とするとき，以下の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\left(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}}\right) = \max\{a, b\}$$

(神戸大 2002)　　(m20023801)

0.58 R を正の実数とし，$D_R = \{(x, y)\,|\,x^2+y^2 \leq R^2\}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分を計算せよ．　$I_R = \displaystyle\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_R$ を求め，それを用いて，次の積分の値を計算せよ．　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(神戸大 2002)　　(m20023802)

0.59 t の関数 $x(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．

$$x' + x^2 + a(t)x + b(t) = 0$$

但し，$x' = \dfrac{dx}{dt}$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x(t) = \dfrac{u'(t)}{u(t)}$ のとき，関数 $u(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) 微分方程式 $x' = x(1-x)$ の一般解を求めよ．

(神戸大 2002)　　(m20023803)

0.60 n を３以上の自然数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ が全て零ベクトルでなく，内積 $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{z}\cdot\overrightarrow{x}$ は全て 0 とする．このとき $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ は一次独立であることを示せ．

(神戸大 2002)　　(m20023804)

0.61 n を２以上の自然数とするとき，次の行列の行列式を求めよ．ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は実数とする．

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2002)　　(m20023805)

0.62　$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とするとき，$\Delta(x^2+y^2+z^2)^s$ を求めよ．但し，s は実数とする．

(神戸大 2002)　　(m20023806)

0.63　$f(x) = \sin^{-1} x$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f'(x), f''(x)$ を求めよ．

(2)　f の n 階微分を $f^{(n)}$ と書くとき，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

となることを示せ．

(3)　$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$ を示せ．

(4)　$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033801)

0.64　$f(x), g(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．このとき

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を証明せよ．ここで，$h^{(l)}(x)$ は関数 $h(x)$ の l 階導関数を表す．

(神戸大 2003)　　(m20033802)

0.65　$L_n = \displaystyle\int \log^n x \, dx$ とする．

(1)　$L_n = x \log^n x - nL_{n-1} \quad (n \geq 1)$ を示せ．　　(2)　L_n を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033803)

0.66　$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$，$y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき，x, y に関して 2 階偏微分可能な $z = z(x, y)$ について

(1)　$z_u^2 + z_v^2$ を z の x, y に関する偏導関数を用いて表せ．

(2)　$z_{uu} + z_{vv}$ を z の x, y に関する第 2 次偏導関数を用いて表せ．

ただし，z_u, z_{uu} は z の u に関する第 1 次および第 2 次偏導関数を表す．

(神戸大 2003)　　(m20033804)

0.67　次の積分を計算せよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \left(D = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} \ : \ x^2+y^2 \leq 1\} \right)$$

(神戸大 2003)　　(m20033805)

0.68　次の重積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D x dxdy, \qquad D : \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$ ただし, $a, b > 0$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy, \qquad D$ は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=\pi/2$ で囲まれる三角形の内部

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D : x^2+y^2 \leq a^2$

(神戸大 2003)　　(m20033806)

0.69　次の微分方程式を解け．　$y'' + 4y' + 4y = x^3$

(神戸大 2003)　　(m20033807)

0.70　A を，対角成分 $a_1, \cdots, a_n$ が相異なる n 次実対角行列とする．このとき $AX = XA$ を満たす $n \times n$ 実行列 X をすべて求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033808)

0.71　$a_1, \cdots, a_n$ を実数とするとき，次の $n \times n$ 行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2003)　　(m20033809)

0.72　行列 A を次のように定めるとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033810)

0.73　$\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$，行列 B を次のように定める．

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ．

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.74　(1) n を自然数とするとき，　$\dfrac{1}{2^{n-1}+1} + \dfrac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2}$　が成り立つことを示せ．

(2) 上のことを使って，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$　が成り立つことを示せ．

(神戸大 2004)　　(m20043801)

0.75　x を 0 でない実数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{1 + \cos\left(\frac{1}{n}x\right) + \cos\left(\frac{2}{n}x\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right\} = \frac{\sin x}{x}$$

(神戸大 2004)　　(m20043802)

0.76 正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_{x,n}x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する. ここで, $0 < \theta_{x,n} < 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$ である. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n}x} = 1 + \frac{x}{n+2}e^{\theta_{x,n+1}x}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta_{x,n}$ を求めよ.

（神戸大 2004） (m20043803)

0.77 $\varepsilon > 0$ とし，$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．このとき次の値を求めよ.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}dxdy$$

(神戸大 2004) (m20043804)

0.78 次の各問に答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ の値を求めよ.

(2) 次の D 上の重積分を, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ.

$$\iint_D x^2 dxdy\,,\quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$$

(神戸大 2004) (m20043805)

0.79 未知関数 $x(t), y(t)$ に関する微分方程式 $x'(t) = y(t)\,,\ y'(t) = -x(t)$
を，初期条件 $x(0) = a\,,\ y(0) = b$ の下で解け.

(神戸大 2004) (m20043806)

0.80 次の n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
a_1 & b_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
a_1 & b_2 & b_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\
a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n
\end{pmatrix}$$

(神戸大 2004) (m20043807)

0.81 次の各問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} x & 1 & a & b \\ y^2 & y & 1 & c \\ yz^2 & z^2 & z & 1 \\ yzt & zt & t & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(B)$ を求めよ.

(神戸大 2004)　(m20043808)

0.82 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角可能か否か, 理由を述べて答えよ. また対角可能ならば, 対角化せよ.

(神戸大 2004)　(m20043809)

0.83 ベクトルの組 a, b, c は $\mathbf{R^3}$ の基底であるとする.

$$\begin{aligned} u &= a + b + c \\ v &= a + b \\ w &= a \\ x &= b \end{aligned}$$

とベクトル u, v, w, x を定めるとき，次の各問いに答えよ.

(1) ベクトルの組 u, v, w は $\mathbf{R^3}$ の基底であることを示せ.

(2) ベクトルの組 u, v, w, x は $\mathbf{R^3}$ の基底でないことを示せ.

(神戸大 2004)　(m20043810)

0.84 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005)　(m20053801)

0.85 次の計算をしなさい.

(1) $\sin^{-1} x$ を $\sin$ の逆関数とするとき
$\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1})^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in Z)$

(3) $\displaystyle\iint_{x,y \geq 0,\, x+y \leq 1} xy dx dy$

(4) $\displaystyle\iint_V e^{-x^2-y^2} dx dy$
ここで V は第 1 象限 $V = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ を表す.

(神戸大 2005)　(m20053802)

0.86 (1) a, b を定数とする. y を未知関数とする微分方程式

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $y' = y^2$ の一般解を求めよ. 解のグラフの概形を書きなさい.

(神戸大 2005)　　(m20053803)

0.87 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1 - |c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053804)

0.88 a, b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \; b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

で数列 a_n, b_n を定める.

(1) $a_n \geq b_n$ を示せ（相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ）.

(2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053805)

0.89 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行列式が 1 の行列とする：$ad - bc = 1$. A のトレース $a + d$ を t とする：$t = a + d$. このとき

$$A^2 = f(t)A + g(t)I$$

を満たす関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めよ．ここで，I は単位行列を表す．ただし，$A \neq \pm I$ と仮定しておく．さらに，$t = 0$ または $t = \sqrt{2}$ のとき，それぞれ $A^4 = I$ または $A^4 = -I$ となることを示せ．

(神戸大 2006)　　(m20063801)

0.90 関数 $g_{a,b,c,d}(t)$ を $g_{a,b,c,d}(t) = \dfrac{at + b}{ct + d}$ で定義する．ここで a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす任意の実定数．このとき $g = g_{a,b,c,d}(t)$ は

$$(*) \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

を満たすことを示せ．ここで，$' = d/dt$.

さらに任意の $a, b, c, d, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ $(ad - bc \neq 0\,,\ \hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} \neq 0)$ に対して

$$g = g_{a,b,c,d}(g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)) = g_{a,b,c,d} \circ g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)$$

も $(*)$ を満たす理由を説明せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063802)

0.91 次の重積分を求めよ． $\displaystyle\int_{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dxdy$

(神戸大 2006)　　(m20063803)

0.92 $r : [a, b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x, y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta\,,\ y = r(\theta)\sin\theta\,,$ $a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$，α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r) d\theta\,, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r') d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.93 (1) 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x\,,\ \partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数．

$$\text{(i) } f(x, y) = e^{3x}\cos 2y\,, \qquad \text{(ii) } f(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2) 関数 $f(y_1, y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11} + bx_{12}\,,\ ax_{21} + bx_{22})$ $(a, b$ は定数$)$ について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$ を計算せよ

(神戸大 2006)　　(m20063805)

0.94 次の 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ を直交行列 P を用いて対角化せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063806)

0.95 ベクトル空間において，$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとする．次の各問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ．

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ とするとき，$\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}_3$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるか，理由をつけて述べよ．

(神戸大 2007)　　(m20073801)

0.96 次の行列式を一次式の積に分解せよ． $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & 1 \\ b^2 & (c+a)^2 & 1 \\ c^2 & (a+b)^2 & 1 \end{vmatrix}$

(神戸大 2007)　　(m20073802)

0.97 xy 平面において，次の関数のうち，どれが最大値をもち，どれが最小値をもつか．理由をつけて示せ．

(1) e^{x-y}　　(2) $e^{x^2+y^4}$　　(3) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$

(神戸大 2007)　　(m20073803)

0.98 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\iint_D (|x| + |y|)\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\})$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\})$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dydx \qquad (D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y \geq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.99 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ.

(1) $\displaystyle f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$ を示せ.

(2) $\displaystyle F(x) = \int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$ 　を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073805)

0.100 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - y = 0$　　　　(2) $y'' + y = 0$

(神戸大 2007)　　(m20073806)

0.101 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ.　$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき，$a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073807)

0.102 以下の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 1$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy\,, \qquad D\ :\ 0 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ 0 \leqq\ x-y \leqq\ 2$

(神戸大 2007)　　(m20073808)

0.103 関数 $y = y(x)$ は微分方程式　$y'' + (5-x^2)y = 0$　を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $y = ze^{-x^2/2}$ とおいて，関数 $z = z(x)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(2) z を 2 次関数とするとき，z を求めよ.

(神戸大 2007)　　(m20073809)

0.104 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく．

T を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とし，

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,,\quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,,\quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T を表す行列を求めよ． (2) $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ の基底と次元を求めよ．

(神戸大 2007) (m20073810)

0.105 ２次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ となるような正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(神戸大 2007) (m20073811)

0.106 以下の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ （m, n は自然数） (2) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2 dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1} x\,dx$

(神戸大 2008) (m20083801)

0.107 (1) 関数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4y}\right)$ $(y > 0)$ が，関係式 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ．

(2) f, g を C^2 級の関数，$c > 0$ を定数とするとき，関数 $z = f(x + cy) + g(x - cy)$ が，関係式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ．

(神戸大 2008) (m20083802)

0.108 実数 a, b が与えられている． このとき，x, y, z に関する以下の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z &= a \\ 5x - 4y + 4z &= -1 \\ 3x - 4y + 20z &= 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (b-2)x - y - 2z &= 1 \\ x + y + 2z &= -2 \\ x + by + 2z &= 1 \end{cases}$

(神戸大 2008) (m20083803)

0.109 以下の行列 A について，固有値 λ と各 λ に対する固有空間 $W(\lambda, A)$ を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(神戸大 2008) (m20083804)

0.110 (1) 3 次の正方行列 A について，$\mathrm{rank}(A) = 1$ ならば，ある 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と 3 つの実数 x_1, x_2, x_3 が存在して，$A = (x_1\boldsymbol{a} \quad x_2\boldsymbol{a} \quad x_3\boldsymbol{a})$ と書けることを示せ．

(2) 3 次の正方行列 A, B が $\mathrm{rank}(A) \leq 1$, $\mathrm{rank}(B) \leq 1$ を満たすならば，$A + B$ は正則でないことを示せ．

(神戸大 2008) (m20083805)

0.111 (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

(2) n 次の正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たしているとする. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列である. このとき, n が奇数ならば, A の行列式は 0 であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083806)

0.112 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^n$ とおく. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在し, $(E - A)^{-1}$ に等しいことを示せ.

(神戸大 2008) (m20083807)

0.113 次の計算をせよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$ $\quad (D = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\})$

(2) $\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008) (m20083808)

0.114 次の微分方程式を解け.

(1) $\displaystyle\frac{dy}{dx} - y = e^{mx} \quad (m \in \boldsymbol{R})$ (2) $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

(神戸大 2008) (m20083809)

0.115 自然数 n に対して, $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n+1)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ. (2) $a_n \leq 1$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083810)

0.116 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々 4 次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a,\ b,\ c\}$ を 3 次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a+b+c\,,\ a+b\,,\ a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a+b+c\,,\ a+b\,,\ a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093801)

0.117　$a,\ b$ を実数, $a \neq 0$ とする. 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a-b & a & a \\ a & a-b & a \\ a & a & a-b \end{pmatrix}$ と定める.

(1)　A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)　A を対角化する直交行列 P を求めて A を対角化せよ.

(3)　$A^{20} = E_3$ を満たす $a,\ b$ の値を求めよ. ただし, E_3 は 3 次の単位行列とする.

(神戸大 2009)　　(m20093802)

0.118　$|x| < 1$ とし, $f(x) = \log(1+x)$ と定める. 以下の各問に答えよ.

(1)　$n \geq 1$ のとき, $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く. $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2)　$f(x)$ のマクローリン展開を書け.

(神戸大 2009)　　(m20093803)

0.119　(1)　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ.

(2)　球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共有部分の体積を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093804)

0.120　(1)　行列式 $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2)　次を満たす $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つあげよ.

$\boldsymbol{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{v}$ は 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれとも直交する.

(神戸大 2009)　　(m20093805)

0.121　$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の各問に答えよ.

(1)　$n = 1, 2, \cdots$ に対して, A^n を求めよ. (答えのみでよい).

(2)　$\displaystyle S_n = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^k A^k}{k!}$ とおくとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093806)

0.122　$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\,f_n(t)\,dt\,, \quad n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

このとき, $\displaystyle f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k\,k!} \quad n = 1, 2, \cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.123 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

(1) $y'' - y' - 2y = 0$

(2) $y'' - y' - 2y = \cos x$

(神戸大 2009)　　(m20093808)

0.124 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の計算をせよ．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009)　　(m20093809)

0.125 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D |x|\, dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D |x+y|\, dxdy$

(神戸大 2009)　　(m20093810)

0.126 関数 $f(x,y) = 9xy - x^3 - y^3$ の極値を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093811)

0.127 微分方程式の初期値問題

$$f''(x) + f(x) = \sin x\,, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

において，

$$F(x) = f(x)\cos x - f'(x)\sin x\,, \quad G(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $F'(x)$, $G'(x)$ を求めよ．（f を含まない形で表せ.）

(2) $F(x)$, $G(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093812)

0.128 ３次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\det(A)$ を求めよ．

(2) A の余因子行列を求めよ．

(3) A^{-1} を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093813)

0.129 線形写像 $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする．このとき，$\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} B$ を満たす 3×4 行列 B が一意に存在する．この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という．以下の問いに答えよ．

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}$$

を示し, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}\ \ Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$ とおいて, $B = Q^{-1}AP$ を証明せよ.

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.130　実対称行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　について次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$（単位行列）をみたす実正方行列を直交行列という.

(神戸大 2010)　　(m20103801)

0.131　$x_1,\ x_2,\ x_3$ を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{i4} = 0\ , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.

(2) $a_{i1} = 1,\ a_{i2} = (-1)^i,\ a_{i3} = u^{i-1}\ (1 \leq i \leq 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1,\ a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

(神戸大 2010)　　(m20103802)

0.132　$(x+y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x,\ y > 0)$. ただし, $x^a = e^{a\log x}$ と定義する.

(神戸大 2010)　　(m20103803)

0.133　x, y 実数とし,

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z=f(x,y)$ の, 点 $(1,1,\pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010) (m20103804)

0.134 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-y=-y^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $z=y^{-1}$ とおいて, z を満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 初期条件「$x=0\,,\ y=1/2$」のもとで, 微分方程式 $(*)$ を解け.

(神戸大 2010) (m20103805)

0.135 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 等式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}=(af-bc+cd)^2$ を示せ.

(3) $A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix}$ について,

${}^tA=-A$ を示し, これを用いて $\det(A)=0$ を証明せよ.

(神戸大 2010) (m20103806)

0.136 以下で定義される 3 次の正方行列 $A,\ B$ について, 固有値と, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(神戸大 2010) (m20103807)

0.137 $D=\left\{(x.y)\ \middle|\ y\leq 3x\,,\ y\leq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}\,,\ y\geq\dfrac{1}{2}x\,,\ y\geq 3x-10\right\}$

とするとき, D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dxdy$ を計算せよ.

(神戸大 2010) (m20103808)

0.138 次の行列 X,Y の逆行列をそれぞれ求めよ (a は複素数とし空欄の成分は 0 とする.)

$$X=\begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2011) (m20113801)

0.139 k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ．

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ．

(神戸大 2011)　　(m20113802)

0.140 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ．

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ．

(神戸大 2011)　　(m20113803)

0.141 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x, y) = (x + \cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ．

(神戸大 2011)　　(m20113804)

0.142 常微分方程式

$$y'' - y = e^{-x}$$

を初期条件 $y(0) = a,\ y'(0) = b$ のもとで解け．また，$x \geq 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．（ここで $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．）

(神戸大 2011)　　(m20113805)

0.143 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(\pi\,|x-y|)dxdy$,　$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}$.

(2) $\displaystyle\iint_D \log(1 + x^2 + y^2)dxdy$,　$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(神戸大 2011)　　(m20113806)

0.144

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2}\log\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x) > 0$ を示せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ．

（ただし，任意の実数 t に対して，$\tanh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である．）

(神戸大 2011)　　(m20113807)

0.145 重積分

$$V = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\,. \quad D = \{(x,y) \in R^2 \,|\, 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) D が変数変換 $x = u,\ y = uv$ によってどのような領域に写されるかを図示せよ.

(2) (1) の変数変換に対するヤコビアンを求めよ.

(3) V の値を求めよ.

(神戸大 2011)　　(m20113808)

0.146 a, b, c, d, p, q を実数とし, $ad - bc \neq 0$ と仮定する. x, y についての連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(1) $a \neq 0$ のとき, 掃き出し法で連立方程式 $(*)$ を解け.

(2) $a = 0$ のとき, 連立方程式 $(*)$ を解け.

(3) (1) の解を整理して $a = 0$ とおいたものと, (2) の解とが一致することを確かめよ.

(神戸大 2011)　　(m20113809)

0.147 線形変換 $T : R^4 \to R^4$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in R)$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^4 \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を 1 組求めよ.

(2) $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ を 1 組求めよ.

(3) (1), (2) で求めた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ.

(神戸大 2011)　　(m20113810)

0.148 次の $(a), (b)$ の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (b) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.04 & -0.008 \\ -0.2 & 1.04 & 0.008 & 0.0016 \\ -0.04 & 0.008 & 1.0016 & 0.00032 \\ -0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0 \end{vmatrix}$$

(神戸大 2012)　　(m20123801)

0.149 $f(u,v) = u^3 - 3uv^2\,,\ g(u,v) = 3u^2v - v^3\,,\ u = (e^y + e^{-y})\cos x\,,\ v = (e^{-y} - e^y)\sin x$ のとき,
偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(神戸大 2012)　　(m20123802)

0.150 次の行列で表される線形変換 T の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda;T)$ をすべて求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(神戸大 2012)　　(m20123803)

0.151 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$$

(神戸大 2012)　　(m20123804)

0.152 $x = x(t)$ を変数 t の C^∞ 級関数とする．このとき，次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 4 = 0$$

ただし，$x(0) = \dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ とする.

(神戸大 2012)　　(m20123805)

0.153 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2) m 桁の自然数のうちで，0 の文字が入らないものの個数を答えよ．例えば $m=3$ のときなら，$111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で，9^3 である.

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項，例えば，$\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき，$\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ.

(神戸大 2012)　　(m20123806)

0.154 ある集合 X の部分集合 A, B, C について，次のことを証明せよ．対称差 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ がともに有限集合であるならば，$A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ も有限集合である．（ただし，$A \setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.）

(神戸大 2012)　　(m20123807)

0.155 行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという．以下の問いに答えよ.

(1) u の値を求めよ.

(2) 行列 $A+E$ の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を求めよ.

(3) $B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1$, $B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2$, $B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 B を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133801)

0.156 以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-x^2)^n$ とおく．次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| dx \leqq \frac{1}{2n+3}$$

(3) 級数の和

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133802)

0.157 関数 $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 9$ の極値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133803)

0.158 $D = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\ ,\ 1 \leqq\ z \leqq\ x^2 + y^2 \right\}$ とおく．積分

$$\int_D \frac{2x^2 + y^2 + x}{z} dxdydz$$

の値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133804)

0.159 f を $\mathbb{R}^3$ 上の一次変換とするとき，原点を通る直線 ℓ で，ℓ 上の各点が f により ℓ 上に写されるようなものが存在することを示せ.

(神戸大 2013)　　(m20133805)

0.160 $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された 2 回微分可能な関数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $x \neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し，$f'(0)$ を求めよ.

(3) $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(神戸大 2013)　　(m20133806)

0.161 R^3 の基底 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) 行列 $[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ.

$T : R^3 \to R^3$ を，以下で定める線形変換とする：

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$
$$T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$$
$$T(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$$

(2) R^3 の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ に対する T の表現行列を書け.

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \ : \ T(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底の 1 つ B_1 を求め，$\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_1 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(4) T の像 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x} \in R^3\}$ の基底の 1 つ B_2 を求め，$\mathrm{Im}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_2 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(5) T の標準基底に対する表現行列を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143801)

0.162 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対し，R^2 でのベクトルを考えるとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) A は対角化可能かどうかを答えよ．またその理由も述べよ．

(3) A の固有ベクトルのうち長さが 1 のものの 1 つ $\boldsymbol{u}$ を求め，$\boldsymbol{u}$ と直交する長さ 1 のベクトルのうちの 1 つ $\boldsymbol{v}$ を求めよ．これらのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し，$[\boldsymbol{u} \ \boldsymbol{v}]^{-1}A[\boldsymbol{u} \ \boldsymbol{v}]$ を求めよ．

(4) 任意の自然数 n に対する A^n を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143802)

0.163 以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y) = 2xy - \dfrac{1}{4}(x+y)^4$ とするとき，関数 $z = f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $f(x,y) = y(x+y)^2$ とするとき，関数 $z = f(x,y)$ の極値を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143803)

0.164 二重積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}\,dxdy$ について以下の問に答えよ．

(1) この二重積分に対応する積分領域を図示せよ．

(2) I の値を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143804)

0.165 (1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -20 \\ -12 & 7 & 20 \\ 12 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ をすべて求めよ．

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が一次独立であることを示し，これらをシュミットの方法により正規直交系になおせ．

(神戸大 2014)　　(m20143805)

0.166 正の整数 n と実数 $c, y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し，$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1y_1 + c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_1y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し，また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 y_1 & \ldots & y_n y_1 \\ y_2 & y_2 y_2 + c & \ldots & y_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2 y_n & \ldots & y_n y_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$\det A$ は行列 A の行列式を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \cdots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^{n-1} y_1$ であることを示せ．

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ．(ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^n + c^{n-1} \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(神戸大 2014)　　(m20143806)

0.167 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq x\right\}$ とするとき，積分

$$\int_D x^2 dxdy$$

の値を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143807)

0.168 $u = \log(e^x + e^y + e^z)$ のとき次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

(神戸大 2014)　　(m20143808)

0.169 微分方程式 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) この方程式は $y = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$（A, B は定数）の形の特殊解を持つことを示し，A, B を決めよ．

(2) この方程式の一般解を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143809)

0.170 z は $|z| = 1,\ z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく．

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1 - z|}$ であることを示せ．

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ．

$$\left.\begin{array}{l} \text{任意の正の実数 } \varepsilon \text{ に対し，正の整数 } N \text{ が存在して，} \\ m > n \geq N \text{ であるような任意の整数 } m, n \text{ に対して} \\ \left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon \text{ が成り立つ．} \end{array}\right. \qquad (C)$$

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.171 実係数行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) M の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda\,;\,M)$ を求めよ.

(2) 固有空間 $W(\lambda\,;\,M)$ の正規直交基底を求めよ.

(神戸大 2015)　　(m20153801)

0.172 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 L を

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$$

とおく．次の問に答えよ.

(1) L を含む最小の $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V の基底と次元を求めよ.

(2) V の直交補空間を求めよ.

(神戸大 2015)　　(m20153802)

0.173 実係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+t^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3, A^4 を求めよ.

(2)

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

を $B_n = x_n E + y_n A$ とするとき，

$$B = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) E + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) A$$

を求めよ．ここで E は単位行列を表す.

(3) $B = E$ を満たすような t を求めよ.

(神戸大 2015)　　(m20153803)

0.174 領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x + y > 0\right\}$ 上での積分

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy$$

を計算せよ.

(神戸大 2015)　　(m20153804)

0.175 正の実数 x に対し $f(x) = x^{x^x}$ と定義する. $f'(x)$ を計算せよ.

(神戸大 2015)　　(m20153805)

0.176 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し, その一般解を求めよ.

ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$,　　(2) $2y'' - 5y' + 2y = e^x$,

(神戸大 2015)　　(m20153806)

0.177 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する. $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である. 次の問に答えよ.

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ.

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.178 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ. なお, ${}^tPP = E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して, A^n のトレース $\mathrm{Tr}\, A^n$ を計算せよ.

(神戸大 2016)　　(m20163801)

0.179 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, $B = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} kA^{k-1}$ とする. ただし, A^0 は単位行列 E を表すものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) B を求めよ.

(2) $(E - A)^2 B$ を計算せよ.

(神戸大 2016)　　(m20163802)

0.180 $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \cosh x}$ に対して，$\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$ を計算せよ．

ただし，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-1}}{2}$ である．

(神戸大 2016)　　(m20163803)

0.181 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2\sqrt{2}xy+3y^2)}dxdy$ の値を求めよ．

(神戸大 2016)　　(m20163804)

0.182 $D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1 - \cos(n+1)x\Big\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.183 k を整数とし，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -k \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) A が正則であるための k の条件を求めよ．

(2) $k = 1$ のとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}$ の解を求めよ．

(3) A が正則行列であるとき，A の逆行列の成分がすべて整数となるための必要十分条件は $k = 1$ であることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163806)

0.184 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え，

$$H_n(x) = e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) $H_0(x),\ H_1(x),\ H_2(x)$ を具体的に求めよ．

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(3) $H_0(x),\ H_1(x),\ \cdots,\ H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ．

(4) $0 \leqq m < n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

(神戸大 2016)　　(m20163807)

0.185 xy 平面上に 4 点 $P=(0,\pi),\ Q=(\pi,0),\ R=(2\pi,\pi),\ S=(\pi,2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x,y)=\cos x+\sin y$ について以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を調べよ．
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2016)　　(m20163808)

0.186 (1) $x=\sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ．　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq\ x+y\leqq\ 4,\ 0\leqq\ x,\ 0\leqq\ y\right\}$

(3) 変数変換 $x=st,\ y=s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ．　$E=\left\{(s,t)\ \middle|\ 1\leqq\ s\leqq\ 4,\ 0\leqq\ t\leqq\ 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする．　$\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016)　　(m20163809)

0.187 行列 $\Lambda=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{bmatrix}$　$(a,b,c\in\mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ．

以下，I は 3 次の単位行列を表し，ω は 1 の 3 乗根 $\omega=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ を表す．

(1) Λ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A が $A=aI+b\Lambda+c\Lambda^2$ と表されることを用いて，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 等式　$\det(A)=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$　を示せ．

(神戸大 2017)　　(m20173801)

0.188 $a,b,c>0,\ V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$ とするとき，積分　$I=\displaystyle\iiint_V(x^2+y^2)dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173802)

0.189 関係式 $y=x\tan\theta$ の定める陰関数 $\theta=\theta(x,y)$ について　$\Delta\theta=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$　を計算せよ．

(神戸大 2017)　　(m20173803)

0.190 (i,j) 成分 a_{ij} が "$i<j$ のとき $a_{ij}=0$" を満たすとき，その行列を下三角行列といい，さらに逆行列を持つとき可逆な下三角行列という．2 つの行列 X,Y について $Y=GX$ となる可逆な下三角行列 G が存在するとき $X\sim Y$ と表す．次の問に答えよ．

(1) $\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&x\\0&1\end{bmatrix}$ となる x を求めよ．

(2) $\begin{bmatrix}2&3&4\\1&5&6\\3&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&x_1&x_2\\0&1&x_3\\0&0&1\end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ．

(3) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&x_1&x_2\\0&1&x_3\\0&0&1\end{bmatrix}$ となる $x_1,\ x_2,\ x_3$ を a_{ij} たちの有理式として表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173804)

0.191 次の問に答えよ．ただし，$'$ は x による微分を表す．

(1) 任意の微分可能な関数 $y(x)$ に対して

$$u(x)^{-1}\{u(x)y(x)\}' = y'(x) + x^2 y(x)$$

となるような関数 $u(x)$ を求めよ．

(2) $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^5$$

の一般解を求めよ．

(3) $p(x), q(x)$ を与えられた関数として，$y(x)$ の微分方程式

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

の一般解の公式を導け．

(神戸大 2017)　　(m20173805)

0.192 X, Y を集合とし，$f\ :\ X \to Y$ を写像とする．A_i, A で X の任意の部分集合を，B で Y の任意の部分集合を表すとき，次の主張（命題）のそれぞれについて，正しければ証明をし，正しくなければ反例を挙げよ．

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ここで $f(A)$ は A の f による像を，$f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}\ , \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

(神戸大 2017)　　(m20173806)

0.193 a を実数とする．自然数 n に対して，対角成分が全て a であり，それ以外の成分が全て 1 である n 次正方行列を A_n とする．以下の各問いに答えよ

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(1) $|A_n| = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$ であることを示せ．ただし $0^0 = 1$ とする．

(2) $a = 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(3) $a = -n+1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173807)

0.194 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ. なお, 基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと.

(4) n を自然数とするとき, T の n 回の合成を T^n で表す. $T^n(\boldsymbol{a}_1)$, $T^n(\boldsymbol{a}_2)$, $T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ.

(神戸大 2017)　　(m20173808)

0.195 $f(x,y) = \sin(xy)$ とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) f の 1 階と 2 階の偏導関数を全て求めよ.

(2) f のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) f の極値を調べよ.

(神戸大 2017)　　(m20173809)

0.196 xz 平面において, 曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$ (ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$), 直線 $z = x$, および z 軸で囲まれた領域を D とする. また, xyz 空間内において, z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.197 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ.

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183801)

0.198 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $A = B\,{}^t\!B$ をみたし, すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ. ただし, ${}^t\!B$ は B の転置行列とする.

(2) A の行列式の値を求めよ.

(3) B の逆行列を求めよ.

(4) A^{-1} の第 4 行を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183802)

0.199 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y)=x^3+y^3-9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を満たすことをいう．

(神戸大 2018)　　(m20183803)

0.200 積分 $\displaystyle\iint_{x^2-xy+y^2\leqq 1}(x-y)^2dxdy$ の値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183804)

0.201 $(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1,\quad f(0)=0.$$

自然数 n に対し，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく．

(1) a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x\leqq e^{-x}\quad(0\leqq x\leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n\to\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.202 4 次の正方行列

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A^2 を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，$\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ とするとき，連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{1}$ を解け．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4\in R^4$ を 1 次独立とする。

$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3+x_4$
$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3-x_4$
$\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3-x_4$
$\boldsymbol{y}_4=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3+x_4$

とするとき，ベクトル $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3,\ \boldsymbol{y}_4$ も 1 次独立となることを示せ．

(神戸大 2018)　　(m20183806)

0.203 a を実数とする．3 次の正方行列 $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\5-a&2&a-4\\-2&0&3\end{bmatrix}$ に対し，以下の各問に答えよ．

(1) B の固有値をすべて求めよ.

(2) B の固有値に属する固有空間の各々について，基底を一組求めよ.

(3) B が対角化可能であるための a の条件を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183807)

0.204 $xy-$ 平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\text{ のとき}\\ 0, & (x,y)=(0,0)\text{ のとき}\end{cases}$$

として定義するとき，f の原点 $(0,0)$ での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を判定せよ.

(神戸大 2018)　　(m20183808)

0.205 (1) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を求めよ.

ただし，$D=\{(x,y)\mid x,y\in R,\ 0\leqq x^2+y^2<\infty\}$ とする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示せ.

(神戸大 2018)　　(m20183809)

0.206 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\in\mathbb{R}^3$ と $W_1,\ W_2\subseteq\mathbb{R}^3$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},$$

$$W_1=\langle\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\rangle,\ W_2=\langle\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\rangle$$

ただし，$\langle\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j\rangle$ は $\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を表す．以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $A=[\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ.

(2) $W_1\cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ.

(3) 3 次正方行列 B で，$B\boldsymbol{u}_3=0$，かつ，すべての $\boldsymbol{u}\in W_1$ に対して $B\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ となるものを求めよ.

(神戸大 2019)　　(m20193801)

0.207 $A=\begin{bmatrix}2&0&-5\\0&2&5\\-5&5&7\end{bmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}),\quad ||\boldsymbol{x}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と定める．ただし，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積とする．また，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を A の固有値とする（ ただし $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ ）．以下の各問に答えよ.

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と，各 $i=1,2,3$ について固有値 λ_i に対する A の固有値ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ で $||\boldsymbol{u}_i||=1$ を満たすものを一つずつ求めよ．また，その $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ について $(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j)$ (ただし $1\leq i\leq 3,\ 1\leq j\leq 3$) を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を (1) で求めたベクトルとし，$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ とする．このとき，$f(c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+c_3\boldsymbol{u}_3)$ を c_1,c_2,c_3 で表せ.

(3) $S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ||\boldsymbol{x}|| = 1 \right\}$ とする．S における $f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，および，それらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193802)

0.208 xy 平面上の 4 点 $P = (1, 0)$, $Q = (3, 0)$, $R = (1, 2\pi)$, $S = (3, 2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界以上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x, y) = (4x - x^2)(\sin y + 2)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を求めよ．ただし，D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である．

(2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193803)

0.209 xy 平面の第 1 象限（$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy = 1$, $xy = 9$ と 2 本の直線 $y = x$, $y = 4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u \geq 0$ かつ $v \geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.210 a を実数とする．x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

を解け．

(神戸大 2020)　　(m20203801)

0.211 正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ．

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ．

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203802)

0.212 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$ とする．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 条件 $x^2+y^2 \leq 5$ の表す領域は有界閉集合なので，$x^2+y^2 \leq 5$ という条件のもとで連続関数 $f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ．この最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203803)

0.213 (1) xy 平面上の領域

$$D = \left\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 $A,\ B$ を次のように定める．

$$A = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, \quad 0 \leq z\right\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.214 実数 a,b に対し 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が相異なる 3 つの固有値をもつための a,b の条件を求めよ．

(3) (2) の条件が成り立つとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213801)

0.215 実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}^4$ の基底を成すか判定せよ．

(2) 0 でない実数 a,b,c,d に対し，4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213802)

0.216 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1\,dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}x^TSx\right)dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり，S は正定値とする．

(神戸大 2021)　　(m20213803)

0.217 (1) 微分方程式 $y'=-y-1,\ y(0)=0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 次の漸化式

$$y_{k+1}=(1-h)y_k-h \quad (k\geq 0) \quad y_0=0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ．ここで h は 0 でない定数とする．

(3) x,n を正整数，$h=1/n$ とおくとき，

$$y_{xn}\to y(x)\,, \quad n\to+\infty$$

を示せ．

(神戸大 2021)　　(m20213804)

0.218 次のように $F(x,y)$ を定める．

$$F(x,y)=x^3-3xy+y^2-3y$$

$F(x,y)=0$ で定められる x の陰関数 y について，以下の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる x の値とそのときの y の値の組 (x,y) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた x の各値における $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ．

(3) (1) で求めた x の各値において陰関数 y は極大となるか，極小となるか，そのいずれでもないかを答えよ．

(神戸大 2021)　　(m20213805)

0.219 xy 平面上の閉領域 D を

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

と定め，

$$z=x^2-y^2 \quad ((x,y)\in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V=\int_D |x^2-y^2|dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213806)

0.220 $n\geqq 2$ を自然数とし，X をすべての成分が $\dfrac{1}{n}$ であるような n 次正方行列とする．以下の各問いに答えよ．

(1) X^2 を X で表せ，ただし X^2 以外の形で表すこと．

(2) X の固有値とその重複度を求めよ.

(3) X を対角化せよ. 対角化できる場合は変換の行列 P も与えること.

(神戸大 2021)　　(m20213807)

0.221 $A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とする. A は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を 1 つずつ成分としてもち,

- 各 $i = 1, 2, 3$ について　$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \lambda$
- 各 $j = 1, 2, 3$ について　$a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = \lambda$
- $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = \lambda$

を満たす自然数 λ が存在すると仮定する. このとき, A は 3 次の魔方陣と呼ばれる. 以下の各問に答えよ.

(1) $\lambda = 15$ を示せ.

(2) $a_{22} = 5$ を示せ.

(3) $1 + x + y = 15$, $1 < x < y \leqq 9$ となる自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ.

(4) $\det A$ の絶対値を求めよ. またこの値の一意性を示せ.

(神戸大 2021)　　(m20213808)

0.222 E を 3 次の単位行列, J をすべての成分が 1 であるような 3 次の正方行列とし,

$$A = \frac{1}{3}J\,, \qquad B = E - A$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A^2, B^2, AB をそれぞれ求めよ.

(2) $V = \left\{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$, $U = \left\{ Bx \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$ とおくとき, $\mathbb{R}^3 = V \oplus U$ (直和) であることを示せ.

(神戸大 2022)　　(m20223801)

0.223 各成分が 1 か -1 のいずれかであるような 4 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & c & 1 & d \\ 1 & e & f & g \end{bmatrix}$$

について,

$$A^T A = 4E$$

が成り立つとする. ただし A^T は A の転置行列を, E は 4 次の単位行列を表す. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a, b, c, d, e, f, g を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解け.

(神戸大 2022)　　　(m20223802)

0.224 二次方程式 $ax^2+x+b=0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x,y)=ax^2+xy+by^2+x+y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 二変数関数 $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) を，a, b を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため，$x=x(a,b)$, $y=y(a,b)$ とかける．特に $x>0$ かつ $y>0$ となるような a, b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a,b)$ とする．このとき $V(a,b)$ は最大値を持つが，$V(a,b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ．

(神戸大 2022)　　　(m20223803)

0.225 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq 1\ .\ 1\leq 3x-2y\leq 2\}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 領域 D の概形を図示せよ．

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\left\{\log(3x-2y)\right\}^2 dx\,dy$ 　の値を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{13x-7y}}\,dx\,dy$ 　の値を求めよ．

(神戸大 2022)　　　(m20223804)

0.226 (1) a を実数の定数とする．x, y の関数

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+axy+\frac{y^4}{4}$$

の停留点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\ \text{かつ}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\ \text{となる点}\right)$ を求め，それらが f の極大値を与える，極小値を与える，極値を与えないのどれであるか判定せよ．

(2) x, y の関数 u, v を

$$u=xy$$
$$v=e^{x^2+y^2}$$

で定める．x, y の関数

$$g(x,y)=\sin(uv)$$

に対して，$\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を x, y で表せ．

(神戸大 2022)　　　(m20223805)

0.227 a を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $B=P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(2) (1) の条件が成り立つとき，$B=P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ．

(神戸大 2022)　　　(m20223806)

0.228 A を n 次実正方行列とする．単位行列，零行列をそれぞれ E, O で表す

(1) $A^m = E$ となる正整数 m が存在すれば，A は正則行列であることを示せ．

(2) $A^m = O$ となる正整数 m が存在すれば，A は非正則行列であることを示せ．

(3) $A^m = O$ となる正整数 m が存在するとき，$E - A$ は正則であることを示せ．また このとき，$E - A$ の逆行列を A で表せ．

(神戸大 2022)　　(m20223807)

0.229 n を正整数とする．積分

$$\iint_A (x+y)^2(x-y)^n dxdy\ , \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq y \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

を求めよ．

(神戸大 2022)　　(m20223808)

0.230 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 上記の P に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233801)

0.231 (1) 微分方程式 $y'' + \sqrt{5}y' - y + 2 = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上記の解のうち，$x > 0$ で $y(x) > 0$ となるものをすべて求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233802)

0.232 x, y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

と定める．$f(x,y)$ が次の関数のときに $\triangle f$ を求めよ．ただし，以下において，i は虚数単位である．

(1) $f(x,y)$ は $(x^2 - iy^2)(1+i) + e^{x+iy}$ の実部．

(2) $f(x,y)$ は $\dfrac{1}{x+iy}$ の虚部．

(3) $f(x,y) = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$

(4) $f(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{20}(-1)^k \begin{pmatrix} 40 \\ 2k \end{pmatrix} x^{40-2k}y^{2k}$

(神戸大 2023)　　(m20233803)

0.233 (1) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 2,\ \ y \geq x,\ \ y \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; xy \geq 0\right\}$ とする．積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\cos(ax^2+ay^2)dxdy$ を求めよ．ただし，a は実数である．

(3) D は $\boldsymbol{R}^2$ 内の有界閉領域で直線 $y = x$ について線対称であるとする．積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} dxdy$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233804)