[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：高知大

0.1 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_N(x) = N\varphi(Nx) \quad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する．実係数の多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)p(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 実数 c に対して，極限 $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$ の値を求めなさい．

なお，解答に必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

（高知大 2001）　(m20014501)

0.2 自然数 n に対して $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ．　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{\log n} = 1$ であることを示せ．

（高知大 2001）　(m20014502)

0.3 実数 x の関数 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ について，次の各問いに答えなさい．

(1) 等式 $S_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S'_n(x)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S'_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい．

（高知大 2001）　(m20014503)

0.4 3次元数ベクトル e_1, e_2, e_3（基本ベクトル）および a, b, c を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

できめる．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 実数を成分にもつ3次正方行列 A が,

$$Aa = e_1, \quad Ab = e_2, \quad Ac = e_3$$

を満たすとする．このとき，A, A^{-1} を求めなさい．

(2) 実数を成分にもつ3次正方行列 B が,

$$Ba = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bc = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき，B を求めなさい．

（高知大 2001）　(m20014504)

0.5 以下の問に答えよ．ただし，計算過程は書かなくともよい．

(1) 2次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(2) 2次行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(3) 4次行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

（高知大 2001 ）　　(m20014505)

0.6 A を複素数を成分とする2次正方行列とし，ω を1の3乗根の一つとする．さらに

$$Ax_1 = \omega x_1, \quad Ax_2 = \omega^2 x_2$$

を満たすベクトル $x_1, x_2 (\neq 0)$ があったとする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) $AP = P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 P があることを示しなさい．

(2) $\omega \neq 1$ のとき，x_1, x_2 は一次独立であることを示しなさい．

(3) $\omega \neq 1$ のとき，A^3 を求めなさい．

（高知大 2001）　　(m20014506)

0.7 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f, \xi(\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x) dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005)　　(m20054501)

0.8 4 次行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, その結果を因数分解せよ.

(高知大 2005)　　(m20054502)

0.9 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x|<K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x=0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x|<1$ における関数 $f(x)=(1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054503)

0.10 次の問に答えよ. ただし, I は n 次単位行列, O は n 次零行列である.

(1) n 次正方行列 A に対して, $(I-A)B=I-A^4$ を満たす B を一つ求めよ.

(2) $A^4=O$ を満たす n 次正方行列 A に対して, $I-A$ の逆行列を求めよ.

(3) $X=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $X^k\ (k\geq 2)$ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054504)

0.11 V を線形空間とし, $f:V\longrightarrow V$ を線形写像とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\,f=\{v\in V\mid f(v)=0\}$ 及び $\mathrm{Im}\,f=\{w\in V\mid w=f(v)\,,\ v\in V\}$ はともに V の部分線形空間であることを示せ.

(2) $f\circ f=f$ ならば, $V=\mathrm{Im}\,f\oplus\mathrm{Im}\,(1_V-f)$ が成り立つことを示せ.
ここで, $\mathrm{Im}\,(1_V-f)=\{w\in V\mid w=v-f(v)\,,\ v\in V\}$ とする.

(3) V が有限次元線形空間とする. このとき, $f\circ f=f$ であるための必要十分条件は
$\dim\mathrm{Im}(1_V-f)=\dim\mathrm{Ker}\,f$ であることを示せ.

(高知大 2005)　　(m20054505)

0.12 関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，さらに $\boldsymbol{R}$ 上で $f''(x) > 0$ を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a < b$ で $f(a) = f(b) = 0$ ならば　$f'(a) < 0 < f'(b)$　が成り立つことを，次のロールの定理を用いて示せ．

ロールの定理．　1 回微分可能な実数値関数 $g(x)$ が $a < b$ となる a, b について $g(a) = g(b)$ を満たすならば，$a < \xi < b$ となる ξ で $g'(\xi) = 0$ となるものが存在する．

(2) $a < b < c$ であるとする．このとき　$f(a) = f(b) = f(c) = 0$　が成り立たないことを示せ．

(3) $a < b$ で $f(a) < 0 < f(b)$ とする．このとき　$f(x) = 0$　を満たす x が a と b の間に唯一つ存在することを示せ．

(高知大 2006)　　(m20064501)

0.13 n を自然数とし

$$f_n(x) = \max\left\{-\frac{3}{4n^3}x^2 + \frac{3}{2n^2}x\,,\ 0\right\}$$

とする．ここで $\max\{a, b\}$ は a と b の小さくない方を表すとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$

(2) $x \in [0, \infty)$ に対して，次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

(3) 次を示せ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

(高知大 2006)　　(m20064502)

0.14 I_n を $n\times\ n$ 単位行列とする．また，$a \in \boldsymbol{R}^n$ を長さ 1 の n 次元行ベクトルとする．任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，行列 $A(x)$ と関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$A(x) = I_n + x({}^t aa)\,, \quad f(x) = \det A(x)$$

ただし，${}^t a$ は a の転置ベクトルであり，$\det A(x)$ は $A(x)$ の行列式である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0) = 1$ を示せ．

(2) $aA(-1) = 0$ であり，ゆえに $f(-1) = 0$ となることを示せ．

(3) $f(x)$ は x の多項式であり，その次数 m は $1 \leq m \leq n$ を満たすことを示せ．

(4) 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して，$f(x)f(y) = f(x + y + xy)$ となることを示せ．

(5) $f(x) = (1 + x)^m$ を示せ．

(6) $m = 1$，すなわち $f(x) = 1 + x$ となることを示せ．

(高知大 2006)　　(m20064503)

0.15 実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体の集合を V とする．さらに V から $\boldsymbol{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する．V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \qquad\qquad f_2(M) = a + d$$

このとき，f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，V と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006)　　(m20064504)

0.16 関数 $x = \log t$, $y = \dfrac{2t+1}{t^2}$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ および $\displaystyle\int y dx$ を t で表せ.

(高知大 2006) (m20064505)

0.17 関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 2 次までの偏導関数を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(高知大 2007) (m20074501)

0.18 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ.

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ.

(1) $x_0 = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ.

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で, その既約分数表示が } m > 0 \text{ として} \dfrac{n}{m} \text{と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ.

(3) 次の値を求めよ.

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ (b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ.

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ.

(高知大 2007) (m20074502)

0.19 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{t-1} dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ を求めよ.

(2) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} x^t = 0$ を示せ.

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = t f(t)$ が成り立つことを示せ.

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ.

(高知大 2007) (m20074503)

0.20 $M_3(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．また，

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \neq O,\ AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C \neq O,\ CA = O\}$$

と定義する．ただし，O は 3 次零行列を表す．今，$\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A は正則でないことを示せ.

さらに, $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$ としたときに, 次の (2)〜(4) に答えよ,

(2) a の値を求めよ.

(3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ.

(4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ. ただし, ${}^tQ$ は Q の転置行列を表す.

(高知大 2007) (m20074504)

0.21 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和, 行列の実数倍をそれぞれ, 線形和, スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$ で定義するとき, tr は線形写像であることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker\ tr} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(4) Ker tr の次元を求めよ.

(高知大 2007) (m20074505)

0.22 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は次で定義される.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ.

(2) 同様に, $f(x) = x^n$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ. ただし, n は正の整数である.

(高知大 2008) (m20084501)

0.23 (1) $D = \{(x, y) \mid y \leq 2x,\ x \leq 2y,\ x + y \leq 3\}$ とする, D を図示せよ.

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$

(高知大 2008) (m20084502)

0.24 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式, 階数を表す. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について, $\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列, I を n 次単位行列とし, $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく. λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき, $\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ.

(高知大 2008)　　(m20084503)

0.25 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x \in \boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ ($\boldsymbol{W}^{\perp}$は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x = w + w'$ ($w \in \boldsymbol{W},\ w' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$) と一意に表すことができる．$x$ に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{V},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f \circ f = f$ が成り立つことを示せ．ただし，$f \circ f$ は f と f の合成写像である．

(3) 任意の $x, y \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\langle\, f(x), y\,\rangle = \langle\, x, f(y)\,\rangle$ が成り立つことを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084504)

0.26 次は，ロピタルの定理の使用例である．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ．

(1) ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.27 3 次行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　のすべての固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084506)

0.28 関数 $y = \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1, 1)$ 上で関数 $y = \sin^{-1} x$ を微分せよ．

(2) $y = \sin^{-1} x$　$(-1 < x < 1)$ の接線の傾きは 1 以上であることを示せ．

(3) 直線 $y = 2x$ と平行な，曲線 $y = \sin^{-1} x$ の接線の方程式をすべて求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094501)

0.29 R^3 で，球 $S\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq\ 5^2$ と円柱 $C\ :\ x^2 + z^2 \leqq\ 4^2,\ -5 \leqq\ y \leqq\ 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094502)

0.30 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\,, \quad f(\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.31 $n \times\ n$ 行列 A が n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもてば，A は対角化可能であることを示せ．また，$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

(高知大 2009)　　(m20094504)

0.32 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるときの a の値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094505)

0.33 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．

① $a_1 = 1$

② n が素数のときは $a_n = n$

③ $n \geq 2$ が素数でないときは $a_n = \dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする．

このとき, 次の問いに答えよ．

(1) 初項から第 10 項までを求めよ．

(2) $\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ．

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ．

(高知大 2010)　　(m20104501)

0.34 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x\,,\ x \leq 2y\,,\ x + y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ．

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x, y) = \frac{2x - y}{3}\ , \qquad v = \psi(x, y) = \frac{-x + 2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x, y) = (\varphi(x, y),\ \psi(x, y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u, v)\, dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104502)

0.35 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104503) ,

0.36 $3\times\ 3$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) α と β を定数とし, $3\times\ 3$ 行列 B を次で定義する.

$$B = T\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

(4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104504)

0.37 関数 $f(x)$, $g(x)$ が条件 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を満たしているとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+3}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$ を求めよ.

(3) $f(x) = x$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(2x)}$ を求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114501)

0.38 べき級数 $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114502)

0.39 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．A の固有値は τ と $\overline{\tau} = -\dfrac{1}{\tau}$ であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 τ と $\overline{\tau}$ に対する固有ベクトルで，単位ベクトルとなることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_n = A^n\boldsymbol{v}_0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_n = \dfrac{\tau^n\boldsymbol{u}_1 - \overline{\tau}^{n-1}\boldsymbol{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ.

(高知大 2011)　　(m20114503)

0.40 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $\displaystyle f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ．

(2) $f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$，$f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ．

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.41 a を正の実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値が 6 となるような a の値を求めよ．

(2) 行列 A の固有値が二つの実数となるような a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対し，行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2011)　　(m20114505)

0.42 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)^3}$ について．以下に設問に答えよ．

(1) 恒等式 $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{D}{(x-2)^3}$ が成り立つ様に定数 A, B, C, D の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の原始関数で，$x = \dfrac{3}{2}$ の時の値が 0 となるものを求めよ．

(高知大 2011)　　(m20114506)

0.43 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ．

(2) $x \neq 0$ のとき，$f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ．また，$f'(0)$ を求めよ．

(4) $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(高知大 2012)　　(m20124501)

0.44 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) 実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{e^x - e^a}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ．

(4) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq |x|$ を示せ．

(高知大 2012)　　(m20124502)

0.45 3次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) A の階数 (rank A) を求めよ．

(2) A が正則行列であるための定数 a に対する条件を求めよ．

(3) 方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の他にも解をもつための定数 a に対する条件を求め，その条件のもとで一般解を求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124503)

0.46 2次正方行列 A と4次正方行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -27 & 75 & 0 & 0 \\ -10 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) B の行列式を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124504)

0.47 4次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124505)

0.48 次の問いに答えよ．

(1) 微分可能な関数 $f(x)$ が微分可能な逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする．このとき，次の式を示せ，

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

(2) $f(x) = \tan x$ とし，$\tan x = t$ とおく．(1) を用いて次の式を示せ．

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(3) (2) を用いて次の式を示せ．

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

(4) 次の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(高知大 2013) (m20134501)

0.49 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．関数

$$f_n(x) = \frac{x^n(x-\pi)^n}{n!}$$

に対し,

$$a_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の式を示せ.

$$f_{n+1}(x) = \frac{x(x-\pi)}{n+1}f_n(x)$$

(2) 次の式を示せ.

$$f''_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x) + (2x-\pi)^2 f_n(x)$$

(3) 次の式を示せ.

$$a_{n+2} = (-4n-6)a_{n+1} - \pi^2 a_n$$

(4) a_3 を求めよ.

(高知大 2013)

0.50 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ．求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x+y=0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x+2y=0$ へ正射影する変換.

(4) $y=x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $(2p,2q)$ に移る．また，$y=-x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る．これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013) (m20134503)

0.51 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) J のすべての固有値を求めよ.

(2) J の異なる固有値に対して，それぞれの固有空間の基底を求めよ.

(3) J は対角化可能かどうか，理由をつけて答えよ．また 対角化可能である場合には，$P^{-1}JP$ が対角行列となるような P を求めよ.

(高知大 2013) (m20134504)

0.52 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $A = PDP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および対角行列 D を求めよ.

(3) 正の整数 n に対し，A^{2n} を求めよ.

(高知大 2013) (m20134505)

0.53 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x \neq 0$ のとき，$f'(x)$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して，$|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x f'(x)$ を求めよ．

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.54 2 変数関数 $f(x, y) = e^x(x + y^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) = 0$ を満たす (a, b) を求めよ．

(2) (1) で求めた (a, b) について，$f_{xy}(a, b)^2 - f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)$ を計算せよ．

(3) $f(x, y)$ が極値を持つなら，その値は極大値か極小値かを述べ，その値を求めよ．持たないなら，その理由を述べよ．

(高知大 2014)　　(m20144502)

0.55 3 次正方行列 A の固有値が $3, 2, 1$ で，それらに対応する固有ベクトルが順に $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ であったとする．また，

$$P = (\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w})$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$A^n - A$ は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ．

(3) P は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ．

(4) A を P を用いて表わせ．

(5) 正の整数 n に対して，A^n を P を用いて表わせ．

(高知大 2014)　　(m20144503)

0.56 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とおく．$M_n(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．$M_n(\mathbb{R})$ の元 A に対し，

$$L(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $L(A)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $L(A)$ は行列の積について閉じていること，つまり任意の $B, C \in L(A)$ に対し，$BC \in L(A)$ となることを示せ．

(3) $n = 2$ として，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合にベクトル空間 $L(A)$ の基底を 1 組求め，$L(A)$ の次元を答えよ．

(高知大 2014)　　(m20144504)

0.57 次の問いに答えよ.

(1) 実数 s に対して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{s+x}dx$ を求めよ.

(2) 正の整数 n と正の実数 t に対して　$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t+\frac{k}{n}}$　とおく.
t を固定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた極限を $f(t)$ とおく．$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{\log(1-e^{-t})}$ を求めよ.

(高知大 2015)　　(m20154501)

0.58 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，$g(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$　$\big((x,y)\neq(0,0)\big)$ のとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(2) $f(x,y) = x^2-y^2$ のとき，(f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ.

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y) = h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$
$$q(x,y) = k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと，(p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.59 4 次の正方行列 A が 2 次の正方行列 P,Q,R を用いて

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}$$

のように表されているとする．ただし，O_2 は $2\times\ 2$ の零行列である．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A が正則なら，P,R も正則であることを示せ.

(2) P,R は正則であるとする．このとき

$$A\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_2 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & X \\ O_2 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

が 4 次の単位行列と等しくなるような 2 次の正方行列 X を，P,Q,R を用いて書き表せ.

(3) 次の 4 次の正方行列 B の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(高知大 2015)　　(m20154503)　　大 2015)

0.60 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．$M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \bigl(a \in M_2(\mathbb{R})\bigr)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f は一次写像であることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ．

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154504)

0.61 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3\theta d\theta$ を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154505)

0.62 x, y, z, w を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 3x - z = 0 \\ x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ 2y - w = 0 \end{cases}$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) この連立 1 次方程式の係数行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) 以下の 4 次正方行列 A_x, A_y, A_z, A_w の行列式の値をそれぞれ求めよ．

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) クラーメルの公式を用いて，この連立 1 次方程式を解け．

(高知大 2015)　　(m20154506)

0.63 $a_1 = 1$ および $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{1}{2} \leqq a_n \leqq 1$ であることを示せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$\bigl|a_{n+2} - a_{n+1}\bigr| \leqq \dfrac{4}{9}\bigl|a_{n+1} - a_n\bigr|$ であることを示せ．

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ．また，その極限値を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164501)

0.64 $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.65 行列　$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対して，固有空間の基底を一組求めよ．

(3) A は対角化可能かどうかを理由を付けて答えよ

(高知大 2016)　　(m20164503)

0.66 a, b, c は実数であるとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$．$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A^{-1} を求めよ．

(2) $B = AJA^{-1}$ とおく．B を求めよ．

(3) (2) の B によって定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書く．このとき $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ f の像と f の核を表すものとする．

(4) (3) の線形写像 f に対して，$\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164504)

0.67 次の極限値　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)$　を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164505)

0.68 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2017)　　(m20174501)

0.69 (1) 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

が成り立つような定数 a, b, c を求めよ．

(2) $r > 0$ のとき，次の広義積分の値を r を用いて表せ．

$$\int_r^\infty \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

(3) (2) で求めた広義積分の値を $I(r)$ とおく．$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\bigl(r^2 I(r)\bigr)$ を求めよ．

(高知大 2017)　　(m20174502)

0.70 $\mathbb{R}^2$ の領域 D_1, D_2 を

$$D_1 = \bigl\{(x, y)\ \big|\ 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\bigr\}$$

$$D_2 = \{(x, y)\ |\ 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が $x^2 + y^2$ のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

が任意の $(x, y) \in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*) \qquad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は $x^2 + y^2$ のみに依存する関数であることを示せ．

(3) D_2 上の関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ．

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ．

(高知大 2017)　　(m20174503)

0.71 実ベクトル空間 V, W の間の一次写像 $f : V \to W$ について次の問いに答えよ．

(1) f の核を $\mathrm{Ker}\ f$ とおき，V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ とおく．f が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}_V\}$ であることを示せ．

(2) f が単射で，V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるならば，これらの f による像 $f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_k)$ も一次独立であることを示せ．

(3) 実ベクトル空間としての V, W の次元をそれぞれ m, n とおく．f が単射であるならば，$m \leqq n$ であることを示せ.

(高知大 2017)　　(m20174504)

0.72 A を $A^2 = O$（零行列）を満たす複素数を成分とする 4 次の正方行列とする．さらに，$A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ が一次独立となる 4 次元複素ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ があるとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ は一次独立であることを示せ.

(2) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(3) $P = (A\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p} \quad A\boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{q})$ とおくと P は正則であることを示し，さらに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(高知大 2017)　　(m20174505)

0.73 (1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在するか．理由をつけて答えよ.

(2) a, A, $B \in \mathbb{R}$ を定数とする．g, h を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x\to A} h(x) = B$ が成り立つとする．また，$x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ.

(3) a, A, $B \in \mathbb{R}$ を定数とする．g, h を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x\to A} h(x) = B$ が成り立つとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか．理由をつけて答えよ.

(高知大 2018)　　(m20184501)

0.74 $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) f が $x - y$ のみの関数のとき，すなわち，$f(x, y) = h(x - y)$ が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ であることを示せ.

(2) f が $x + y$ のみの関数のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ がみたす関数式を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級関数 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ が与えられていて，f_1 が $x - y$ のみの関数，f_2 が $x + y$ のみの関数とする．f が $f = f_1 + f_2$ をみたすならば，f は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

をみたすことを示せ.

(高知大 2018)　　(m20184502)

0.75 ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ．

(3) (2) の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ．

(高知大 2018)　　(m20184503)

0.76 3 次の実正方行列 A が $A^2 - 5A = O$ (O は 3 次の零行列) をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$A\boldsymbol{v}$ は A の 5− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}\}$ の元であることを示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$(A - 5E)\boldsymbol{w}$ は A の 0− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の元であることを示せ．ただし，E は 3 次の単位行列とする．

(3) $\mathbb{R}^3$ は A の 0− 固有空間と 5− 固有空間の直和であることを示せ．

(4) 題意をみたすような A で．E の実数倍とは異なるものの例を一つあげよ．

(高知大 2018)　　(m20184504)

0.77 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t\,, \quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ．

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ．

(3) t の範囲を $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ．

(高知大 2018)　　(m20184505)

0.78 正の整数 n と実数 $x < 1$ に対して，$R_{n+1}(x) = \log(1-x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ とおく．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}}$ の値を求めよ．

(2) $|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{R_4(x)}{\dfrac{1}{1-x^2} - 1 - x^2}$ の値を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194501)

0.79 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $u = y - \sin x$, $v = x$ とおく．この変換のもとで，u, v の関数 $g(u, v)$ を $g(u, v) = f(x, y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.

(3) $f(x, y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x, y)$ は $y - \sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x, y) = a(y - \sin x)$ と表されることを示せ.

(4) $f(x, y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0, y) = y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x, y)$ を求めよ.

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.80 n は正の整数とする．　A は n 次実正方行列で，$A^2 = O_n$ をみたすとする．また，$\alpha = \det(A + I_n)$, $\beta = \det(A - I_n)$ とおく．ただし，O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし，$\det(M)$ は行列 M の行列式とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\left(\det\left(\dfrac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(2) $\left(\det\left(I_n - \dfrac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(3) n が奇数のとき，$\alpha \geqq \beta$ を示せ.

(高知大 2019)　　(m20194503)

0.81 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ.

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ.

(4) $\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.82 α と β について連立方程式

$$\begin{cases} \sin\beta = 2\sin\alpha + 2 \\ \sin\beta = -\sin\alpha + h \end{cases}$$

について（但し，$0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ とする．），以下の問いに答えよ.

(1) 連立方程式が解を持つ為の h の範囲を求めよ.

(2) (1) の範囲の各 h について，解の個数を求めよ.

(3) h が (1) の範囲にある時，$h^3 - h$ が最小となる h の値と最小値を求めよ.

(高知大 2020)　　(m20204501)