[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：熊本大

0.1　$x>0$ のとき，$0<x\log(1+\dfrac{1}{x})<1$ であることを示せ．

（熊本大 2001）　(m20015201)

0.2　(1) 連続関数の中間値の定理について述べよ．

(2) $f(x)$ は区間 $I=[a,b]$ 上で定義されている連続関数とする．このとき，$f(x)$ が I 上単射であるための必要十分条件は $f(x)$ が I 上単調増加関数または単調減少関数であることを示せ．

注：$f(x)$ が I 上単調増加関数であるとは，$x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2$ ならば，$f(x_1)<f(x_2)$ であるとき，また単調減少関数であるとは，$x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2$ ならば，$f(x_1)>f(x_2)$ であるときをいう．さらに，I 上単射であるとは，$x_1,x_2\in I,\ x_1\neq x_2$ ならば，$f(x_1)\neq f(x_2)$ であるときをいう．

（熊本大 2001）　(m20015202)

0.3　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx$ の値を求めよ．

（熊本大 2001）　(m20015203)

0.4　$\displaystyle\iint_D \frac{1+x-y}{1+x+y}dxdy$ の値を求めよ．$D=\{(x,y)\,|\,0\leqq\ x+y\leqq\ 1,\ 0\leqq\ x-y\leqq\ 1\}$

（熊本大 2001）　(m20015204)

0.5　$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が逆行列をもつための $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ の条件を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2001)　(m20015205)

0.6　$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して，

$$V_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)=0\}\ (i=1,2),\qquad V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2,\ (\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R})\}$$

とするとき，次のことを示せ．ここに，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の内積を表す．

(1) V_1,V_2 は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間である．

(2) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\ ({}^\forall\boldsymbol{y}\in V_1\cap V_2)\}$

（熊本大 2001）　(m20015206)

0.7　(1) $\arctan x$ の $x=0$ における Taylor 展開を，５次の項まで求めよ．

(2) $BC=10,\ AC=1,\ \angle C=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC において，$\angle B$ の値（ラジアン）を小数第４位まで求めよ．

(熊本大 2004)　(m20045201)

0.8　$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$ の最大値，最小値を求めよ．

(熊本大 2004)　(m20045202)

0.9 n 次の実正方行列 A について，${}^tAA = E$ が成り立つとき，A は n 次の直交行列であるという．ここで，${}^tA$ は A の転置行列，E は n 次の単位行列だある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A, B が共に n 次の直交行列であれば，AB, A^{-1} も n 次の直交行列であることを示せ．

(2) ２次の直交行列 A は次の２つの行列のいずれかの形をしていることを示せ．
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(熊本大 2004)　(m20045203)

0.10 ３次の実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる３次の正則行列 P を１つ求めよ．

(熊本大 2004)　(m20045204)

0.11 $x = r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$ のとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065201)

0.12 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}dr$ を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065202)

0.13 xy 平面上の集合 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ とするとき，２重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065203)

0.14 $\mu \neq \lambda > 0$ として，３つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

が，$AP = PB$ を満たすような λ, μ, x, y を求めよ．

(熊本大 2006)　(m20065204)

0.15 関数 $f(x, y) = e^{x^3y}$ の２階偏導関数 $f_{xy}(x, y)$ を求めよ．

(熊本大 2007)　(m20075201)

0.16 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とするとき，２重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(熊本大 2007)　(m20075202)

0.17 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(熊本大 2007)　(m20075203)

0.18 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1) f の核の基底を求めよ．　　　(2) f の像の次元を求めよ．

(熊本大 2007)　　(m20075204)

0.19 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$．$B = \lambda I_2 - A$ とする．ただし，λ は定数で，I_2 は 2 次の単位行列である．次の問いに答えなさい．

(1) B を求めなさい．

(2) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解（$x = y = 0$ ではない解）が存在するような λ を全て求め，それぞれの λ に対して，$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(4) A の対角化により,A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする．

(熊本大 2008)　　(m20085201)

0.20 ガンマ関数は，$\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s > 0)$ で定義される．次の問いに答えなさい．

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である．

(熊本大 2008)　　(m20085202)

0.21 図 1 のような底面の半径が r，母線の長さが l の直円すいがある．以下の設問に答えよ．

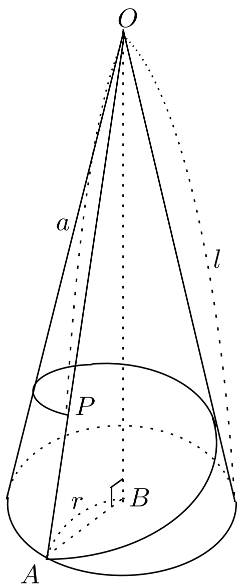


図 1　直円すい

(1) 母線 OA 上に $OP = a$ となる点 P からこの直円すいの側面を一巻きして，点 A にいたる最短の長さ b を求めなさい．ただし，$l > 2r$ であるとする．

(2) この直円すいが $r = 5$, $l = 30$ の寸法をもつとする．$a = 20$ のときの b の値を計算しなさい．

(3) (2) の直円すいにおいて，$a = 30$ のときの曲線 AP の概略図を描きなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095201)

0.22 次の行列は対角化可能かどうか判定しなさい．ただし，α, β, γ はいずれも 0 でない実数であり，かつ，$\alpha \neq \beta$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(熊本大 2009)　(m20095202)

0.23 ２つの放物線 $\alpha y^2 = \beta^2 x$ および $\beta x^2 = \alpha^2 y$ に関して次の問いに答えなさい．ただし，α と β はともに正の定数である．

(1) 共有点を求め，グラフを描きなさい．

(2) ２つの放物線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(熊本大 2009)　(m20095203)

0.24 (1) 次の命題を数学的帰納法により証明しなさい．

「任意の自然数 n に対して, $n^3 + 2n$ は 3 で割り切れる」

(2) 次の命題を背理法により証明しなさい．

「自然数 n が, 2 または 3 で割り切れないならば, 6 でも割り切れない」

(熊本大 2010)　(m20105201)

0.25 $\boldsymbol{R}^3$ において, ベクトル $\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立（一次独立）かどうかを調べなさい．

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底かどうかを調べなさい．

(3) $\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ と $\overrightarrow{a_3}$ の線形結合（一次結合）で表されるかどうか調べなさい．表される場合にはその線形結合を求め, 表されない場合にはその理由を説明しなさい．

(熊本大 2010)　(m20105202)

0.26 関数 $y = e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい．

(1) この関数のグラフを描きなさい．

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい．

(熊本大 2010)　(m20105203)

0.27 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を V とし，V の正規直交基底を求めなさい．

(3) 設問 (2) の結果を用いて，行列 A を R^TAR により対角化する直交行列 R を求めなさい．ただし，R^T は R の転置行列である．

(熊本大 2011)　(m20115201)

0.28 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x \quad (x \geqq 0)$ において，次の問に答えなさい．

(1) a と b を実数とし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい．

(2) n を自然数とし，区間 $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい．

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.29 以下の証明問題に答えなさい．

(1) 自然数 n に関する不等式 $2^n > 2n-1$ について，数学的帰納法により証明しなさい．

(2) $\log_{10} 2$ が無理数であることを，背理法により証明しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135201)

0.30 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである．

$$\text{固有値 } \lambda_1 = \frac{3}{2} \ ,\ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = \frac{1}{2} \ ,\ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい．

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，$\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135202)

0.31 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする．

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．

(2) $\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とするとき,

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して, $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい.

(3) (1),(2) を用いて, π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい. 必要であれば, 以下の補助表を用いてもよい.

補助表

x	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\frac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013) (m20135203)

0.32 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ なる式から定まる陰関数 y について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい.

(2) 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めなさい.

(熊本大 2014) (m20145201)

0.33 3 次元空間内に原点 O を一つの頂点とする三角形 OAB がある. 点 A と点 B の直交座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とし, 線分 OA と線分 OB のなす角を θ として, 以下の問に答えなさい.

(1) 線分 OA および OB の長さを $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のように書くことにする. このとき, 線分 AB の長さの 2 乗 $\overline{AB}^2$ を $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, および θ を用いて表しなさい.

(2) $\cos^2\theta \leq 1$ であることを利用して, 次の不等式

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \qquad ①$$

が成り立つことを示しなさい.

(3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し, そのとき三点 O, A および B はどのような位置関係にあるか述べなさい.

(熊本大 2014) (m20145202)

0.34 次の重積分の値を求めるために, 以下の小問 (1) と (2) について答えなさい.

$$\iint_{4 \leq x^2+y^2 \leq 9} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad ①$$

(1) 変数 x, y を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変数 r, θ を用いて変数変換をする, この変数変換のヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ を求めなさい.

(2) 変数 r, θ とヤコビアン J を用いて, 式 ① の重積分の値を求めなさい.

(熊本大 2014) (m20145203)

0.35 ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155201)

0.36 $S = \displaystyle\int_0^{\pi} (x - a\cos x - b)^2 dx$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x dx$，$B = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ をそれぞれ求めなさい．

(2) S を最小とする a と b を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155202)

0.37 次に示す 3 つの 3 次元ベクトル，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ について以下の問いに答えなさい．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立（1 次独立）であることを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}_1$ を正規化しなさい．

(3) グラム・シュミットの直交化を用いて，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ を正規直交化しなさい．　ただし，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，および $\boldsymbol{a}_3$ の順に正規直交基底を求めなさい．

(熊本大 2016)　　(m20165201)

0.38 (1) t の有理関数 $\dfrac{1}{(t+1)(t+5)}$ を部分分数に分解しなさい．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+5)}dx$ の値を計算しなさい．

(熊本大 2016)　　(m20165202)

0.39 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) A の逆行列を求めなさい．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) A は対角化可能かどうか調べ，その理由を示しなさい．

(4) A^n を求めなさい．

(熊本大 2017)　　(m20175201)

0.40 関数 $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$，$g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ の微分および不定積分を求めなさい．

(2) 合成関数 $h(x) = f(x)g(x)$ の不定積分を求めなさい．

(3) 合成関数 $k(x) = \dfrac{f(g(x))}{x}$ の極値，変曲点を示し，そのグラフの概形を描きなさい．

(熊本大 2017)　　(m20175202)

0.41 以下の関数を全微分せよ．

$$z = e^{-x} \sin 2y$$

(熊本大 2018)　　(m20185201)

0.42 以下の積分を計算せよ．ただし，領域 D は図 4 に示す通りである．

$$I = \iint_D xydxdy$$

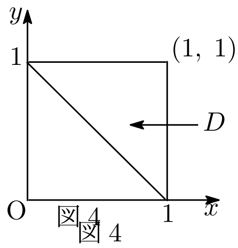


図 4
図 4

(熊本大 2018)　　(m20185202)

0.43 $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ f(x, y) = x^2 y + 2y$ のとき，$f(x(t), y(t))$ を t で微分せよ．

(熊本大 2019)　　(m20195201)

0.44 下記の行列 A の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(熊本大 2019)　　(m20195202)

0.45 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

$\alpha,\ \beta$ を $x,\ y$ を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.46 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2020)　　(m20205201)

0.47 点 $(2,\ -1,\ 3)$ を通り，$(1,\ 5,\ -2)$ の方向ベクトルをもつ直線の方程式を求めよ．

(熊本大 2020)　　(m20205202)

0.48 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい．

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される．

$$A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

(熊本大 2020)　　(m20205203)

0.49 (1) 次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めなさい．ただし，$t = 0$ での初期値を $y(0) = 1$ とする．

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

(2) 次の微分方程式について，特定方程式（補助方程式）を求めなさい．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

(3) (2) の結果を利用して $y(t)$ の一般解を求めなさい．ただし，任意定数を $C_1,\ C_2$ とする．

(4) (3) の結果を利用して，次の微分方程式の解 $y(t)$ を求めなさい．
ただし，$t = 0$ での初期値を $y(0) = 1,\ \left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 3$ とする．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2$$

(熊本大 2020)　　(m20205204)

0.50 以下の問に答えなさい．ただし，a, b, c, d は定数とし，かつ，a, b, c は相異なるものとする．なお，結果は因数分解した形で示しなさい．

(1) 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式を解きなさい．

$$\begin{aligned} &x + y + z = 1 \\ &ax + by + cz = d \\ &a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{aligned}$$

(熊本大 2021)　　(m20215201)

0.51　次の積分について，以下の問に答えなさい．

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\, dxdydz$$

$$D\ :\ a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1)　$t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} \right)$$

を求めなさい．

(2)　D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい．

(3)　I を $a,\ b$ を用いて求めなさい．

(熊本大 2021)　　(m20215202)

0.52　$\dfrac{dy}{dx} = y(1+x)$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2021)　　(m20215203)

0.53　3 点 $(1,2,3),\ (1,-1,2),\ (2,3,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(熊本大 2021)　　(m20215204)

0.54　$\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} dx$ の一般解を求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225201)

0.55　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225202)

0.56　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ および行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1)　A の固有値を全て求めなさい．

(2)　B の逆行列を求めなさい．

(3)　行列 $(AB)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

(4)　行列 $(BA)^n$ を求めなさい．ただし，n は自然数である．

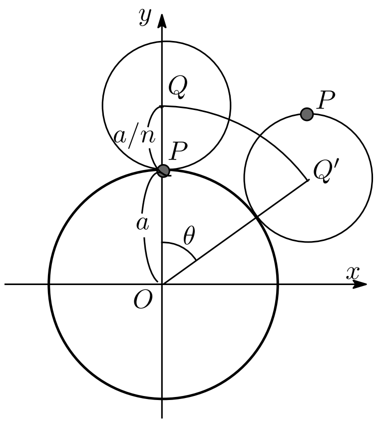
(5)　(4) の結果を用いて，A の逆行列を A と B を使って表しなさい．

(熊本大 2022)　　(m20225203)

0.57　下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1)　Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2)　$0 \leq \theta \leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　　(m20225204)