[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：京都大

0.1 (1) $|x| < 1$ として，次式を証明せよ．

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right)$$

(2) $\log_e \frac{3}{2}$, $\log_e 2$, $\log_e 3$ を小数第 3 位まで求めよ．

(京都大 1995)　(m19953301)

0.2 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ として， $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

(京都大 1995)　(m19953302)

0.3 $D = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2\right\}$ として，次式を求めよ．

$$\iiint_D z^n \, dx \, dy \, dz$$

（n は自然数）

(京都大 1995)　(m19953303)

0.4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な P を選べ．

(京都大 1995)　(m19953304)

0.5 $z = xf(z) + y$, $u = g(z)$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(z)\frac{\partial u}{\partial y}$$

であることを証明せよ．

(京都大 1996)　(m19963301)

0.6 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$　$(a > 0)$ の $x^2 + y^2 = ax$ の円柱内の体積を求めよ．

(京都大 1996)　(m19963302)

0.7 行列 A, B, C が $A \cdot B$, $B \cdot C$ が各々の行と列が与えられるように定義されているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ が定義されていることを示せ．

(2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ を証明せよ．ただし，A^T は転置行列である．

(3) (2) を用いて $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ を証明せよ．

(京都大 1996)　(m19963303)

0.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$T^T \cdot A \cdot T = D$

とするとき，直交行列 T と対角行列 D を一組求めよ．また，$A = B^2$ となる正方行列 B を一組求めよ．

(京都大 1996)　(m19963304)

0.9 Nim という複数個の石を２人で交互に取るという簡単なゲームがある．１回に取る石は，１～３個で最後に石を取った方が負けである．以下の問いに答えよ．

(1) 残っている石が２～４個のとき，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(2) 残っている石が５個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(3) 残っている石が６～８個の時，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(4) 残っている石が $4n+1$ 個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を数学的帰納法で示せ．また，それ以外の時は次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(京都大 1998)　　(m19983301)

0.10 関数 $r = a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ．

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.11 次の微分方程式に関する問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ を解け．

(2) 上の解で $x=0$ で $y=0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ (or 0.5) のとき，曲線の概形を描け．

(京都大 1998)　　(m19983303)

0.12 行列 A が次のように定義されている．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983304)

0.13 昭和 25 年は西暦 1950 年であるが，1950 は 25 で割りきれる．昭和元年から 63 年までで西暦が割りきれるのは何か．

(京都大 1999)　　(m19993301)

0.14 次の積分方程式を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_a^x y(t)\cdot(x-t)dt$$

(京都大 1999)　　(m19993302)

0.15 行列 A が次のように定義されているとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) i 列目の x_i と j 列目の x_j が等しい場合，階数は n より 1 以上小さいことを示せ．

(2) A の行列式は $(x_i - x_j)$ で割りきれることを示せ．$(i \neq j)$

(3) 列の値がすべて同じ値である列数が m であるとすると，階数は $(n-m)$ であることを示せ．

(京都大 1999)　　(m19993303)

0.16 つぎの各問いに答えよ．

(1) i , $1+i$, $1-\sqrt{3}i$ を極形式で表せ．

(2) $e^z = 4i$ なる z を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z-\frac{1}{3}}{z^3-z}dz$,　$C : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ の反時計を計算せよ．

(4) $\dfrac{1}{z(z-i)}$ を $z=i$ 近辺でローラン展開せよ．

(京都大 1999)　　(m19993304)

0.17 円を 4 分割して，1 つを当たりとするとき，円をまわして 3 本矢を投げてすべて当たりになる確率はいくらか．

(京都大 1999)　　(m19993305)

0.18 次の行列式の値を求めよ．但し，その導出過程も書くこと．

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

(京都大 2000)　　(m20003301)

0.19 (1) 行列 A，固有値 λ，それに対応する固有ベクトル x の間の関係式を書け．

(2) 行列 A，固有値 λ が満たすべき方程式を固有方程式という．固有方程式を書け．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値を求めよ．

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で，互いに直交な単位ベクトルを求めよ．

(京都大 2000)　　(m20003302)

0.20 次の複素積分を行え．ただし，$i = \sqrt{-1}$（虚数単位）とする．

(1) $I = \displaystyle\int_C (z-z_0)^n dz \qquad C : |z - z_0| = r$

(2) 留数定理を用いて，次の積分を行え．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{3z+1}{z^2+1}dz \qquad C_1 : |z-i| = 1$$

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{(z^2+2)^2}{(2z^2-z)(z+3)}dz \qquad C_2 : |z| = 1$$

(京都大 2000)　　(m20003303)

0.21 以下の設問に答えよ．

(1) 中世のフランス貴族メイは，2 個のサイコロを 24 回振って 6 のぞろ目（両方のサイコロの目が共に 6 であること）が出るかという賭けで，出る方に賭けた．彼は，次のように考えた．1 回振ったとき，6 のぞろ目が出る確率は $1/36$ なので，24 回振れば $24 \times 1/36 = 2/3$ である．しかし，彼は大損をした．正しい計算方法を示せ．

(2) 箱 A には，白球 5 個，赤球 1 個が入っている．箱 B には，白球 1 個，赤球 5 個が入っている．今，任意に箱を選び球を 1 個取り出したら赤球であった．その球を元の箱に戻し，同じ箱から球をとり出したとき，再び赤球である確率を求めよ．

(3) ある小売店では商品を A 社から 7 割，B 社から 3 割仕入れている．A 社からの納入品のうち 2 割は純毛，B 社からの納入品のうち 4 割は純毛である．その小売店で適当に純毛の品を選んだとき，A 社の品である確率はいくらか．

(京都大 2000)　　(m20003304)

0.22 (1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ は $x=a$ において，$f(a)=g(a)=0$ であり，$f'(a)$ および $g'(a)$ が存在する．このとき，$g'(a) \neq 0$ であれば，次の式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(2) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$

(京都大 2002)　　(m20023301)

0.23 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 7\cos 3x$ を　$\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right)\left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right)y = 7\cos 3x$　と書く．

$z = \left(\dfrac{d}{dx} - 3i\right)y$ と置くことにより，上の微分方程式は $\left(\dfrac{d}{dx} + 3i\right)z = 7\cos 3x$ となる．これを用いて，上の微分方程式の一般解を以下の問いに従って求めよ．

(1) $\dfrac{dz}{dx} + 3iz = 7\cos 3x$ の解 z を求めよ．

(2) 上の解 z を使って，$\dfrac{dy}{dx} - 3iy = z$ の解 y を求めよ．

(京都大 2002)　　(m20023302)

0.24 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは，ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1}，および，ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである．

(1) 対角化可能な行列 A があるとき，これを対角化する手順について説明せよ．

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し，行列 P と対角行列 Λ を与えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002)　　(m20023303)

0.25 z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w = f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1| < 1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w > 0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2}) = i$，$f(0) = 0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V = \{w \mid 0 < \mathrm{Im}w < 1\}$ の原像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002)　　(m20023304)

0.26 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n , $n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.27 関数 $f(z)$ は $z = a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする．

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z-a)^m f(z) \Big)$$

を証明せよ．ただし，C は $z = a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である．

(京都大 2002)　　(m20023306)

0.28 N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a} / n!$$

(1) ポアソン分布の平均値 $< n >= \sum_0^\infty np(N = n)$ が a となることを示せ．

(2) 面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L = l)$ は $p = A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L = l) = [M!/l!(M-l)!] p^l (1-p)^{M-l}$$

$a = (M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.29 任意の関数 $y = f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \log x \qquad (x > 0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする.

（京都大 2004）　　(m20043301)

0.30 以下の問に答えよ.

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ は独立変数 x だけを含む関数とする. この時次のような 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + c\right]$$

になることを証明せよ.

(2) 上記の関係式を使って次の 2 つの微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $\qquad 2x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x^2$

(b) $\qquad (1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = xy + 1$

(京都大 2004)　　(m20043302)

0.31 行列 A に対して, その行列式の値を $|A|$, その絶対値を $abs|A|$ と表記する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ と原点を通る直線の方程式を行列式を用いて表現せよ.

(3) 平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積 S は以下のように表現できることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} abs \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(京都大 2004)　　(m20043303)

0.32 有限のシンボル集合 $A = \{a_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, $\;B = \{b_j \mid j = 1, 2, \cdots, m\}$ を考え, 各シンボルの生起確率を $P(a_i)$, $P(b_j)$ とする. これらのシンボル集合に対して条件付き確率 $P(a_i/b_j)$, $P(b_j/a_i)$, 同時生起確率 $P(a_i, b_j)$ をもとにして, $H(A), H(B), H(A/B), H(A, B), I(A, B)$ を以下のように定義する.

$$H(A) = \sum_{i}^{n} P(a_i) \log \frac{1}{P(a_i)}$$

$$H(B) = \sum_{j}^{m} P(b_j) \log \frac{1}{P(b_j)}$$

$$H(A/B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i/b_j)}$$

$$H(A, B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i, b_j)}$$

$$I(A, B) = H(A) - H(A/B)$$

この時, 次の問に答えよ.

(1) $I(A, B) = \displaystyle\sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$ となることを示せ.

(2) $H(A, B) = H(A) + H(B) - I(A, B)$ となることを示せ.

(3) $I(A,B) \geq 0$ となることを示せ.

(京都大 2004)　　(m20043304)

0.33 $\boldsymbol{R}^3$ のデカルト座標を x, y, z とする．$x^2+y^2+z^2=1$ の拘束条件のもとで，関数 $f(x,y,z)=3x^2+2xy+2xz+4yz$ の最大値，最小値とそれらを与える (x,y,z) を求めよ.

(京都大 2006)　　(m20063301)

0.34 関数 $f(x), g(x)$ 区間 $[a,b]$ において連続で，かつ $g(x)>0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

をみたす ξ が区間 $[a,b]$ 内に存在することを示せ.

(京都大 2006)　　(m20063302)

0.35 ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n, p の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q=1-p$ として，次の二項定理を利用してよい．　$(px+q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である.

(1) 確率 b_k を記し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$ となることを示せ.

(2) 二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ.

(3) 事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す.

$$P(|r-\mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ.

(京都大 2006)　　(m20063303)

0.36 次のラプラスの積分を考える．　$I(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp[-x^2]\cos 2ax\, dx$　以下の問に答えよ.

(1) 平面の直角座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換公式を用いて，x^2+y^2 および $dxdy$ を極座標で表せ.

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ.

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる.

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.37 a を $-1<a<1$ なる実数とする．複素数 z に対して

$$w = \frac{z-ai}{1+aiz}$$

とおく．$i=\sqrt{-1}$ は複素単位．以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z \mid |z|=1\}$ 上を動くとき点 w はどのような図形を描くか.

(2) 複素数平面で点 z が単位円周 $C=\{z \mid |z|=1\}$ の内部にあるとき点 w はどのような領域にあるか図示せよ.

(京都大 2006)　　(m20063305)

0.38 C を複素数平面上の単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1 = \{z \mid |z| < 2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{f(z) - f(0)}{z} dz$ 　の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z}$ に対し，積分　$\phi(z) = \displaystyle\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 　で与えられる領域 $D_2 = \{z \mid |z| > 1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006)　　(m20063306)

0.39 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1}\ , \quad (|w| < 1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w = 0$ から $w = z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z = 0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi < \mathrm{Im}\log(1+z) \leq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = z\ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ 　を示せ．

(京都大 2006)　　(m20063307)

0.40 $x > 0$ に対して $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ と定義して，$\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい．(1)〜(2) に答えよ．

(1) 定積分の性質を用いて，等式 (a)〜(d) を示せ．

(a) $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2$ 　　$(x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log x$ 　　(m, n は正整数)

(c) $\log e = 1$ 　　$\left(e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき，以下の等式 (e)〜(h) を示せ．

(e) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$ 　　(m, n は正整数)

(h) $\dfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008)　　(m20083301)

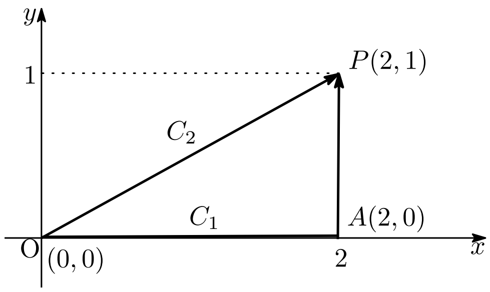
0.41 (x, y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x, y) = 2x + ay\ , \qquad G(x, y) = 2x + 5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} (Fdx + Gdy) \, , \qquad I_2 = \int_{C_2} (Fdx + Gdy)$$



(2) $F = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x,y)$ が存在するように定数 a を定めよ． また，そのときの $U(x,y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_{C} (Fdx + Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ．

(4) (2) の関数 $U(x,y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2 + y^2 = 1)$ でのその極値を考える．

(a) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ．

(b) 点 (x,y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx + Gdy = 0$ となる点において $U(x,y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ．

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x, y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.42 事象 X と事象 Y について，X と Y が両方とも生起するという事象を $X \cap Y$, X が生起しないという事象を $\overline{X}$ で表すことにする．事象 X と事象 Y が独立であれば，X と $\overline{Y}$ も独立である．事象 X が生起する確率を $P(X)$ と表し，X が生起したときに Y が生起する条件付確率を $P(Y|X)$ と表す．

泥棒が入るか，地震が発生するか，いずれかが生じると作動する警報機がある．この警報機は誤作動することもあるという．警報機が作動するという事象を A，泥棒が入るという事象を B, 地震が起こるという事象を E で表すとき，

$$P(A) = 0.36 \, , \qquad P(B) = 0.2 \, , \qquad P(E) = 0.1 \, ,$$
$$P(A|B \cap E) = 0.9 \, , \qquad P(A|B \cap \overline{E}) = 0.7 \, , \qquad P(A|\overline{B} \cap E) = 0.9$$

であることがわかっている．事象 B と E は独立に生起すると仮定したとき，(1)〜(3) に答えよ．

(1) 警報機が作動したときに泥棒が入った確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 警報機が誤作動する確率 $P(A|\overline{B} \cap \overline{E})$ を求めよ．

(3) 地震が発生したときに，必ずテレビでニュース速報が放送されるとする．ニュース速報が流れたという事象を R とするとき，　$P(R|E) = 1$,　$P(R|\overline{E}) = 0.1$　であるとする．
警報機が作動し，かつ，ニュース速報が流れたときに，泥棒が入った確率 $P(B|A \cap R)$ を求めよ．ただし，$A \cap B$ と $R \cap E$，$A \cap B$ と $R \cap \overline{E}$，$A \cap \overline{B}$ と $R \cap E$，$A \cap \overline{B}$ と $R \cap \overline{E}$ はそれぞれ独立とする．

(京都大 2008)　　(m20083303)

0.43　次の行列 A に対して，(1)〜(3) に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，I は 3 次の単位行列，$\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す．

(1) 行列 A の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda, \boldsymbol{p})$ の中で

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$AP = PB$ が成立するような上三角行列 B と正則行列 P を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n の各成分を n の式で表せ．

(京都大 2008)　　(m20083304)

0.44　関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta - \varepsilon} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx + \int_{\zeta + \varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

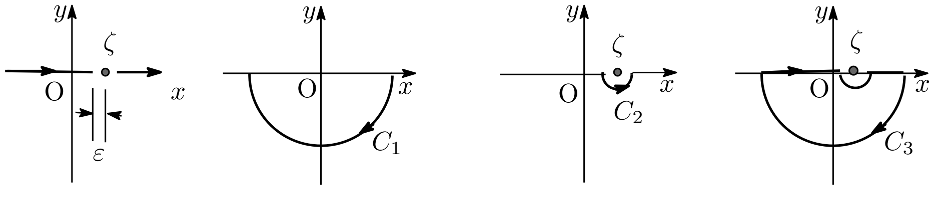


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.45 $f(z)$ が $z=a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}f(a+e^{i\theta})d\theta\ , \qquad n=1,2,\cdots$$

(京都大 2008)　　(m20083306)

0.46 t を実変数とし，複素数平面上において $z=-1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,dz$$

(京都大 2008)　　(m20083307)

0.47 複素数平面から実軸の $|x| \leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z \in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{z-t}$，　$z \in D$（t は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z|>1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z \in D$ と実軸上の区間 $[-1,1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h| \leq d/2$ なら，$|z+h-t| \geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z|>1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.48 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x,y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.49 正の整数 $k,\ N\ (1 \leq k \leq N)$ が与えられたとき，方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N \tag{1}$$

の正の整数解

$$\begin{cases} x_1 &= & m_1 \\ x_2 &= & m_2 \\ & \cdots & \\ x_k &= & m_k \end{cases} \tag{2}$$

の総数を求めるために，解 (2) に対して項数が $N-k$ であるような数列

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m_1-1\text{ 個}},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{m_2-1\text{ 個}},\cdots,\underbrace{k,k,\cdots,k}_{m_k-1\text{ 個}}$$

をつくる．ただし，$m_i = 1$ であるような i はこの数列の項にはならないとする．以下では，項数 M の数列 $a_1, a_2, \cdots, a_M$ を $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M}$ と表すことにして，(1)〜(4) に答えよ．なお，数列の項は全て正の整数とする．

(1) 数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M}$ が与えられたとき，新たな数列 $\left\{\overline{a}_n\right\}_{n=1}^{M}$ を

$$\overline{a}_n = a_n + n - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

と定義する．数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M}$ が正の整数 k に対して

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_M \leq k$$

を満たすとき，数列 $\left\{\overline{a}_n\right\}_{n=1}^{M}$ は

$$1 \leq \overline{a}_1 < \overline{a}_2 < \cdots < \overline{a}_M \leq k + M - 1 \tag{3}$$

を満たすことを示せ.

(2) 条件 (3) を満たすような数列 $\left\{\overline{a}_n\right\}_{n=1}^{M}$ の総数を求めよ.

(3) ２つの数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M}$ と $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{M}$ について，

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

であるとき，かつ，そのときに限り $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M} = \left\{b_n\right\}_{n=1}^{M}$ と表すことにする．このとき. $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{M} = \left\{b_n\right\}_{n=1}^{M}$ であれば $\left\{\overline{a}_n\right\}_{n=1}^{M} = \left\{\overline{b}_n\right\}_{n=1}^{M}$ であり，また，その逆も成り立つことを示せ.

(4) (1) から (3) の結果を利用して，方程式 (1) の正の整数解の総数を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093302)

0.50 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ.

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x \ \ \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x \ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ.

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は２次の単位行列をそれぞれ表す.

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ.

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \tag{④}$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ.

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.51　3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．２つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ.

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.52　x, y をデカルト座標とする R^2 において, 原点以外の点 P を原点 O のまわりに角度 θ だけ反時計回りに回転させた点を P_θ で表す. いま, P を x軸に関して線対称の位置に移した点を　P' とする. さらに, P' を直線 $ax + by = 0$ に関して線対称の位置に移した点を P'' とする. ただし, a, b は定数で, 同時にゼロとはならない. 位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_\theta}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_\theta$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ で表す. 以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}_\theta = R\boldsymbol{p}$ をみたす行列 R を見出せ.

(2) $\boldsymbol{p}' = M\boldsymbol{p}$ をみたす行列 M を見出せ.

(3) $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}$ をみたす行列 N を見出せ.

(4) $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_\theta$ が成り立つように, 直線 $ax + by = 0$ を定めよ.

(京都大 2010)　　(m20103301)

0.53　半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{C - A_n}{B_n - C}$ を求めよ．（3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい.）

(京都大 2010)　　(m20103302)

0.54　確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を $M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p * q(x)$ を

$p * q(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)〜(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}, \ \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010)　　(m20103303)

0.55 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda(0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda F(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle$ とおく. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す.

(1)〜(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(a) $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle$ は凸関数である.

(b) 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y},\ A\boldsymbol{y}\rangle \geq 2\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}\rangle$ が成り立つ.

(c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103304)

0.56 (1) 複素数 z が以下の式で表されるとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする.

$$z = \left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)^2 - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$$

(a) z を極形式で表せ.

(b) z^n が実数となる最小の正の整数 n と, そのときの z^n を求めよ.

(c) $\sqrt[3]{z}$ を求めよ.

(2) 次の関数 $f(z)$ の極を求め, それらの点における留数を求めよ.

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 - z^2}$$

(京都大 2010)　　(m20103305)

0.57 D を複素平面上の単連結な開集合とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で正則であり, D 上で零点を有しないとする. D 上の一点 z_0 において $\arg f(z_0)$ を定めることにより, 関数 $u(x,y) = \arg f(z)$ を D 上の連続関数として定めることができる. ここに, x, y は, それぞれ z の実部, 虚部である. このとき, $u(x,y)$ は D において調和関数であることを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103306)

0.58 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r>0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r)=\int_{C(r)}\frac{\overline{z}+1}{z+1}\,dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $0<r<1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r>1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 2010) (m20103307)

0.59 複素関数

$$g(z)=\frac{1}{e^{iz}-1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0<|z|<a$ において

$$g(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_nz^n\ ,\qquad c_n\in\mathbb{C}\qquad (n=m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots)\ ,\qquad c_m\neq 0\ ,\qquad m\in\mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 $c_m,\ c_{m+1},\ c_{m+2}$ を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100}g(z)\,dz$$

(京都大 2010) (m20103308)

0.60 (1) 2 以上 17 以下のすべての素数 n に対して, n^2+2 の値を求めよ.

(2) 2 以上の自然数 n で, n と n^2+2 がともに素数になるものをすべて求めよ.

(京都大 2012) (m20123301)

0.61 数列 $\{a_n\}$ を $\quad a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)\quad (n=1,2,3,\cdots)$
によって定めるとき, 次の (1)〜(3) に答えよ.

(1) $n\geqq 1$ であるすべての n に対して, $a_n>\sqrt{3}$ であることを証明せよ.

(2) $n\geqq 1$ であるすべての n に対して, $a_{n+1}-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}\bigl(a_n-\sqrt{3}\bigr)$ であることを証明せよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$ であることを証明せよ.

(京都大 2012) (m20123302)

0.62 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $\quad x=r(t-\sin t),\ y=r(1-\cos t)\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$
で与えられている. ここで, r は正の定数とする. このとき, 次の (1)〜(3) に答えよ.

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ.

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して, P における C の法線と x 軸との交点を考え, その座標を $(a,0)$ とする. P を動かすとき, P における C の接線と直線 $x=a$ との交点は, どのような図形を描くか.

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.63 A を n 次の正方行列とし，$E+A$ が正則行列であるとする．ここで，E は単位行列である．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 等式 $(E-A)(E+A)^{-1}=(E+A)^{-1}(E-A)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $E+{}^tA$ は正則であることを示し，逆行列 $(E+{}^tA)^{-1}$ を，$(E+A)^{-1}$ を使って表せ．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(3) A が交代行列（つまり，${}^tA=-A$）ならば，$(E-A)(E+A)^{-1}$ は直交行列であることを証明せよ．ただし，ある行列 B が直交行列であるとは，${}^tB\,B=B\,{}^tB=E$ であることをいう．

(京都大 2012)　　(m20123304)

0.64 患者が薬を服用すると，薬はすべて直ちに血流中に吸収され，それ以降，時間の経過とともに，血流中の薬の量は減少する．「単位時間に減少する薬の量は，その薬の血流中の現在量に比例する」ものとしよう．

薬の服用に関する次の問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) 時刻 t における血流中の薬の量を $y(t)$ と表し，患者が時刻 $t=0$ に，はじめて一度だけ，この薬を y_0 服用したとする．

(a) 薬の量 $y(t)$ が満たすべき微分方程式が，$y'(t)+\lambda y(t)=0$（λ は比例定数）で表されることを示せ．

(b) $y(0)=y_0$ として，(a) の微分方程式を解け．

(c) 血流中の薬の量が，時刻 $t=0$ に服用した薬の量の $\dfrac{1}{n}$（n は正定数）になる時刻を求めよ．

(2) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて y_0 服用し，その後も，同一量 y_0 を一定の時間間隔 T で繰り返し服用していくものとしよう．

(a) 毎回の服用直後，すなわち，時刻 $t=mT$（m は非負整数）での服用直後の血流中の薬の量を求めよ．

(b) m が大きくなると，服用直後の血流中の薬の量は，ある飽和レベル量 y_s に達する．この y_s を求めよ．

(3) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて Y 服用し， その後は，一定の時間間隔 T 毎に y_d を服用していくものとしよう． 2 回目以降の服用直後の血流中の薬の量が Y となるようにするには， 2 回目以降の毎回の服用量 y_d をいくらにすれば良いか．

(京都大 2013)　　(m20133301)

0.65 スマートフォン業界のシェア争いを考える，A 社，B 社の 2 社が熾烈なシェア争いをしている．ある年 k 年（k は非負整数）の各社のシェアがそれぞれ a_k% ，b_k% $(a_k+b_k=100)$ とする． 翌年（$k+1$ 年）の各社のシェアは，

$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_k$ で与えられるものとする．

$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix}$ として，次の問 (1)〜(2) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ とする．

(a) $\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．

(c) $n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(2) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ とする．$n \to \infty$ の場合の各社のシェアを求めよ．

(京都大 2013)　　(m20133302)

0.66 数直線上を動く点 A，点 B がある．点 A は，1 回サイコロを振る毎に，サイコロの目が 1 から 4 のとき $+1$，5 または 6 のとき -1 だけ移動する．n 回サイコロを振ったときの点 A の位置を $\boldsymbol{x}_A(n)$ とし，最初に点 A は，$\boldsymbol{x}_A(0) = a$（a は任意の整数）にあるものとする．

このとき以下の問 (1)～(3) に答えよ

(1) サイコロを 3 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(3)$ のとり得る値を全て示し，それぞれの確率を求めよ．

(2) サイコロを n 回振ったとき，点 A の位置 $\boldsymbol{x}_A(n)$ の期待値を求めよ．

(3) サイコロを n 回振ったときの点 B の位置を $\boldsymbol{x}_B(n)$ で表す．
点 A，点 B の位置が常に $\boldsymbol{x}_A(n) + \boldsymbol{x}_B(n) = M$ の関係にあるものとする．
点 A の最初の位置 $\boldsymbol{x}_A(0) = a$ が，$1 \leq a \leq M-1$ に限定されるとして，点 A か点 B の位置が M になるまでサイコロを振り続けるとき，点 A の位置が先に M になる確率を a と M を用いて表せ．ただし，M は正の整数（図 $3-1$ 参照）．

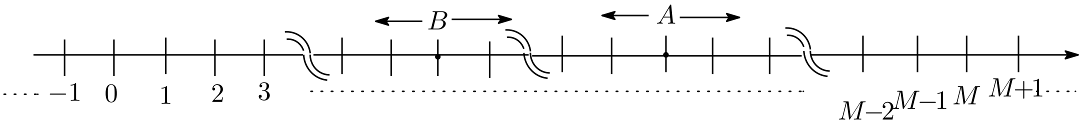


図 $3-1$

(京都大 2013)　　(m20133303)

0.67 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)～(2) に答えよ．なお，図 $4-1$ に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 $4-1$，$4-2$）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1 = d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

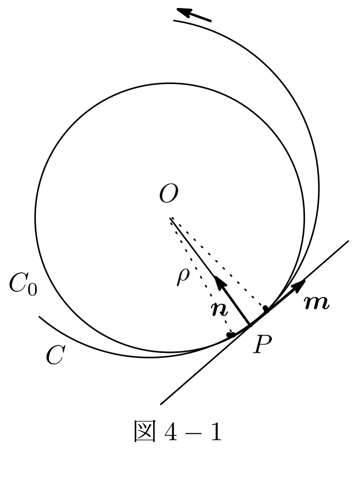


図 $4-1$

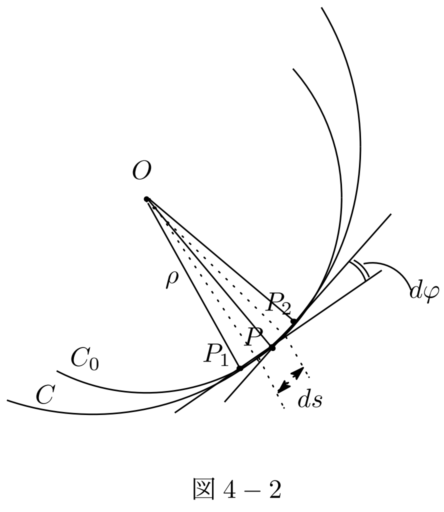


図 $4-2$

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が,

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$ （b, c は正の定数）

で表されるとき, P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$, および, 加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を, P の軌跡における, 単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ.

(京都大 2013) (m20133304)

0.68 次の微分方程式について, (　　) 内の初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $2y\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x$ 　($x = 1$ のとき $y = 0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ay + \dfrac{b}{y}$ 　($x = 0$ のとき $y = 1$) 　ただし, a, b は定数で $a \neq 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)\tan x$ 　($x = 0$ のとき $y = 2$)

(京都大 2014) (m20143301)

0.69 $t > 0$ で, 次の微分方程式を満たし, (　　) 内の初期条件を満たす関数 $x = x(t)$ を求めよ.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1 + |x|}$ 　($t = 0$ のとき $x = -1$)

(京都大 2014) (m20143302)

0.70 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とする. 次の問に答えよ.

(1) この線形変換 f によって動かない点をすべて求めよ.

(2) この線形変換 f によって動かない直線をすべて求めよ.

(京都大 2014) (m20143303)

0.71 直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して, $O'(1,\ 1,\ 1)$, $e_x{}' = {}^t\!\left(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\right)$, $e_y{}' = {}^t\!\left(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\right)$, $e_z{}' = {}^t\!\left(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) 新座標系 $\Gamma' = \{O' \ :\ e_x{}',\ e_y{}',\ e_z{}'\}$ も直交座標系であることを示し, かつ座標変換 $\Gamma \to \Gamma'$ の式を求めよ.

(2) 座標系 Γ における方程式が $x+y+z = 6$ である平面 π の, 新座標系 Γ' における方程式を求めよ.

(3) 座標系 Γ における方程式が, $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の, 新座標系 Γ' における方程式が, $\dfrac{x' - \boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}} = \dfrac{y' - \boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}} = z'$ になるとき, $\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ.

(京都大 2014) (m20143304)

0.72 異なる 4 つの数が与えられている. これらを各々4 回ずつ用いて 4 × 4 行列 a_{ij} $(i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3,4)$ をつくる. すべての可能な行列がつくられる確率が等しいとき, 次の問に答えよ.

(1) 得られた行列のすべての行が, それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ.

(2) 得られた行列のすべての行, すべての列, 及び対角成分（すなわち a_{ii} $(i = 1,2,3,4)$）が, それぞれ異なる 4 つの数から成っている確率を求めよ.

(京都大 2014) (m20143305)

0.73 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える．

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする．

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ．

(2) $a = 2,\ b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ．

(3) $a = 2,\ b = 1$ のとき，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.74 次の微分方程式について，(　) 内の条件を満たす解を求めよ．

(1) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$　　($x = 0$ のとき $y = 2$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{y}$　　($x = 1$ のとき $y = 1$)

(京都大 2015)　　(m20153301)

0.75 次の文章の（あ）〜（え）に適当な数式を入れよ．

ある容積 V の室内の空気には粒子状の汚染物が含まれており，換気を行って汚染物の濃度（単位体積あたりの粒子数）を下げることにした．時刻 t における濃度を $C(t)$ とし，単位時間あたり一定の体積 Q の室内の空気を，汚染物が含まない空気に入れ換えるとすれば，時刻 t から微小時間 δt 後の時刻 $t + \delta t$ までの間に排出される粒子数は $\boxed{\text{（あ）}}$ となる．その結果，濃度は $C(t)$ から $C(t + \delta t)$ に変化した．ただし，室内の濃度は常に空間的に一様であり，換気を開始してからの汚染物の発生はなかったものとする．上記の関係を式で表すと

$$C(t + \delta t) = \boxed{\text{（い）}}$$

である．$\delta t \to 0$ の極限を考えることにより，濃度 $C(t)$ に関する微分方程式

$$\boxed{\text{（う）}}$$

を得る．この微分方程式の解は

$$C(t) = \boxed{\text{（え）}}$$

である．ただし，換気を開始した瞬間を時刻 $t = 0$ とし，その時の濃度を C_0 とする．

(京都大 2015)　　(m20153302)

0.76 ある部屋の照明器具を n 台 $(n \geq 1)$ 同時に設置した．この照明器具は，1 台の器具について 1 個のランプを使用する．これらの照明器具については，設置後 1 年ごとに定期点検を行い，正常に作動しているランプはそのまま使い続け，ランプに故障が発見されれば正常に作動する新品と交換することにしている．また，定期点検の間で故障しても，ランプは次の定期点検まで交換しないものとする．更に，照明器具本体は故障しないものとし，照明器具を設置したときはすべてのランプが正常に作動する新品であったものとする．定期点検時に正常に作動していたのでそのまま使い続けたランプが次の定期点検時に故障している確率を $P_{old}\,(P_{old} < 1)$，照明器具設置時や定期点検でのランプ交換時に取り付けた新品のランプが次の定期点検時に故障している確率を $P_{new}\,(P_{new} < 1)$ とする．このとき，(1)〜(4) に答えよ．

(1) この部屋にある 1 台の照明器具について，設置後 m 年目 $(m \geq 1)$ の定期点検でこの照明器具のランプが故障している確率 P_m を求めよ.

(2) (1) の照明器具に対して，この維持管理を長期間続けると P_m は一定値 $\overline{P}$ に近づくという. $\overline{P}$ を P_{new}，P_{old} を用いて表せ.

(3) 十分長期間にわたって照明器具の維持管理を行った結果，この部屋に設置されている n 台の照明器具のそれぞれの P_m は，$m > M$ に対しては (2) で求めた一定値 $\overline{P}$ に等しいとみなしてよいものとする．ここに，M はある正の整数である．これら n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目 $(\ell \geq 1)$ までの定期点検で取り替えたランプの個数の合計がちょうど i 個 $(i \geq 0)$ である確率を求めよ．なお，解答は $\overline{P}$ を用いてもよい.

(4) (3) の n 台の照明器具について，設置後 $M+1$ 年目から $M+\ell$ 年目までの定期点検で取り替えるランプの個数の合計の期待値を求めよ.

(京都大 2015)　　(m20153303)

0.77 A, B, C, D は各々$n\times\ n$ 実行列であり，D は正則であるとする．また，M は

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

として定義する $2n\times\ 2n$ 実行列である．M が正則であるとき，次の (1)〜(3) に答えよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
を満たす $n\times\ n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ．ここに，I は $n\times\ n$ 単位行列，0 は $n\times\ n$ ゼロ行列である.

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ.

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ.

(京都大 2015)　　(m20153304)

0.78 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ.

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け.

(3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ.

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\le\theta\le\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x}\in\displaystyle\bigcup_{0\le\theta\le\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0\le\theta_0\le\pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x}\in\Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.79 地球の人口変化を微分方程式で表す．(1)〜(3) に答えよ．

(1) ある時刻 t における人口を $P(t)$ とし，その時の人口増加率（単位時間あたりに増加する人口）は人口に比例すると仮定すれば，次式が成り立つ．

$$\frac{dP}{dt}=aP \qquad ①$$

ただし，a は正の定数である．時刻 0 における人口を $P_0\ (>0)$，すなわち $P(0)=P_0$ とおいて，式 ① を解いて P を求めよ．

(2) 式 ① に従うと人口は単調増加することになるが，現実の地球の人口収容力には限界がある．収容できる限界の人口 $P_{\max}$ に近づくと人口増加が鈍化することを表すため，人口増加率を $(1-P/P_{\max})$ 倍する．

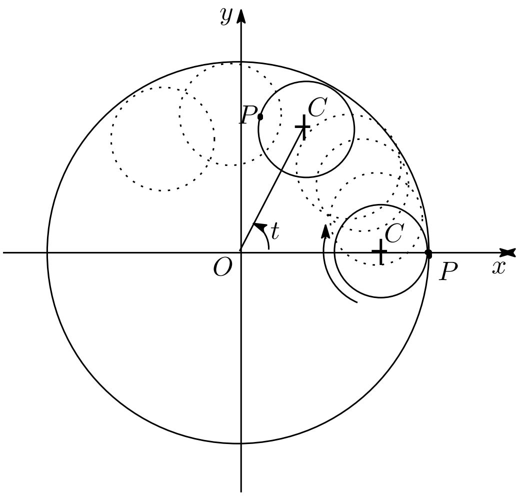
$$\frac{dP}{dt}=a\left(1-\frac{P}{P_{\max}}\right)P \qquad ②$$

これを解いて P を求めよ．ただし，a と P_0 は (1) と同じとする．

(3) (1) と (2) の解の概形を解答用紙の所定欄に図示せよ．

(京都大 2016)　　(m20163301)

0.80 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり， 初期状態において座標 $(a,0)$ にある点 P で大円に内接している． 小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する． 点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする． このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき， 点 P の座標 (x_p,y_p) を t で表せ，ただし，$0<t<\pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0<t<\pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.81 あるスポーツチームの試合結果は「勝ち」,「負け」,「引き分け」のいずれかとする．また，

- ある試合に勝った場合，次の試合に勝つ確率は 7/10，負ける確率は 3/10
- ある試合に負けた場合，次の試合に勝つ確率は 6/10，負ける確率は 4/10
- ある試合に引き分けた場合，次の試合に勝つ確率は 1/3，負ける確率は 1/3，
  引き分ける確率は 1/3

である．次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 最初の試合に引き分けた場合，3 試合目に勝つ確率を求めよ．

(2) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に勝つ確率を求めよ．

(3) 最初の試合に引き分けた場合，$n(\geq 2)$ 試合目に初めて勝つ確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163303)

0.82 表が出る確率が p．裏が出る確率が $(1-p)$ の硬貨を投げ，表が出れば得点が 1 点増え，裏が出れば得点が 1 点減るゲームをする．硬貨を t 回投げた後の得点を Z_t 点とするとき，次の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$Z_0 = 0$ とする．

(1) $Z_3 = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $Z_3 = 1$ かつ $Z_7 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $Z_t = k$ となる確率を求めよ．ただし，$-t \leq k \leq t$ とする．

(4) 硬貨を t 回投げたとき，表が偶数回出る確率を求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163304)

0.83 微分方程式 $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ の一般解が，$y^2 = Cx$（C は任意定数）であることを示せ．次に，条件（$x = 1$ のとき $y = 3$）を満たす微分方程式の解を求めよ．

(京都大 2017)　　(m20173301)

0.84 次の微分方程式について，(　) 内の条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$　（$x = 0$ のとき $y = 3$）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7x - 3y + 2}{3x - 4y + 5}$　（$x = 0$ のとき $y = 1$）

(3) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$　（$x = 0$ のとき $y = 3$）

(京都大 2017)　　(m20173302)

0.85 (1) 625 のすべての約数の和を求めよ．一般に，自然数 n の約数には 1 と n も含まれることに注意せよ．

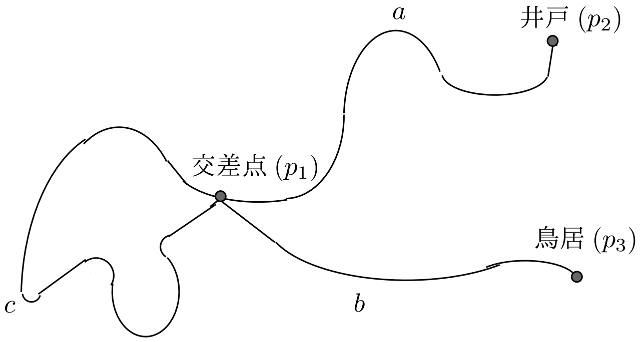
(2) 25200 の約数の個数を求めよ．

(3) 25200 のすべての約数の和を求めよ．

(4) 25200 の約数のうち一つを無作為に選択した場合，それが 84 の倍数である確率を求めよ．

(京都大 2017)　　(m20173303)

0.86



上の図はある村の略図を表す．この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)，井戸 (p_2)，鳥居 (p_3) がある．p_1 と p_2 は道 a で結ばれており，p_1 と p_3 は道 b で結ばれている．また，p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる．道 a, b, c の長さはいずれも 1 とする．

二つの場所 x と y があるとき（ただし，このとき一般に $x = y$ の場合も許す），x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする．場所 x から場所 y に至る経路は，場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる．また，ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ．たとえば，p_2 から道 a を通り p_1 に移動し，さらに道 b を通って p_3 に至る経路は．記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ b,\ p_3)$ で表すことができ，この経路の長さは 2 である．また，記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ c,\ p_1,\ a,\ p_2)$ は長さ 3 の経路を表す．後者の例のように，経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い．

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として，直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより，この村の場所と道は，次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる．この行列を隣接行列と呼ぶ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は，p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す．たとえば，第 1 行第 1 列成分の値 3 は，p_1 から p_2 に到達する $(p_1,\ c,\ p_1,\ c,\ p_1)$，$(p_1,\ a,\ p_2,\ a,\ p_1)$，$(p_1,\ b,\ p_3,\ b,\ p_1)$ という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す．

問 1〜問 3 に答えよ．

(1) A^3 を求めよ．

(2) A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ．

(3) A^n を求めよ．（ n は 1 以上の自然数である．）

(京都大 2017)　　(m20173304)

0.87 次の定積分の値を求めよ．（ただし，e は自然対数の底）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-1}{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$

(京都大 2017)　　(m20173305)

0.88 $a < b$ として，区間 $[a,\ b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x \mapsto f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)\ , \quad a < c < b$$

となる c が存在することを示せ.

(京都大 2017)　　(m20173306)

0.89 次の定積分の値を求めよ.

(イ) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{3dx}{x^2+3}$

(京都大 2018)　　(m20183301)

0.90 次の三角関数または指数関数を含む定積分の値を求めよ.（ただし，e は自然対数の底）

(イ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^3 x}{1+\sin x}dx$　　(ロ) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{7e^x}{e^x+1}dx$

(京都大 2018)　　(m20183302)

0.91 e_1, e_2 を，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 θ は $0<\theta<\pi/2$ をみたすものとする．e_1 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_1，e_2 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_2 とし，$\mathbb{R}^n$ から L_1, L_2 への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ P_1, P_2 とする．問 1 〜問 4 に答えよ.

問 1 P_1 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 2 P_1+P_2 の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 3 P_1-P_2 は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ.

問 4 P_1-P_2 の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha=\pi/4-\theta/2$ であることを示せ.

(京都大 2018)　　(m20183303)

0.92 次の三角関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ.

(イ) $x\tan\dfrac{y}{x}-y+x\dfrac{dy}{dx}=0$　　(ロ) $\left(\tan y-6x^2\right)dx+\dfrac{x}{\cos^2 y}dy=0$

(京都大 2018)　　(m20183304)

0.93 次の指数関数を含む微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ.

(イ) $\dfrac{dy}{dx}+e^x y=7e^x$　　(ロ) $(y+e^x\sin y)\,dx+(x+e^x\cos y)\,dy=0$

(京都大 2018)　　(m20183305)

0.94 n を 2 以上の整数，m を 0 以上 n 以下の整数とする．　テーブルの上に置かれた n 枚の硬貨に対して，以下の試行 T を考える.

試行 T：n 枚の硬貨から 2 枚を無作為に選び，選んだ 2 枚の表裏を反転させる.

(1) n 枚の硬貨のうち m 枚が表を上にしているとき，試行 T によって選ばれた硬貨が 2 枚とも表から裏に反転させる確率を求めよ.

(2) n 枚の硬貨のうち m 枚が表を上にしているとき，試行 T ののちに表を上にしている硬貨の枚数の期待値を求めよ.

(3) n 枚の硬貨がすべて裏を上にしている状態から始め，試行 T を k 回繰り返したのちに表を上にしている硬貨の枚数をあらわす確率変数を X_k とおく．X_k の期待値 a_k $(k=0,1,2,\cdots)$ を求めよ.

(京都大 2018)　　(m20183306)

0.95　次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

（京都大 2019）　　(m20193301)

0.96　x_1〜x_3 を変数とする次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（京都大 2019）　　(m20193302)

0.97　次の行列の行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（n 次の正方行列，ただし n は 2 以上の自然数）

（京都大 2019）　　(m20193303)

0.98　次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ．

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ．

（京都大 2019）　　(m20193304)

0.99 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を T とおく．すなわち，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間を表す．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の次元を求めよ．

(2) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の基底を 1 組作れ．

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり，次のように定められる．

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

(4) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を 1 組作れ．

(京都大 2019)　　(m20193305)

0.100 (1) 赤玉 2 個，白玉 2 個を入れた袋から，無作為に玉を 2 個取り出したとき，取り出した玉が同じ色である確率を求めよ．

(2) n, k を自然数とする．1 から n までの番号が書かれた玉をそれぞれ k 個ずつ，合計 nk 個の玉を入れた袋から，無作為に玉を k 個取り出したとき，取り出した k 個の玉に書かれた番号がすべて同じである確率を求めよ．

(3) (2) と同じ袋から，無作為に玉を n 個取り出したとき，取り出した n 個の玉に書かれた番号がすべて相異なる確率を求めよ．

(京都大 2019)　　(m20193306)

0.101 (1) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．

（イ）$\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y - 6$

（ロ）$\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

（ハ）$\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(3y - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0$

(2) 次の微分方程式の一般解を，定数 C を用いて求めよ．
なお，積分因子は $\sin x$ である．

$$(2\sin y \cos x - 2)\, dx + \cos y \sin x \, dy = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

(京都大 2022)　　(m20223301)

0.102 (1) 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 上記の行列において $a = 1$ の場合の行列式の値を求めよ．

(3) x_1〜x_4 を変数とする　次の連立方程式を解け．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(京都大 2022)　　(m20223302)

0.103 (1) 次の積分の値を求めよ.

(イ) $\displaystyle\int_e^3 x^2 \log_e x \, dx$ (ロ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx$ (ハ) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{4x^2+1} dx$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

(イ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ (ロ) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \log_e(1+x^2) \, dx$

(京都大 2022) (m20223303)