[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：九州大

0.1 $f(x,y,z)=\dfrac{e^{kr}}{r}$,　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

の時，次の問に答えよ（ここで k は定数である）.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) ラプラシアン $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

(九州大 1996)　(m19964701)

0.2 $V: x^2+y^2+z^2\le a^2$, $(a>1)$ において，次の積分を求めよ.

(1) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(2) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$$

(九州大 1996)　(m19964702)

0.3 文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次式の全体を H_n とする，即ち

$H_n=\{f: x$ と y に関する多項式 $|$ 任意の定数 a に対して $f(ax,ay)=a^n f(x,y)\}$

(1) H_n は線形空間（ベクトル空間）になることを示せ.

(2) H_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次対称式の全体を S_n とする，即ち

$$S_n=\{f\in H_n \mid f(x,y)=f(y,x)\}$$

(1) S_n は線形空間になることを示せ.

(2) S_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

（一般の n でやる前に $n=1,\cdots,6$ の場合にやってみよ.）

(九州大 1996)　(m19964703)

0.4 $P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$,　$-1\leq x\leq 1$, $n=0,1,2,3,\cdots$ と定義する．このとき次の問に答えよ.

(1) $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を計算して求めよ.

(2) 任意の $0\leq k\leq n$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_{n+1}(x)\,dx=0$ を示せ.

(3) 任意の n 次多項式 $Q(x)$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_{n+1}(x)\,dx=0$ を示せ.

(4) $P_n(1)$ の値を計算せよ.

(九州大 1997)　(m19974701)

$\{a_n\}$ を数列とする.

0.5 (1) $\lim_{n\to+\infty} a_n=a$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=a$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=a$ であっても $\lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在するとは限らないことを反例によって示せ.

(九州大 1997)　(m19974702)

0.6 (1) 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x+y\leq 1\ ,\ \ 0\leq x-y\leq 1\}$ を座標平面に図示せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{1+x+y}\,dx\,dy$ の値を計算せよ．

(九州大 1997)　　(m19974703)

0.7 a , b , c を実定数とするとき

$$Q=Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2\ \ ,\quad -\infty<x,y<+\infty$$

について，次の問に答えよ．

(1) $Q=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ．

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ ならば $Q<0$ となる a , b , c の条件を求めよ．

(3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ．

(九州大 1997)　　(m19974704)

0.8 線形写像 $T:R^4\to R^2$ について

$$\mathrm{Ker}\ T=\{\ x\in R^4\mid T(x)=0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T=\{\ T(x)\mid x\in R^4\ \}$$

と定義する． T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T=\left\{\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\ \middle|\ x_1+2x_3=x_2-x_4=0\ \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T=R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ．

(1) Ker T の基底を 1 組求めよ．

(2) 上で求めた Ker T の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ．

(3) $T(x)=Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ．

(4) 上の A について rank A を求めよ．

(九州大 1997)　　(m19974705)

0.9 関数 $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}$ について次の問に答えよ．

(1) $-1<x<1$ における $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $f(x)$ は $-1<x<1$ では最大値を持たないことを説明せよ．

(九州大 1998)　　(m19984701)

0.10 不定積分 $\displaystyle\int te^{-t^2}dt$ を求めよ．

(九州大 1998)　　(m19984702)

0.11 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし，$f_y\neq 0$ となる点の近くで $f(x,y)=0$ により定義される関数を $y=\varphi(x)$ とする．そのとき，

(a) $\varphi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表せ．

(b) $\varphi'(x)=0$ となる点での $\varphi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表せ．

(2) 曲線 $C: f(x,y)=xy+y^2-x^3=0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め，極大か極小かを判定せよ．

(九州大 1998)　　(m19984703)

0.12 次の関数の極値を求めよ． $f(x,y)=x^3-6xy+8y^3$

(九州大 1998)　　(m19984704)

0.13 重積分 $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)e^{-(x+y)^2}\,dx\,dy$ の値を求めよ．
ただし， $D=\{\,(x,y)\mid 0\leq y-x\leq y+x<+\infty\,\}$ である．

(九州大 1998)　　(m19984705)

0.14 次の各問いに答えよ．

(1) $z(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dt^2}+mz=0$ の一般解を求めよ．ただし，m は正定数とする．

(2) 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2x-y=0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-x+2y=0 \end{cases}$ の解を求めたい．そのため，この微分方程式に一次変換 $\begin{cases} x=x_1+x_2 \\ y=ax_1+bx_2 \end{cases}$ を施す．x_1 に関する方程式が x_2 を含まないように，x_2 に関する方程式が x_1 を含まないようにするための a, b の値を求めよ．ただし，$a\neq b$ とする．

(3) x_1, x_2 の一般解を用いて，初期条件 $t=0$ で，$x=2$, $\dfrac{dx}{dt}=0$, $y=0$, $\dfrac{dy}{dt}=0$ のときの解 x, y を求めよ．

(九州大 1998)　　(m19984706)

0.15 正則行列 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} の $(2,3)$ 要素を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) $A^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}$ を満たす a,b,c の各値を求めよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(4) $A^n(2,2)+A^n(3,2)$ を n,b,c を用いて表せ．ただし，$A^n(i,j)$ は行列 A^n の (i,j) 要素を表し，n は 1 以上の整数とする．

(九州大 1998)　　(m19984707)

0.16 a_1 , a_2 , a_3 は一次独立なベクトルとする．

(1) 次は一次独立であるか．

(a) $b_1=a_1+a_3$, $b_2=-a_1+a_2-2a_3$, $b_3=2a_1+a_2+a_3$

(b) $c_1=a_1+a_2+a_3$, $c_2=a_1-2a_2+a_3$, $c_3=a_1+a_2-a_3$

(2) a_1 , a_2 , a_3 を正規直交基底とするとき，(1) の (a) で与えられる b_1 , b_2 , b_3 によって張られる空間 W の正規直交基底を a_1 , a_2 , a_3 を用いてつくれ．

(九州大 1998)　　(m19984708)

0.17 次の 4×4 型行列 A と， $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ について，以下の問に答えよ．ただし，行列 A の成分 a は実数の定数である．

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) x_1 , x_2 , x_3 , x_4 を未知数とする方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が自明でない解を持つための a の条件を求めよ．

(3) 次の集合は $\mathbf{R}^4$ の部分線形空間となることを証明せよ．

$$V=\{\,\mathbf{x}\mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\,\}\ ,\quad W=\{\,A\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in\mathbf{R}^4\,\}$$

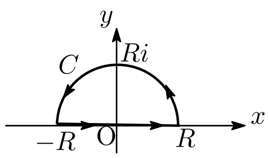
(九州大 1998）　(m19984709)

0.18 次の各問に答えよ．

(1) 次の問に答えよ．

(a) $z^4+\alpha^2=0$ を満たす複素数 z を求めよ．ただし，$\alpha>0$ とする．

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1+z^4}dz$ の値を求めよ．ただし，C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R>1$ とする．



(2) $u(x,y)=x^2+\alpha xy+\beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x,y)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位であり，$z=x+yi$，また，α,β は定数とする．

(九州大 1998)　(m19984710)

0.19 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ，また，導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ．

(九州大 1999）　(m19994701)

0.20 曲線 $f(x)=(e^x+e^{-x})/2$ に関して以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減を調べグラフを描け．

(2) 区間 $[\alpha,\alpha+1]$ の曲線の長さ $h(\alpha)$ を求めよ．

(3) $h(\alpha)$ の最小値を求めよ．

(九州大 1999)　(m19994702)

0.21 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \qquad (0\leq\theta\leq\pi\ ,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\ ,\ r\geq 0)$ 　とする．

(1) ヤコビヤンが $r^2\sin\theta$ になることを示せ．

(2) $D\ :\ \{x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \qquad x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0\ ,\ z \geqq 0\ \}$
D は半径 R の球の $\dfrac{1}{8}$ である．このときの

$$\iiint_D xy\,dx\,dy\,dz$$

を求めよ．　(九州大 1999）　(m19994703)

0.22 次の連立微分方程式がある．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = y(t) - t^2 - 4 \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = -x(t) - t^2 \end{cases}$$

ただし，$x(1) = -1, y(1) = 1$ である．

(1) 上の連立微分方程式より $y(t)$ を消去し，$x(t)$ に関する微分方程式を導け．

(2) $x(t),\ y(t)$ を求めよ．

(九州大 1999)　(m19994704)

0.23 つぶれていない四面体には 4 個の頂点がある．各頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) $(1 \leqq i \leqq 4)$ とする．四面体内（表面を含む）の任意の点 P の座標を (x, y, z) で表すとき，

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \qquad (*)$$

で表せる関数 $u(x, y, z)$ を考える．ただし，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ は定数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 4 個に頂点における関数値 u_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を既知とするとき，α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を決定する連立 1 次方程式を求めよ．

(2) 直前に求めた連立 1 次方程式で α_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ を求め，それを $(*)$ 式に代入した結果を

$$u(x, y, z) = \sum L_i(x, y, z) u_i \qquad (**)$$

と表す．ただし，$\sum$ は $i = 1$ から 4 までの総和を表し，$L_i(x, y, z)$ は次式で与えられる．

$$L_i(x, y, z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \qquad (***)$$

(a) $L_i(x, y, z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の各頂点における関数値を求めよ．

(b) $L_i(x, y, z)$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ の四面体の 6 個の辺の各中点における関数値を求めよ．

(c) $(***)$ 式の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の 5 個の行列式 (A, B, C, D, E) を用いて表現せよ．その際，i が 1 から 4 まで動いたときの j, k, l のとる値を明示せよ．

$$A = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(九州大 1999)　(m19994705)

0.24 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と重複度を求めよ．

(2) 直交行列を使って A を対角化せよ．

(九州大 1999） (m19994706)

0.25 次の各問いに答えよ．

(1) $f(z)$ は単位円 $|z| \leqq 1$ で正則で，円周 $|z| = 1$ 上で $|f(z)| \leqq M$ を満たす． コーシーの積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-a} dz, \qquad (|a| < 1)$$

を用いて，$|f(0)| \leqq M$ を示せ．

(2) $g(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ は円周 $|z| = 1$ 上で $|g(z)| = 1$ を満たすことを示せ．

(3) この $g(z)$ との合成関数を用いることにより，上の (1) の条件を満たす関数 $f(z)$ は単位円内のすべての点で $|f(z)| \leqq M$ を満たすことを示せ．

(九州大 1999) (m19994707)

0.26 xy 平面上の点 (x, y) と，uv 平面上の点 (u, v) との間に

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

という対応関係がある．このとき，xy 平面上の 3 点 $A(0, 0), B(1, 0), C(1, \frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を，上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として，次の問いに答えよ．

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ．

(2) 図形 P の面積を求めよ．

(九州大 2000) (m20004701)

0.27 連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} & = & -x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} & = & x(t) - ay(t) \end{cases}$$

に関して以下の問いに答えよ．ただし，$x(0) = 1$, $y(0) = 0$ とし，a は正の定数とする．

(1) $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を最大にする t の値とその最大値を求めよ．

(九州大 2000) (m20004702)

0.28 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z - a| = r$ (r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^n}$$

を $n = 1, n = 2, n = 3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\displaystyle\oint_C \frac{3z^2-4z}{(z-1)^3}dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z-1|=2$ とする．

(九州大 2000)　　(m20004703)

0.29 1つのさいころを続けて振るとき，以下の問いに答えよ．

(1) k 回目に初めて1の目が出る確率 p_k $(k=1,2,\cdots)$ を求めよ．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ を求めよ．

(2) k 回目に2度目の1の目が出る確率 q_k $(k=2,3,\cdots)$ を求めよ．

(九州大 2000)　　(m20004704)

0.30 次の積分の計算をしなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\log(1+\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt$

(九州大 2001)　　(m20014701)

0.31 次の積分の計算をしなさい．

$$\iint_D (x^2+y^2)^{1/4}dxdy,\quad \text{ただし，} D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leq 4\}.$$

(九州大 2001)　　(m20014702)

0.32 $x(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+20\dfrac{dx}{dt}+\alpha x=0$ について考える．ただし，$\alpha>0$ であるとする．

(1) $\alpha=64$ とし，初期条件を $t=0$ で $x=1$，$\dfrac{dx}{dt}=8$ としたときの微分方程式の解を求めよ．

(2) $t=0$ で，$x=1$，$\dfrac{dx}{dt}=-15$ であるとする．このとき，常に $x(t)>0$ が成り立つような α の範囲を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014703)

0.33 a,b,c を実数とし $ac\neq 0$ とする．$xyz-$ 空間において，3点 $A(a,0,0), B(b,c,0), C(0,0,1)$ を通る平面の方程式を $z=f(x,y)$ とする．次の設問に答えなさい．

(1) 関数 $f(x,y)$ を a,b,c を使って表しなさい．

(2) (x,y) が単位円周 $S=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2=1\}$ を動くとき，関数 $f(x,y)$ が最大値をとる点を $P\in S$ とし，原点を O とすると，2直線 OP と AB が互いに直交することを示しなさい．

(九州大 2001)　　(m20014704)

0.34 行列 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数であるとする．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) 行列の列 $A,\ A^2,\ A^3,\ldots$ が零行列でない定数行列 C に収束したとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) a の値を求めよ．

(b) 最大固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(c) 行列 C を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014705)

0.35　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい.

(1)　$\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい.

(2)　A の行列式 $\det A$ を求めなさい.

(3)　$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい.

(4)　$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい.

(5)　$V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ とする．$\varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい.

（九州大 2001）　　(m20014706)

0.36　行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられている．次の問に答えなさい.

(1)　4 次元複素ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$z^* A z = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4|^2$$

となることを示しなさい．ただし，$\overline{z_i}$ を z_i の共役複素数とするとき，$z^* = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4})$.

(2)　行列 A は正定値行列であることを示しなさい.

（九州大 2001）　　(m20014707)

0.37　次の積分の値を求めたい.

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\cos\theta + p^2} d\theta, \quad 0 < p < 1$$

(1)　関係式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{および} \quad \frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p) = \int_C F(z) dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか.

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014708)

0.38 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.39 S を平面上の円とする．

(1) A, B が S 上にあり，P が円弧 AB の上を動くとき，$\triangle APB$ の面積はいつ最大になるか答えよ．

(2) S に内接する n 角形 $(n \geq 3)$ の面積はいつ最大になるか，理由を付けて答えよ．

(九州大 2003)　　(m20034701)

0.40 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x,y)$ で定義される曲面の点 (a,b,c), $c = f(a,b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034702)

0.41 xyz 空間内の円柱面 $T : x^2+y^2 = x$ と曲面 $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の設問に答えよ．

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034703)

0.42 y を x の関数，a, b を定数とする．また，微分方程式 $y''+ay'+by = f(x)$ に対する特解を y_1 とし，$y''+ay'+by = g(x)$ に対する特解を y_2 とする．このとき，

(1) 微分方程式 $y''+ay'+by = f(x)+g(x)$ に対する一つの特解は y_1+y_2 となることを示せ．

(2) 微分方程式 $y''+y'-2y = \cos x + e^{-x}$ に対する一般解を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034704)

0.43 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて

$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.44 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数の定義について，以下の下線部に適切な単語を記入せよ．

(a) A の 0 でない小行列式の ________.

(b) A の ________ な列ベクトルのの最大個数.

(c) A の ________ な行ベクトルのの最大個数.

(d) A で定まる線形変換の値域の ________.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) 次の連立方程式に解があれば，そのすべてを求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003)　　(m20034706)

0.45 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する．次の各設問に答えよ．

(1) λ, μ は A の固有値でなければならないことを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす P を直交行列で求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034707)

0.46 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1+e^z}dz \quad (0 < a < 1)$ について次の問に答えよ．

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R+i2\pi, -R+i2\pi \quad (R > 0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx \quad (0 < a < 1)$ を計算せよ．

(九州大 2003)　　(m20034708)

0.47 1 つのサイコロを続けて投げる動作を考える．偶数の目が k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）回出た時点で，この動作を終了するとする（必ずしも連続して k 回出る必要はない）．このとき，n 回目で動作が終了する確率を，$p_n(k)$, $n \geq k$ とする．次の問に答えよ．

(1) $k = 5$ とした，$p_n(5)$ を求めよ（n を用いて $p_n(5)$ を表現せよ）．

(2) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，$p_n(k)$ を求めよ（n と k を用いて $p_n(k)$ を表現せよ）．

(3) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，確率 $p_n(k)$ を最大にする n をすべて求めよ（k を用いて n を表現せよ）.

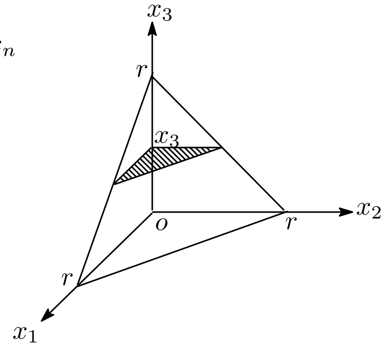
(九州大 2003)　　(m20034709)

0.48 正の数 r と整数 $n \geq 1$ に対して

$$K_n(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq n) \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.

$$|K_n(r)| = \int \cdots \int_{K_n(r)} 1 \ dx_1 \cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.49 (1) 次の線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

で与えられることを示せ. ただし, $P(x), Q(x)$ は x の連続関数であり, c は任意の定数である.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx} - y = x(1+2x^2)$$

(3) 適切な変数変換を利用して, 次の微分方程式の一般解を求めよ. さらに, $x=1$ のとき $y=1$ となるような解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{\log x}{2x}y^3$$

(九州大 2004)　　(m20044702)

0.50 次の 2 階微分方程式について以下の問に答えよ.

$$y'' + y' - 6y = e^x$$

(1) 同次形の微分方程式 $y'' + y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $y'' + y' - 6y = e^x$ を次の初期条件の下に解け.

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$$

(九州大 2004)　　(m20044703)

0.51 次の連立 1 次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を考える. ただし,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上三角行列 $\boldsymbol{U}$ と, 対角成分が 1 の下三角行列 $\boldsymbol{L}$ を用いて, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ と書くとき, $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{U}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は以下の 2 つの問題を解くことで求まることを説明せよ.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

(3) (2) の方法で $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解け.

(九州大 2004)　　(m20044704)

0.52　3 変数 x, y, z の 2 次形式 $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$ は, 適当な直交行列 P で変換変数

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

すれば,$f(x,y,z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$　(a, b, c は実数) になるという, ただし ${}^tP$ は行列 P の転置行列である. 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f(x,y,z) = (x,y,z)A\,{}^t(x,y,z)$ を満たす実対称行列 A を求めよ.

(2) 上の直交行列 P と実数 a, b, c を求めよ.

（九州大 2004）　　(m20044705)

0.53　n を 1 以上の整数とし, n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ の 1 次結合全体を $L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$ と表す. 線形写像

$$f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \longrightarrow f' \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$$

を T で表す. ただし f' は f の導関数である. 次の問に答えよ.

(1) n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ は 1 次独立であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ を求め, それぞれの次元を求めよ. ここで, 記号 $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ はそれぞれ

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \mid \text{恒等的に } Tf = 0\},$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{Tf \mid f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]\}$$

を表す.

(九州大 2004)　　(m20044706)

0.54　$f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく. ただし, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \le \theta \le \theta_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ. ただし, $0 \le \theta_0 \le \pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.55　複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \le \theta \le \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

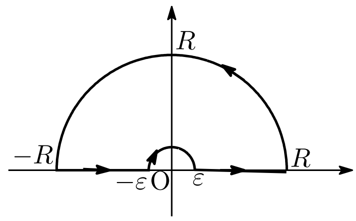
(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$



(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.

(九州大 2004) (m20044708)

0.56 関数 $f(x, y, z)$ を $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$ とし, $u = (u_1, u_2, u_3)$ を方向ベクトル（単位ベクトル）とする. 次の問に答えよ.

(1) 原点における f の u 方向の方向微分を u_1, u_2, u_3 を用いて表せ.

(2) 原点の於いて関数 $f(x, y, z)$ がもっとも急速に増加する方向と, もっとも急速に減少する方向をそれぞれ求めよ.

(九州大 2004) (m20044709)

0.57 ベクトル y がベクトル x と行列 A によって次のように関係づけられる.

$$y = Ax \quad \text{ここで,}\ \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ \ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 次の 3 つのベクトルが行列 A の固有ベクトルであることを示せ.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_0 \\ {z_0}^2 \end{pmatrix},\ \ p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ {z_0}^2 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

ここで, $z_0 = e^{i2\pi/3}$ である.
（ i : 虚数単位 ）
（ ヒント : ${z_0}^3 = 1$ ）

(2) 行列 A の固有値 λ_k $(k = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(3) a, b, c を行列 A の固有値 λ_k と z_0 を用いて表せ. （ヒント : $1 + z_0 + {z_0}^2 = 0$）

(4) $a = c = 0$, $b = 1$ となる場合の, 行列 A の（イ）固有値, （ロ）固有ベクトル を求めよ.

(5) （イ）ベクトル $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル p_1, p_2, p_3 の線形和で表せ.

（ロ）上記のベクトル p を x とするとき, ベクトル y を求めよ.

(九州大 2005) (m20054701)

0.58 次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + 2y_1(x) - y_2(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - y_1(x) + 2y_2(x) = 0$$

を, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$\frac{dy(x)}{dx} + Ay(x) = 0 \quad ただし, \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 A の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル c_1, c_2 を求めよ.

(2) c_1, c_2 を列ベクトルとする行列を $P = (c_1, c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.

(4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005) (m20054702)

0.59 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$ (θ : 実数, i : 虚数単位) のとき, $\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α, β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示 $C : z = e^{i\theta}, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a, b, c : 定数)$$

a, b, c を求めよ.

(九州大 2005) (m20054703)

0.60 ある銀行には, 1 分間あたり平均で 0.2 人の来客がある. 来客の到着がランダムであると考えると, 単位時間あたりの来客数は, ポアソン分布に従うことが知られている. この銀行の場合, 1 分間あたりの来客数は $\lambda = 0.2$ のポアソン分布に従う. ポアソン分布の式は, 次式で与えられる.

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) 1 分間の来客数が 4 である確率はいくらか.

(2) 1 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(3) 5 分間に来客が 1 人も来ない確率はいくらか.

(4) 3 分間に来客が 1 人だけ来る確率はいくらか.

(九州大 2005) (m20054704)

0.61 平面上の異なる 2 つの定点 A, B に至る距離の比が $m : n$ $(m, n > 0)$ である点の軌跡（そのような点全体のなす図形）を求めよ.

(九州大 2005) (m20054705)

0.62 A_n を対角成分がすべて a でそれ以外はすべて 1 の n 行 n 列の行列とする.

(1) A_n の行列式を因数分解された形で求めよ.

(2) 次の連立一次方程式を解け（a, b は定数）.

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & b \\ \cdots & & \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + ax_n & = & b \end{array}\right.$$

(九州大 2005)　　(m20054706)

0.63 $R[x]_n$ を x に関する高々n 次の実数係数の多項式全体とする.

(1) $U_n = \{p(x) \in R[x]_n \mid p(0) = 0\,,\ p'(0) = 0\}$
はベクトル空間になることを示せ．ただし，p' は p の導関数である.

(2) U_n の次元と, 一組の基底を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054707)

0.64 (1) 区間 $[0, 1]$ で定義された関数 g の積分（区分求積法）の定義を述べよ.

(2) 関数 $g(x) = x^3$ を区間 $[0, 1]$ で, 上で与えられた定義に従って, 積分した値を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054708)

0.65 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,,\quad x < 1$ 　について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $y = f(x)\,,\ f_1(x)\,,\ f_2(x)$ のグラフ 3 つを重ねて xy 平面上に描け.

(4) $f(x)$ を $x = 0$ を中心に Taylor 級数に展開せよ. x^n の項まで展開したときの剰余項の評価を一つ与えよ.

(九州大 2005)　　(m20054709)

0.66 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ.

(2) A が逆行列を持たないときの c の値は

(a) $c = \boxed{}$ のときと

(b) $c = \boxed{}$ のときである.

(3) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(4) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 A の固有値をすべてを求めよ.

(九州大 2006)　　(m20064701)

0.67 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け.

(2) 区間 $[0, \ell]$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{array}\right.$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ.
また，a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ.

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=f(x)$ （ただし，$f(x)$ は既知関数）の一般解を定数変化法により求めることを考える．

同次形 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$ の一般解は，$y=c_1\sin ax+c_2\cos ax\cdots$①

であるとし，c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果，一般解が

$$y=\frac{1}{a}\left\{\sin ax\int f(x)\cos axdx-\cos ax\int f(x)\sin axdx\right\}+c_1\sin ax+c_2\cos ax$$

となることを示せ．

(九州大 2006) (m20064702)

0.68 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ．

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0|\neq a$) に対して，(a) $|z_0|>a$ の場合 および (b) $|z_0|<a$ の場合における $\displaystyle\int_C\frac{1}{(z-z_0)^n}dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(2) 複素関数 $f(z)=\log(z-b)+\log\left(z-\dfrac{a^2}{b}\right)-\log z$ （b は実数で，$b>a$）に対して，$\displaystyle\int_C\left(\frac{df}{dz}\right)^2dz$ を求めよ．

(九州大 2006) (m20064703)

0.69 (1) 2つの任意の自然数 m,n について，次をそれぞれ示せ．

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0\ ;\ m\neq n\\ \pi\ ;\ m=n\end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases}0\ ;\ m\neq n\\ \pi\ ;\ m=n\end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり $\displaystyle f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx$ (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin pxdx$ ($p=1,2,\cdots$)

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)=|x|\ ;\ -\pi<x\leq\pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ をそれぞれ計算せよ．

(九州大 2006) (m20064704)

0.70 有名な公式 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$

の両辺を a に関して微分して,「形式的に微分と積分の順序を交換」すれば

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}=\frac{d}{da}\left(\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx\right)=\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial a}e^{-ax^2}\right)dx=-\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx\ ,$$

すなわち

$$\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \qquad (*)$$

となる．この問題の目的は，$(*)$ が実際に成立することを上の手順で示すことである．

(1) 任意の $h>0$ に対して，不等式 $0 \leqq \dfrac{e^{-hx^2}-1}{h}+x^2 \leqq \dfrac{hx^4}{2}$， $x \in \mathbb{R}$ を示しなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx < \infty$ を示しなさい．

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示しなさい．

(九州大 2006) (m20064705)

0.71 2変数関数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき} \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示しなさい．

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x に関して，また y に関して偏微分可能であることを示しなさい．

(3) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べなさい．

(九州大 2006) (m20064706)

0.72 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A=[a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい．

(2) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{x}_i$ $(j=1,2,\cdots,n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい．

(3) 4つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ と4次正方行列

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3,\boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい．

(九州大 2006) (m20064707)

0.73 $\mathcal{P}$ を3次以下の実係数多項式のつくるベクトル空間とする．すなわち

$$\mathcal{P}=\{f\,|\,f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\ ,$$

$A:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ を $(Af)(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)dy-\frac{f'''(0)}{24}x^4$ と定める．

(1) A は線形写像であることを示し，$f_n(x)=x^n$，$n=0,1,2,3,$ に対し $(Af_n)(x)$ を求めなさい．

(2) W の基底 f_0,f_1,f_2,f_3 に関する A の行列表示を求めなさい．

(3) A^4 を求めなさい．

(4) A は対角化不可能であることを示しなさい．

(九州大 2006) (m20064708)

0.74 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$，$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を実数列，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を関数とし、$\alpha,\beta,x_0\in\mathbb{R}$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ならば，正数 M が存在し，すべての n に対して $|a_n|\leqq M$ となることを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ となることを示しなさい．

(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \alpha$ とする．このとき，正数 $\varepsilon > 0$ と $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ となる実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，$|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon \ (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 次の二つの条件が同値であることを示しなさい．

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

(b) 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ を満たせば，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$.

(九州大 2006) (m20064709)

0.75 a, b, c を実数とし，3× 3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -a-c & a+b-c \\ -a-c & a+c & -a+c \\ a+b-c & -a+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $abc \neq 0$ のとき $|A| \neq 0$ となることを示せ．ただし，$|A|$ は行列 A の行列式を表すものとする．

(2) $a = b = c = 1$ のとき，行列 A の逆行列を求めよ．

(九州大 2006) (m20064710)

0.76 空間の 4 点 $O = (0, 0, 0),\ A = (1, 2, -1),\ B = (1, 2, 1),\ C = (1, 1, 1)$ を考える．2 点 O, A を通る直線を ℓ, 3 点 O, A, B を通る平面を π とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 B から直線 ℓ へ下ろした垂線の足を P とする．

$e_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2 = \dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$|\overrightarrow{OA}|,\ |\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2) 点 C から平面 π へ下ろした垂線の足を Q とする．

$$\overrightarrow{OQ} = \alpha e_1 + \beta e_2$$

が成り立つ実数 α と β を求めよ．また，点 Q の座標を求めよ．

(九州大 2006) (m20064711)

0.77 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x)\,, \quad g(x) = \log\left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = f(x) \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006) (m20064712)

0.78 e を自然対数の底とするとき，関数 $f(x) = e^{-x^2}$ と，その n 次 (n 階) 導関数 $f^{(n)}(x)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$ と表すとき，多項式 $p_1(x)$, および $p_2(x)$ を求めよ．

(2) 任意の非負整数 k に対して， $\lim_{x \to +\infty} x^k f(x) = 0$ となることを示せ．

(3)　次の広義積分　$I = \int_o^{+\infty} p_1(x)p_2(x)f(x)dx$　の値を求めよ.

(九州大 2006)　　(m20064713)

0.79　次の x に関する微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \qquad \text{(i)}$$

について，以下の設問に答えよ.

(1)　$x = e^z$ とおくことで $\dfrac{dy}{dx}$ を $\dfrac{dy}{dz}$ と x を用いて表せ．また，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dz^2}$，$\dfrac{dy}{dz}$，x を用いて表せ.

(2)　$x = e^z$ とおくことで x に関する微分方程式 (i) を z に関する微分方程式に変換せよ.

(3)　x に関する微分方程式 (i) の一般解を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074701)

0.80　2 変数関数 $z = x^2 - y^2$ について次の設問に答えよ.

(1)　$z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z = 0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2)　$z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる立体図形：
$0 \leqq\ z \leqq\ x^2 - y^2$，$x^2 + y^2 \leqq\ 1$ の体積を求めよ.

(3)　$z = x^2 - y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取られる部分：
$z = x^2 - y^2$，$x^2 + y^2 \leqq\ 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.81　$\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す．また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1)　曲面上の点 $P = (1, 1, -2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2)　この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる.
このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.82　連続型の確率変数を X とする．X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし，$P_X(a)$ が以下で与えられているものとする．以下の設問に答えよ.

$$P_X(a) = \begin{cases} 0 & (-\infty \leq a < -T) \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T \leq a \leq T) \\ 1 & (T \leq a \leq \infty) \end{cases}$$

(1)　X が値 X_0〜X_1（ただし，$X_0 < X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ.

(2)　X が任意の定数 B となる確率を求めよ.　　(3)　X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ.

(4)　X の平均を求めよ.　　(5)　X の標準偏差を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074704)

0.83 正の実数 $p > 0$ に対して，定積分 $f_n(p) = \int_0^1 \frac{1}{1+nx^p}\,dx\,,\quad n = 1, 2, \cdots$ を考える．

(1) 次の極限値を求めよ． $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, f_n(2)$

(2) $0 < \varepsilon < 1$ に対して $f_n(p)$ の積分区間を $[\,0,\ \varepsilon\,]$ と $[\,\varepsilon,\ 1\,]$ に分けることにより次の不等式を示せ．

$$0 < f_n(p) < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{1+n\varepsilon^p}$$

(3) (2) を用い $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$ であることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074705)

0.84 ω を実数として，$y(x),\ -\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式 $y'' + 2y' + y = \sin\omega x$ を考える．

(1) $\omega = 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $\omega \neq 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 各 ω に対して，$x \to -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074706)

0.85 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ．

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.86 $A = (a_{ij})\quad (i,j = 1,2)$ を $2\times\ 2$ 実行列とする． A^T で A の転置行列を表すとする． ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ で定める．

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が成立する時，$A^TA = AA^T = E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列とする．

(2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ．さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ．

(3) (2) において A の行列式が -1 であるとき，ある実数 θ が存在して

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ と書けることを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074708)

0.87 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める．

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし，$(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す．また，$A_1 = p$ とする．

(1) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ．

(2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ．

(3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく．数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のみたす漸化式を導き，a_n，$n = 1, 2, \cdots$，を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074709)

0.88 a を正の定数，e を自然対数の底とし，$f(x) = e^{ax}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，$f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ．

(3) N を自然数とするとき，次の級数の和を求めよ． $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.89 (1) $n = 0, 1, 2$ に対して，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1} dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ．

$$\int_1^{\infty} \frac{x^n}{x^2+1} dx$$

(九州大 2007)　　(m20074711)

0.90 次の 4 次正方行列 A の逆行列を求めよ． $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(九州大 2007)　　(m20074712)

0.91 A は n 次正方行列で，その対角成分はすべて 2，それ以外の成分はすべて 1 であるとする．α は実数で，次の条件 (C) をみたす n 次の列ベクトル（縦ベクトル）$\boldsymbol{x}$ が存在するとする．

条件 (c) ： $\boldsymbol{x}$ の成分はすべて正で，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$

(1) $n = 2$ の場合に，α を求めよ．　　(2) n が 3 以上の自然数の場合に，α を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074713)

0.92 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする．

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a < b$ とし，(p, q)，(r, s) はそれぞれ整数の組で，$p > 0$，$r > 0$ とする.

(2) 前問の結果を用いて，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ.

（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ.

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.93　次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x, t)$ を以下の手順に従って求めよ.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c > 0) \qquad ① \qquad \text{ただし環境条件は} \quad y(0, t) = y(L, t) = 0 \qquad ②$$

(1) 関数 $y(x, t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x, t) = A(x) \cdot B(t)$ と表すと，次式が成立することを証明せよ.

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \qquad ③$$

(2) 式 ③ の左辺は位置 x，右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい．これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する.

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \lambda A(x) = 0 \qquad ④ \qquad \frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \lambda c^2 B(t) = 0 \qquad ⑤$$

$\lambda > 0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ.

(3) $\lambda > 0$ の場合，式 ② の環境条件より

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad ⑥$$

が成立することを証明せよ.

(九州大 2008)　　(m20084702)

0.94　積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta}\, d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数である.

(1) 単位円上の任意の点，$z = e^{i\theta}$ に対して，$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ.

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z| = 1$ とする複素積分へ変換せよ.

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け.

(4) 留数計算によって，$I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ となることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.95 あるセルフサービスのカフェテリアでは，昼に 3 種類のランチメニューがある．客は順番に並んで，メニュー 1, メニュー 2, メニュー 3 のどれか一つのメニューを選ぶとする．N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+1$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率は a_{ij} であるとする．($i,j=1,2,3,$ a_{ij} は N に依存しない.) 一方，N 番目の客がメニュー j を選ぶ確率を $p_j(N)$ と置く．

(1) N 番目の客がメニュー j を選んだとき $N+2$ 番目の客がメニュー i を選ぶ確率を a_{ij} を使って表せ.

(2) $i \neq j$ である時 $a_{ij}=q$ (q は i, j によらない正の数, $q>0$)　$a_{ii}=p$ (p は i によらない正の数 , $p>0$) とする．このとき q と p が満たすべき関係式を述べよ.

(3) (2) の仮定をする．3 行 3 列の行列 A を ij 成分が a_{ij} となる 3 行 3 列の行列とする．A^2 を単位行列と F で表せ．ただし，F は次で定まる行列とする.

$$F=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (2) の仮定のもとで行列 A のべき乗 A^N を求めよ．これを使い N 番目の客がメニュー 1 を選ぶ確率 $p_1(N)$ を $p_i(1)$ $(i=1,2,3)$ と q で表す公式を求めよ.

(5) (2) の仮定のもとで $\displaystyle\lim_{N\to\infty} p_j(N)$ を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084704)

0.96 A 君と B 君はそれぞれコインを a 枚，b 枚持っている．2 人のコインの合計枚数を $N(N=a+b,\ N>0)$ とする．中を見るこてができない箱の中に，$p:(1-p)$ の割合で赤いボールと白いボールが入っており，そこから 1 個のボールを取り出す．ただし，$0<p<1$ とする．赤いボールがでたら A 君が B 君からコインを 1 枚受け取り，白いボールがでたら A 君が B 君にコインを 1 枚渡す．コインの受け渡し後，取り出したボールは元の箱の中に戻すものとする．この操作を繰り返し，A 君，B 君のどちらか一方のコインが無くなった時点で，無くなった方を負けとする．A 君が a 枚のコインを持っている時に A 君が負ける確率を $R(a)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $R(0)$ と $R(N)$ はそれぞれいくつか.

(2) A 君が a 枚コインを持っている時に赤いボールを取り出せば，$R(a)$ であった A 君の負ける確率が $R(a+1)$ となり，白いボールを取り出せば $R(a-1)$ となる．このことから $R(a)$ を $R(a+1)$, $R(a-1)$, p を用いて表せ．ただし，$0<a<N$ とする.

(3) $R(0)$ として (1) で求めた値を利用し，さらに $R(1)=r_1$ とするとき，(2) で求めた関係式から $R(a)$ を求めよ.

(4) (1) で求めた $R(N)$ と (3) の結果を用いて $r_1(=R(1))$ を求めよ.

(5) a を変えずに $b\to\infty$ とした時の $R(a)$ を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084705)

0.97 (1) (a) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$　について，$x=0$ および $x=L$ において $y=0$ となる解を求めよ．ただし，ω, L は正の実数である.

(b) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\gamma\omega\dfrac{dy}{dx}+\omega^2y=F\cos\omega x$　について，$x=0$ において $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる解を求めよ．ただし，γ, ω, F は実数であり，$\omega>0$, $0<\gamma<1$ である.

(2) (a) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{dy}{dx}+y=y^2$

(b) (a) の解を利用して，次の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + (2x+1)y - y^2 = x^2 + x + 1$ の一般解を求めよ．

(九州大 2008) (m20084706)

0.98 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$，奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき，以下の問いに答えよ．

$$e^{iz} = f(z) + i \cdot g(z)$$

なお，i は虚数単位であり，e は自然対数の底である．

(1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて，e^{-iz} を表せ．

ヒント：題意より，$f(z) = f(-z)$，$g(z) = -g(-z)$ が成立する．

(2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて，$f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ．

(3) $g(x+iy) = u + iv$ と表すとき，以下の関係式が成立することを示せ．

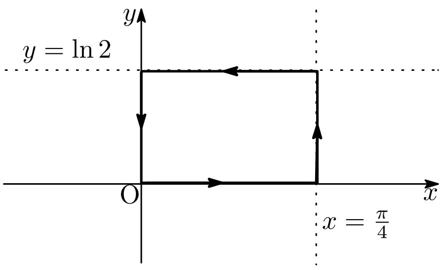
$$u = \sin x \cdot \cosh y$$
$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし，x, y, u, v は実数であり，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(4) $g(x+iy) = i$ を満たす $x + iy$ を全て求めよ．

(5) $g(x+iy) = u + iv$ とし，点 (x, y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って，原点 O を出発して反時計回りに一周したとき，uv 平面上の点 (u, v) はどのような軌跡を描くか．その軌跡の概略図を示せ．

ヒント：任意の実数 x, y で，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$，$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ が成立する．



(九州大 2008) (m20084707)

0.99 xyz 空間において，$z = e^{-(x^2+y^2)}$ で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と $z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$ によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と $z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$ によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$ で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．

(九州大 2008) (m20084708)

0.100 (1) 実数からなる行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3$ を求めよ．

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1$ が成り立つ．

$\boldsymbol{v}_1$ と一次独立な大きさ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ を用いて，$B\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の一次結合

$$B\boldsymbol{v}_2 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$

と表したい．$\boldsymbol{v}_2$ と α の組み合わせを 1 つ，具体的な数値で求めよ．

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & v_{21} \\ -1 & v_{22} \end{pmatrix}$ とすると，$BP = PC$ と表すことができる．行列 C を記せ．

(c) B^n を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084709)

0.101　$a > 0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2 = a^2x$ を考える．

(1) 上の曲線の概形をかけ．

(2) 上の曲線を $x = 0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.102　3 次元空間において二つの曲面　$A \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\quad B \,:\, x^2 + y^2 = x$　を考える．

(1) これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ．

(2) 曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084711)

0.103　$G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である．

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ．

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\, \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ．

(九州大 2008)　　(m20084712)

0.104　A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m \to \infty} A^m \boldsymbol{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする．

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n=3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき, A の固有値は $-1,\ 2 \pm \sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008) (m20084713)

0.105 $n_1,\ n_2$ を自然数, $n = n_1 + n_2$ とする. $n\times\ n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする. ただし, 一般に, C_{ij} は $n_i\times\ n_j$ 行列, O_{ij} は零行列, I_{ii} は単位行列で, 添え字の T は転置をとることを意味する.

A_{11} は正則行列であるとして, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ.

(2) A が正定値なら $A_{11},\ B_{22}$ も正定値であることを示せ.

(九州大 2008) (m20084714)

0.106 次の連立 1 次方程式について, 各問いに答えよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 係数行列の逆行列を求めよ.

(2) 上で求めた逆行列を用いて方程式の解を求めよ.

(九州大 2008) (m20084715)

0.107 次の行列 A の行列式を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(九州大 2008) (m20084716)

0.108 (1) 区間 $I = (0, 1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x) = e^{-x^2}$ に対して $f(g(x)) = x$ を満たすとき, 区間 I において, $g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ.

(2) 次の広義積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい.

(九州大 2008) (m20084717)

0.109 (1) 実数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ に対して, 等式 $\dfrac{1+t^2}{t(1+t-t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b+ct}{1+t-t^2}$ が成り立つように a, b, c を定めよ.

(2) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表せることを示せ.

(3) 変数変換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を行い，次の定積分 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)\sin x}$ の値を求めよ.

(九州大 2008) (m20084718)

0.110 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2 × 2 行列とする．以下の問いに答えよ．なお，行列やベクトルの要素は全て実数とする.

(1) 全ての 2 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ にたいし $|A\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}|$ となるための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(2) A が (1) の条件を満たすとき，$(ad-bc)^2 = 1$ であることを示せ.

(3) $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(4) A が (1) と (3) の条件を満たし，かつ $ad - bc = 1$ のとき，A を求めよ.

(5) A が (1) の条件を満たし，かつ直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点が A による変換で移動しないとき，A を求めよ.

(九州大 2009) (m20094701)

0.111 次の問いに答えよ．ただし，$D = \dfrac{d}{dt}$ とする.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(D^2 - 6D + 5)x = e^{4t}$$

(3) 次の x と y に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} (D-2)x + y = \dfrac{1}{4}e^{4t} \\ (4D-5)x + Dy = 0 \end{cases}$$

(九州大 2009) (m20094702)

0.112 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$,

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする.

(1) フーリエ係数 a_n , b_n を計算せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ.

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009) (m20094703)

0.113 (1) n が整数であるとき，複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ.

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) (i) 式を用い，複素数 $1-i$ の三乗根をすべて求めよ．

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N=4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ．

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.114 次の定積分を計算せよ．

(1) $2^4 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^4 x\, dx$

(2) $2^4 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

(九州大 2009)　　(m20094705)

0.115 $f(x)$，$g(x)$ を以下の関数とするとき，各問いに答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$g(x) = 1 - x^2$$

(1) 曲線 $f(x)$，$g(x)$ および直線 $x=1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(2) (1) の領域の周囲の長さ L を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094706)

0.116 $4\times\ 4$ 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式が 0 となる a の値を求めよ．

(2) 行列 A の階数を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094707)

0.117 xyz-空間に，4 点 $P(-1,1,1)$，$Q(-1,2,2)$，$R(0,2,0)$，$S(1,-1,-1)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ．

(2) xyz-空間において平面の方程式は，一般に，適当な定数 a,b,c,d により $ax+by+cz=d$ と表される．3 点 P,Q,R を通る平面の方程式を求めよ．

(3) 点 S から，3 点 P,Q,R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする．ベクトル $\overrightarrow{SH}$ を求めよ．

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094708)

0.118 行列 V_2, V_3, V_4 を次のように定義する：

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

(1) V_2, V_3, V_4 の行列式を求めよ.

(2) V_2, V_3, V_4 の逆行列が存在する条件を述べ，その条件下で逆行列を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094709)

0.119 関数 $f(x)$ の点 a での Taylor 展開は，関数 $f(x)$ を点 a の近くで一番よく近似する n 次式が

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

だと言うことを主張している．関数 $f(x) = -\log(1-x)$ の $x=0$ の近くでの振舞いに関する以下の問いに答えよ.

(1) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 0 次式 $f_0(x)$ を求めよ.

(2) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(4) 点 0 の近くで関数 $f(x)$ を一番よく近似する n 次式 $f_n(x)$ を求めよ.

(5) 以下の 4 つの関数のグラフを，$-1 \leq x < 1$ の範囲で，重ねて描け：

$$y = f(x), \quad y = f_0(x), \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x).$$

(九州大 2009)　　(m20094710)

0.120 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ を実数とするとき，次の n 次正方行列 A を考える：

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

ζ を $\zeta^n = 1$ を満たす複素数とするとき，ベクトル $\boldsymbol{u}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $A\boldsymbol{u}_\zeta$ を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{u}_\zeta = \alpha \boldsymbol{u}_\zeta$ となる複素数 α が存在することを示せ.

(3) A の固有値を全て求めよ.

(4) A の行列式を因数分解された形で求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094711)

0.121 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし，次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられ，第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ，第二象限内では $x = a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し，C の概形を描け．

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.122 以下の (1)〜(3) の問いに答えよ．ただし，$D = \dfrac{d}{dx}$ を表している．

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$(D-1)y = x$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の境界値問題を解け．

$\left(D^2-6D+13\right)y = 0 \qquad y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

(3) 次の関数 $f(x),\ g(x)$ に関する連立微分方程式

$(D-2)\,f + g = 0$

$-4f + (D+3)\,g = 0$

を条件 $f(0)=3,\ g(0)=6$ のもとで解け．

(九州大 2010)　　(m20104701)

0.123 図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある．この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす．このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）．棒の左端 P から距離 $t\ (0<t<1)$ だけ離れた棒上の点を R とする．

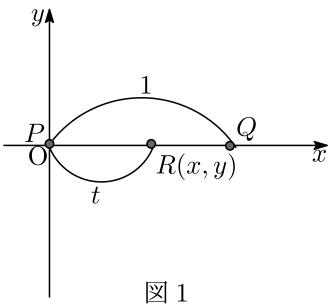


図 1

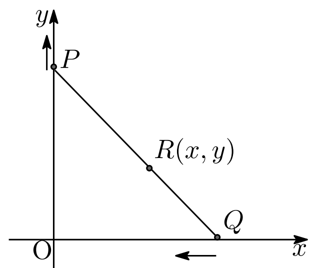


図 2

(1) 点 P が原点 O から点 $(0,1)$ まで移動するとき，点 R はどのような軌跡を描くか．点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め，この軌跡の図形の名前を記せ．

(2) (1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104702)

0.124 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面 α が，座標の原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している．

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき，平面 α を表す方程式を求めよ．

(2) 点 P が球面 β 上にないとき，平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ が満たすべき条件を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104703)

0.125 サイコロを 5 回続けて投げる．k 回目に出る目の数を X_k とする．出た目の和を Y とし，出た目の積を Z とする．つまり，$Y = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ で，$Z = X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_4\cdot X_5$ とする．

(1) $Y=5$ である確率を求めよ.

(2) $Y=6$ である確率を求めよ.

(3) $Y=7$ である確率を求めよ.

(4) Z が 3 の倍数になる確率を求めよ.

(5) サイコロが 5 回とも同じ目の時には 10000 点もらえ, サイコロが 4 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 1000 点もらえ, 3 回は同じ目で残りがそれとは違う目の時には 100 点もらえる. それ以外の場合はもらえないとする. この時もらえる点数の期待値 E を求めよ. また E の小数第 1 位を四捨五入した値も求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104704)

0.126 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\ ;\ x=t\cos\theta\ ,\ y=t\sin\theta\ ,\ z=r\ ,\ 0\leq t\leq r\ ,\ 0\leq r\leq 3\ ,\ 0\leq\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+1$$

とし, $S=V\cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}\qquad \max\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.127 $A,\ B$ を 3 次実対称行列とする. 一般に, ${}^tP$ は行列 P の転置行列を表わすものとする.

(1) ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在するなら, $BA=AB$ であることを示せ.

(2) A の固有値がすべて等しいなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(3) $BA=AB$ であるなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(九州大 2010)　　(m20104706)

0.128 $x\neq 0$ に対して,

$$f(x)=-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$$

とおく. ただし, $\mathrm{Tan}^{-1}y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ は, $y=\tan x$ の逆関数である.

(1) $x\neq 0$ で

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

であることを示せ.

(2) 次の計算には誤りがある. 誤りの原因を指摘し, 正しい積分値を求めよ.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

(九州大 2010)　　(m20104707)

0.129 線形写像 $T \ : \ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay-az-w \\ ax+y-z-w \\ -x+y+az+2w \end{pmatrix}$$

を考える. ただし, a は実数である.

(1) ベクトル空間

$$R(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(2) ベクトル空間

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(九州大 2010) (m20104708)

0.130 a を正の定数とするとき, 以下の各問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) 任意の自然数 n に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$$

(2) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\, dx$$

(3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\, dx$$

(九州大 2010) (m20104709)

0.131 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\, dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{|x^2+a|}\, dx$$

(九州大 2010) (m20104710)

0.132 3 次元空間（$xyz-$ 空間）内において, 与えられた 3 つの平面のいずれにも属する点があるとき, その点をその 3 つの平面の「共有点」と呼ぶ. たとえば, $xy-$ 平面, $yz-$ 平面, $zx-$ 平面の共有点は, 原点 $(0,0,0)$ である. 3 次元空間内の次の 3 つの平面を考える. ここで, a は定数とする.

$$\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \mid x-y+2z=2\}$$

平面 $S_2 = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y + z = 3\}$

平面 $S_3 = \{(x, y, z) \mid 4x + y + az = 1\}$

このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $a = 4$ とする. このとき, 3 つの平面 S_1, S_2, S_3 の共有点を求めよ.

(2) $a = 5$ とする. このとき, 3 つの平面 S_1, S_2, S_3 の共有点は存在するかどうか, 理由を述べて答えよ.

(九州大 2010) (m20104711)

0.133 一般に, n 次正方行列 A の (i, j) 成分を $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n\ ;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ とするとき, A のトレース : $tr[A]$ を, $tr[A] = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ によって定義する. また, ${}^tA$ は A の転置行列を表すとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 B の (i, j) 成分を $b_{ij}(i = 1, 2, 3\ ;\ j = 1, 2, 3)$ とする. このとき, ${}^tB$ と B の積 : ${}^tBB$ の (i, j) 成分を, B の成分で表せ.

(2) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 B に対して, $tr[{}^tBB] = 0$ ならば $B = O$ であることを示せ. ただし, O は零行列を表す.

(3) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 C に対して,「${}^tC = C$ かつ $tr[C^4] = 0$」ならば $C = O$ であることを示せ.

(九州大 2010) (m20104712)

0.134 次の各問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか, いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011) (m20114701)

0.135 アステロイド C : $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ に対し, 各問いに答えよ.

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) に対し, $x = \cos^3 t$ のとき, y を t を用いて表せ.

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ.

(九州大 2011) (m20114702)

0.136 $3 \times\ 3$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, E を $3 \times\ 3$ 単位行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) x についての多項式として, $|xE - A| = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ が成立するように, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を定めよ. ただし, $|xE - A|$ は行列 $xE - A$ の行列式を表す.

(2) (1) で求めた定数 a_0, a_1, a_2 に対し, $a_0A^2 + a_1A + a_2E$ を求めよ.

(九州大 2011) (m20114703)

0.137 $3\times\ 3$ 行列 B, C をそれぞれ

$$B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，点 $P_n(x_n,\ y_n,\ z_n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$ を $x_1=y_1=z_1=1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 C の逆行列 C^{-1} を求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 B の固有ベクトルであることを示せ．

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$ を，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$a_{n+1},\ a_n$ の間に成立する関係式を求めよ．

(4) $n\to\infty$ としたとき，点 P_n はある点 P_∞ に近づくことを示し，点 P_∞ を求めよ．

(九州大 2011) (m20114704)

0.138 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ に対し以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012) (m20124701)

0.139 関数 $y=y(x),\ z=z(x)$ のそれぞれについて，x に関する微分を $y',\ z'$ とし，2 階微分を $y'',\ z''$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''+5y'+4y=0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''+5y'+4y=e^{2x}$$

(3) 次の y と z に関する連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} y'+2y+2z=-e^{2x} \\ y+\ z'+3z=0 \end{cases}$$

(九州大 2012)　　(m20124702)

0.140 直交座標を (x, y)，極座標を (r, θ) とするとき，曲線 C : $r = 2(1 + \cos\theta)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸，y 軸との交点の直交座標を求めて，曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r \leqq 2(1 + \cos\theta)$, $y \geqq 0$, $y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.141 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \quad , \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as + b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.142 関数 $f(x) = \sin(\log x) \quad (x > 0)$ を考える．$f'(x)$, $f''(x)$ をそれぞれ $f(x)$ の 1 次および 2 次の導関数とする．また，π は円周率，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ.

(1) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f'(x) = 0$ となる x を求めよ.

(2) $1 \leqq x \leqq e^{\pi}$ において $f''(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(3) 2 点 $(1, f(1))$, $(e^{\pi/2}, f(e^{\pi/2}))$ を通る直線の方程式を求めよ.

(4) $\dfrac{e^{\pi/4} - 1}{e^{\pi/2} - 1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124705)

0.143 関数 $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \quad (-\infty < x < \infty)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の値域を求めよ.

(2) 定積分 $I=\int_a^b f(x)dx$ の値を求めよ．ただし，$a=\dfrac{1}{4}\log 2$，$b=\dfrac{1}{4}\log 3$ とする．

(九州大 2012)　　(m20124706)

0.144 $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対する第 2 成分が 1 の固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124707)

0.145 関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ により定める，ただし，$|\cdot|$ は行列式を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は実数 β,a,b,c を用いて $f(x)=\beta(x-a)(x-b)(x-c)$ と表せる．β,a,b,c を求めよ．ただし，$a>b>c$ とする．

(2) $g(x)=-x(2x-3)(x-3)$ とするとき，方程式 $f(x)+g(x)=0$ の解はすべて実数で，$-1<x<3$ の範囲に存在することを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124708)

0.146 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124709)

0.147 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく．

(1) 1 次変換 $u=x+y$，$v=x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ ．

(2) (1) の変数変換において，ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$$

を求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124710)

0.148 2 変数関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値点と極値を求めよ.

(九州大 2012) (m20124711)

0.149 ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0\,,\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\}$$

により定める.

(1) V は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一組求めよ.

ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ 上の内積を, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対し,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

により定める. V の直交補空間を

$$W = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{任意の } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対し, } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \right\}$$

と定める.

(3) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(4) W の正規直交基底を一組求めよ.

(九州大 2012) (m20124712)

0.150 n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ は, どの行についても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ とする, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 は A の固有値であることを示せ.

(2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ.

(3) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) B が対角化可能かどうか判定せよ.

(九州大 2013) (m20134701)

0.151 以下の問いに答えよ.

(1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ. ただし, c は定数である.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - c^2$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を，$y(0)=1,\ y(0.5)=2e$ のもとで解け．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+\pi^2+4=0$$

(3) 一定温度 T_a に維持されたオーブンに鉄球を入れて温めるとき，時刻 t での鉄球の温度 $T(t)$ の変化率は $T_a-T(t)$ に比例する．これを微分方程式の形に定式化し，$T(t)$ を求めよ．

(九州大 2013)　　(m20134702)

0.152 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,\cdots), \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos nx dx=a_n$ が成立することを示せ．

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi)=\begin{cases}\cos nx & (n\text{ が偶数}) \\ -\cos nx & (n\text{ が奇数})\end{cases}$ が成立する．

このことを踏まえ，関数 $g(x)=f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $\displaystyle a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx dx$, $\displaystyle b'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx dx$ を $a_n,\ b_n$ を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $\displaystyle F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ．

(a) $f(x)=e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ．

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos u}{1+u^2}du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.153 トランプ 52 枚は，$1,2,\cdots,13$ の札がそれぞれ 4 枚ずつから構成される．トランプ 52 枚をよく切ってから 1 枚を抜いて戻すことを 3 回繰り返し，それらの札を a_1,a_2,a_3 とする．トランプ 52 枚をよく切ってから一度に 3 枚抜き，それらの札を b_1,b_2,b_3 とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_1,a_2,a_3 がすべて絵札である確率を示せ．ただし絵札とは，$11,12,13$ の札である．

(2) b_1,b_2,b_3 がすべて絵札である確率を示せ．

(3) b_1,b_2,b_3 の合計値が 37 以上である確率を示せ．

(4) b_1,b_2,b_3 の合計値が 37 以上であるとき，b_1,b_2,b_3 の少なくとも 1 枚が 12 である条件付き確率を示せ．

(5) a_1,a_2,a_3 の少なくとも 1 枚が絵札であるとき，a_1,a_2,a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

(6) a_1,a_2,a_3 の少なくとも 1 枚が 12 であるとき，a_1,a_2,a_3 がすべて絵札である条件付き確率を示せ

(九州大 2013)　　(m20134704)

0.154 次の行列 $A,\ B$ について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\a&0&b\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\3&c\end{pmatrix}$$

(1) A の階数が 1 となる条件，2 となる条件をそれぞれ求めよ．

(2) AB が正則であるための条件を求めよ.

(3) BA の逆行列が存在するならその条件を求めよ. 存在しないならその理由を述べよ.

(九州大 2014) (m20144701)

0.155 (1) 次の定数係数線形常微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+ay=F(x)$$

ただし, x, $y(x)$, $F(x)$ は実数である.

(a) $F(x)=0$, $a=0$ のときの一般解を求めよ.

(b) $F(x)=0$, $a=1$ のときの一般解を求めよ.

(c) $F(x)=0$, $a=2$ のときの一般解を求めよ.

(d) $F(x)=e^{2x}$, $a=1$ とする. 初期条件 $y(0)=1$, $\dfrac{dy}{dx}(0)=0$ を満足する解を求めよ.

(2) 常微分方程式

$$y\frac{dy}{dx}=-4(x-1)\ , \qquad y(1)=2$$

の解が描く曲線を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2014) (m20144702)

0.156 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x<\pi)\ , \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき, $\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ. また, $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ. また, これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014) (m20144703)

0.157 (1) $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を r, θ および, u の r, θ に関する偏導関数を用いて表せ.

(2) 領域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\right\}$ において, 関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(a) 領域 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$ における $f(x,y)$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ. 極大か極小かも述べよ.

(b) 単位円 $x^2+y^2=1$ 上での $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ.

(c) 領域 D における $f(x,y)$ の最大値, 最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ.

(九州大 2014) (m20144704)

0.158 自然数 n に対して，$f(x) = x^2 \log x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144705)

0.159 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$ の値を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144706)

0.160 $a \geqq 1$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ $L(a)$ を求めよ．

(2) $a \geqq 1$ における $L(a)$ の最小値を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144707)

0.161 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の各問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144708)

0.162 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を一つ求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144709)

0.163 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数値とする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の逆行列が存在するための a の必要十分条件を示せ．

(2) a が小問 (1) の条件を満たす時，A の逆行列を求めよ．

(3) A の固有値を求めよ．

(4) A が対角化可能であるための a の必要十分条件を示せ．

(九州大 2015)　　(m20154701)

0.164 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

(九州大 2015)　　(m20154702)

0.165 C を区間 $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.166 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,dxdy \qquad D\,:\,x^2 + y^2 \leqq y$$

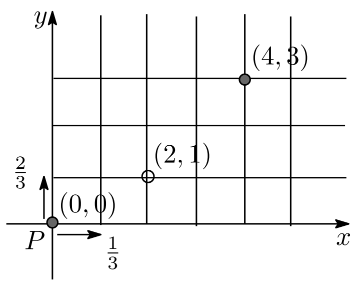
(九州大 2015)　　(m20154704)

0.167 点 P は原点 $(0,0)$ から開始し，平面格子点上を移動する．1 回の移動において，

P は確率 $\frac{1}{3}$ で x 軸の正の方向に 1 移動し，

確率 $\frac{2}{3}$ で y 軸の正の方向に 1 移動する.

以下の問いに答えよ.



(1) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方の数を求めよ.

(2) 点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する確率を求めよ.

(3) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，
点 $(2,1)$ を通らない通り方の数を求めよ.

(4) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，点 P の座標 (x,y) が移動中常に $4y \leq 3x$ を満たす通り方の数を求めよ.

(5) 点 P の座標 (x,y) が 7 回の移動中常に $4y \leq 3x$ を満たすとき，点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する条件付き確率を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154705)

0.168 a を実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の行列式が 0（ゼロ）となるような a の値をすべて求めよ．

(3) 前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく．（ 前問 (2) の解がただ一つの場合は，それを a_0 とおく．） $a = a_0$ の場合に，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2015) (m20154706)

0.169 a, b を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$平面\ S_1 = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = 1\}$$
$$平面\ S_2 = \{(x, y, z) \,|\, 2x + 3y + 4z = 7\}$$
$$平面\ S_3 = \{(x, y, z) \,|\, 4x + 6y + az = b\}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 7$ とし，b は任意の値に固定する．3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点となることを示せ．また，その点を b を用いて表せ．

(2) $a = 8$ とする，このとき，3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が空集合にならないための b に関する条件を求めよ．また，そのとき，この共通部分は「1 点」「直線」「平面」のいずれになるか，理由を述べて答えよ．

(九州大 2015) (m20154707)

0.170 a は $a \geqq 0$ なる定数とする．$0 < x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する． $f(x) = x^a \log x$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ．

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ． $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015) (m20154708)

0.171 a, b, c は $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \frac{cy}{ax^2 + by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $x > 0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^1 f(x, y)\,dy$$

(3) $y > 0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^\infty f(x, y)\,dx$$

(九州大 2015) (m20154709)

0.172 x, y を実数とし，行列 $A,\ B$ および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$C = AB({}^tA)$ とする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 行列 C の固有値を求めよ.

(3) 行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ.

(4) $x > 0,\ x^2 + y^2 = 1$ および $\boldsymbol{p} \cdot (C\boldsymbol{p}) = 1$ を満たす x と y を求めよ.

(九州大 2016)　　(m20164701)

0.173 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = f(x)$$

(a) $f(x) = 0$ のときの一般解を求めよ.

(b) $f(x) = \sin x$ のときの一般解を求めよ.

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を，$y(1) = 1$ のもとで解け.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2y + x}$$

(九州大 2016)　　(m20164702)

0.174 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ.

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ.

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ (n = 1, 2, \cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.175 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とし，位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2z - y)\boldsymbol{k}$$

とする．$(\bigtriangledown\varphi)\times\ \boldsymbol{A} + \varphi(\bigtriangledown\times\ \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.176 a を定数として，変数 x, y, z, w に関する次の連立一次方程式を考える．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - w = a \\ x + 3y\ \ - z\ \ + w = 1 \\ x + 2y\ \ + z\ \ - w = 0 \\ \quad\ \ y + 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) この方程式が解を持つための a の値を求めよ．

(2) 前問 (1) の a の値に対して，方程式の解を求めよ．　解がただ一つではない場合には，適切な方法を用いて解（一般解）を表現すること．

(九州大 2016)　　(m20164705)

0.177 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく．）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164706)

0.178 a, b は $a > 1,\ b > 0$ なる定数とする．$x \geqq\ 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^\infty a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.179 a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.180 4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174701)

0.181 x は実数とし，n は 2 以上の自然数とする．A は n 次の正方行列で，その対角成分はすべて x，それ以外の成分はすべて 1 であるとする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) すべての成分が 1 である n 次の列ベクトル（縦ベクトル）を $\boldsymbol{v}$ で表す．このとき，n と x に依存して決まるある実数 c_n に対して $A\boldsymbol{v} = c_n\boldsymbol{v}$ が成り立つことを示せ，また，c_n を求めよ．

(2) $c_n = 0$ となる x の値を x_n とおく．x_n を求めよ．

(3) $n = 3, x = x_3$ の場合に，A の固有値をすべて求めよ．

(4) $n = 4, x = x_4$ の場合に，A の階数 (rank) 求めよ．

(5) n は 2 以上の任意の自然数とし，$x = x_n$ とする．A の n 個の列ベクトル（縦ベクトル）を左から順に $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ とする．このとき，$A\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ を用いて表せ．また，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ は一次独立であるか，それとも一次従属であるか，答えよ．その理由も示すこと．

(九州大 2017)　　(m20174702)

0.182 (1) 「部分分数への分解」を用いて，任意の自然数 n に対して次の関数 $f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．ただし，$x \neq 3$, $x \neq -1$ とする．

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

(2) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3 - 6x^2 - 16x - 5}{x^2 - 2x - 3}dx$

(九州大 2017)　　(m20174703)

0.183 a, b を実数として，次の行列 A について考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A が正則であるための条件を求めよ．

(2) A に掃き出し法（ガウスの消去法）を適用して次の行列 U を得たとする．

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

この時，a, b を用いて c を表せ．

(3) U の各列ベクトルが直交するように a, b, c を求めよ．

(4) a, b, c が小問 (3) を満たすとき，$A = LU$ が成り立つような行列 L を求めよ．

(5) a, b, c が小問 (3) を満たすとき，U の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174704)

0.184 a は $a > 0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を，次のように定義する．

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y < x < a\}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $0 < x < a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^x f(x, y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x, y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.185 次の微分方程式を解け．

(1) $x^2 y' = (2x + y)(x + y)$　　(2) $y'' \sin x + y' \cos x = 0$　　(3) $y'' + y = \sin x$

(九州大 2017)　　(m20174706)

0.186 表が出る確率が θ のコインを繰り返し投げ，表を 1，裏を 0 として結果を $0110\cdots$ のように順に記録していく．ここで，$0 < \theta < 1$ である．初めてパターン“01”が現れるまでの待ち時間を T で表す．例えば $1001\cdots$ ならば $T = 4$，また，$000001\cdots$ ならば $T = 6$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $T = 3$ となる確率 $p(3)$ を θ の多項式で表せ．

(2) $T = 5$ となる確率 $p(5)$ を θ の多項式で表せ．

(3) $T = t \quad (t \geqq 2)$ となる確率 $p(t)$ を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174707)

0.187 (1) $f(x) = \begin{cases} 1\,, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x) = x$,　$(-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.188 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ のもとで解け．

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 2y' + y = 50 \sin x \cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について，一般解を求めよ．

$$(4x^3 - 6xy)dx + (8y - 3x^2)dy = 0$$

(九州大 2018)　　(m20184701)

0.189 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(3) $AC = A^2 + \alpha E$ を満たす行列 C の行列式 $|C|$ が，$|C| = 0$ を満たす定数 α の値をすべて求めよ．ただし，E は単位行列である．

(九州大 2018)　　(m20184702)

0.190 確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$　は次の漸化式　$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}\quad (n \geqq 2)$　を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

0.191 z を複素数とし，$a > 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)

$$\int_C \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z^2 - az + 1)} dz$$

を求めよ．ただし，C は原点を中心とする半径 1 の円周を反時計回りに進む積分路とする．

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2\theta}{a-2\cos\theta} d\theta$$

を求めよ.

(九州大 2018)　　(m20184704)

0.192　4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最大のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，第 1 成分が 1 であるものを求めよ.

(九州大 2018)　　(m20184705)

0.193　$a,\ b,\ c,\ r$ を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する.

$$\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \mid x+2y+z=a\}$$

$$\text{平面 } S_2 = \{(x,y,z) \mid -2x+y+z=b\}$$

$$\text{平面 } S_3 = \{(x,y,z) \mid 2x+5y+rz=c\}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) 任意の $a,\ b,\ c$ の値に対して常に 3 つの平面の共通部分 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点となるための r に関する条件を求めよ.

(2) r が前問 (1) の条件を満たさないとする． このとき，以下の (i) と (ii) のそれぞれについて，$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は「空集合」「1 点」「直線」「平面」のいずれになるかを答えよ．「空集合」となる場合には，その理由を示すこと．それ以外の場合には，集合 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を具体的に求めること.

　(i) $a=b=c=0$ の場合.

　(ii) $a=1,\ b=2,\ c=3$ の場合.

(九州大 2018)　　(m20184706)

0.194　$x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する.

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき，次の積分を求めよ.

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，e は自然対数の底，π は円周率である.

(九州大 2018)　　(m20184707)

0.195 $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \frac{y}{(xy+1)^2(y^2+1)}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y > 0$ なる y を固定し，a を任意の正の定数として，

$$g(y,a) = \int_0^a \frac{1}{(xy+1)^2}dx$$

とおく．このとき，$g(y,a)$ を求めよ．

(2) 領域 $D_1 = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 1,\ xy < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(3) 領域 $D_2 = \{(x,y) \mid 0 < x < y < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184708)

0.196 xy 座標平面上の点 P の移動について考える．

時刻 $t = n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n = (x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) = (1, s)$ で与えられるとする．

以下の問いに答えよ．

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.197 t の関数 y に対して，$y''' = \dfrac{d^3y}{dt^3}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dt}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A,\ B$ を実定数とする．$y = A\cos t + B\sin t$ が次の微分方程式

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos t \qquad \cdots (\mathrm{Q1})$$

を満たすように $A,\ B$ を定めよ．

(2) 微分方程式 (Q1) の一般解を求めよ．

(3) 次の微分方程式に対して $z = \dfrac{1}{y}$ とおいて z に関する微分方程式を導出せよ．

$$y' - \frac{1}{2}y = -y^2 \qquad \cdots (\mathrm{Q2})$$

(4) 微分方程式 (Q2) の一般解を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194702)

0.198 確率 p $(0 < p < 1)$ で表の出るコインを用いて 1 人のプレイヤーが行うゲームを考える．プレイヤーは持ち点を k (k は正の整数) としてゲームを開始し，コイントスを行って表が出れば持ち点が 1 増え，裏が出れば持ち点が 1 減る試行（ラウンドと呼ぶ）を繰り返す．持ち点が n になればプレイヤーの勝利でゲームは終了し，持ち点が 0 になればプレイヤーの敗北でゲームは終了する．ただし n は k より大きい整数とする．持ち点 k から開始して勝利する確率を P_k で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $n=4$ の時，p を用いて P_2 を表せ.

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ とし，$n \geq 4$ とする. この時，$k=2,\cdots,n-2$ に対しては $P_k = pP_{k+1}+(1-p)P_{k-1}$ が成り立つことを用いて，P_k を求めよ.

(3) $p=\dfrac{1}{3}$ とする．また，$k \geq 3$ として，$n=k+2$ とする．この時，6 ラウンド以内にプレイヤーが勝利する確率を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194703)

0.199 直交座標系において，x,y,z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A}=(y^3z/3)\boldsymbol{k}$ と，xy 平面，yz 平面，zx 平面で切り取られた平面 $2x+2y+z=2$ が作る三角形領域 S について，以下の各問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S に対する面積分を求めよ.

(3) S を囲む閉曲線 C に対して，C を構成する三つの各線分の位置ベクトルをそれぞれ x と y で表せ.

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う線積分を，三つの各線分に沿う線積分を計算して求めよ．ただし，線積分の方向は原点から見て時計回りの方向とする.

(九州大 2019)　　(m20194704)

0.200 区間 $(0,\infty)$ 上の関数　$f(x)=e^{-(\log x)^2}$　について以下の問いに答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，凹凸を調べグラフの概形を描け.

(3) 広義積分　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$　を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194705)

0.201 2 次元実平面上の閉区間 D，D_+ を

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-4 \leqq y^2 \leqq x^2-1 \text{ かつ } 4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9\right\}$

$D_+ = D \cap \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0 \text{ かつ } y \geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_+} xydxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{D} xydxdy$

(九州大 2019)　　(m20194706)

0.202 行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

(2) A を直交行列により対角化せよ，すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，$P^{-1}AP$ がどのような対角行列となるかを表示せよ.

(九州大 2019)　　(m20194707)

0.203　3 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1)　A のトレースが 0 のとき，A の行列式を求めよ．

(2)　$BA = AB$ のとき，行列 A の固有値を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194708)

0.204　3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．(固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく．）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194709)

0.205　a を $a \neq 0$ なる実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194710)

0.206　(1)　a を $a \neq 0$ なる実数とするとき，次の定積分を求めよ．ただし，逆正接関数 : $\mathrm{Arctan}\, x$ が $\dfrac{1}{x^2+1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい．　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a}dx$

(2)　次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-2x+4}$

(九州大 2019)　　(m20194711)

0.207　$x > 0,\ y > 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right), \quad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ を求めよ．

(2)　次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t \to +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{f(x, y)}{g(x, y)} dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.208 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える．このとき次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく）．このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで，「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204701)

0.209 二直線

$$\ell_1 : \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + u\mathbf{a}$$

$$\ell_2 : \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + v\mathbf{b}$$

は，交わらず，また平行でもないとする．次の各問に答えよ．

(1) ℓ_1 上の点 F と ℓ_2 上の点 G の位置ベクトルを

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{a}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{b}$$

とする．このとき，点 F と G を通過する直線が ℓ_1, ℓ_2 と直交するときに満たす関係式を求めよ．

(2) ℓ_1 と ℓ_2 に直交する直線がちょうど一本存在することを示せ．

(九州大 2020)　　(m20204702)

0.210 $f(x, y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ 　について考える．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) 以下の条件下のもとで $f(x, y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.211 領域 $R = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq y \leq 2x\right\}$ に対する積分　$I = \displaystyle\iint_R (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2-3xy}\, dxdy$ 　を求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204704)

0.212 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}$$

(2) 次の $y(x)$ および $z(x)$ に関する連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' - 2y - z = e^x\ ,\quad y' - 6y + z' = 0$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^2}\right)' - \frac{1}{y} = 0$$

(九州大 2020)　　(m20204705)

0.213 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}\ , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ．

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ．

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ．

(3) $\boldsymbol{p} \neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ．$\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x, y, z の条件を示せ．

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.214 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．

ベクトル場

$$A = \triangledown(e^{xy} - yz^2) + \triangledown \times (z^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} + \sin(2x - y)\boldsymbol{k}\ )$$

について以下の問いに答えよ．

(1) $\triangledown A$ を求めよ．　　(2) $\triangledown \times A$ を求めよ．

(3) $\triangledown A = 0$ かつ $\triangledown \times A = 0$ を満たす点を求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204707)

0.215 確率 $p(0 < p < 1)$ で表，確率 $1 - p$ で裏がでるコインを n 回独立に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) n 回のうち表が出た回数を表す確率変数を X とする．X の値が k $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ．

(2) X の期待値 $E[X]$ について，$E[X] = np$ が成り立つことを示せ．

(3) λ を正の定数として $p = \dfrac{\lambda}{n}$ とすると，以下が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ただし，任意の実数 a について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ を用いてよい．

(九州大 2020)　　(m20204708)

0.216 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P，および逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(九州大 2021)　　(m20214701)

0.217 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$\left(\frac{y'}{y^3}\right)' - \frac{4y'}{y^3} - \frac{2}{y^2} = 0$$

(九州大 2021)　　(m20214702)

0.218 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする．
ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\phi$ となるようなスカラー関数 ϕ が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，ϕ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\phi = 0$ とする．

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．

(九州大 2021)　　(m20214703)

0.219 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.220 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021) (m20214705)

0.221 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする. また, $|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 3 点 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

(2) 変数 x, y に対して, 正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {X_1}^2 + {Y_1}^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ {X_2}^2 + {Y_2}^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ {X_3}^2 + {Y_3}^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $\triangle_{i,j}$ を B の (i,j)-小行列式, つまり, B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする. B の第 1 行に関する余因子展開ににより, 小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき, 変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021) (m20214706)

0.222 次の定積分および広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

(九州大 2021) (m20214707)

0.223 $0 < A < B \leq 1$ とするとき, 領域 D を $D = \left\{(x, y) \;\middle|\; A \leq x \leq B,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$ とし,

$f(x, y) = \dfrac{y + y^2}{x^2 + y^2}$ とする. このとき, 次の各問に答えよ.

ただし, 逆正接関数 $\arctan(x)$ が $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ の原始関数であることは既知として用いてよい.

(1) 関数 $g(x, y) = y - x\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を y で偏微分した偏導関数を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x, y) dx$ を求めよ. ただし, $x > 0,\ y > 0$ とする.

(3) 関数 $h(x) = 2\ \arctan(x) - 2x + x\log(x^2 + 1)$ の微分を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_D f(x, y) dxdy = H(B) - H(A)$ を満たす関数 $H(x)$ を求めよ.

(九州大 2021) (m20214708)

0.224 $a \geq 0$ として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $a=4$ のとき, A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ.

(九州大 2021) (m20214709)

0.225 以下の問いに答えよ. ただし, $\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(2) $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x,\ 0\le y\le 1\right\}$ として, 次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_1=\iint_{D_1} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(3) $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 1,\ 0\le y\right\}$ として, 次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_2=\iint_{D_2} e^{-x^2 y}\,dxdy$$

(九州大 2021) (m20214710)

0.226 A, B, Q を n 次実正方行列とし, A は正則行列で, Q は対称行列であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 必要ならば, 実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい.

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ.

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば, AB も D に対角化可能であることを示せ.

(3) $A=Q^2$ かつ B が対称行列であるとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で, B は対称行列であるとする. このとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(九州大 2021) (m20214711)

0.227 $a\in\mathbb{R}$, $r>0$ とする. 点 $\boldsymbol{x}_1=(x_1,y_1)$ は円 $C_1=\left\{(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2+{y_1}^2=1\right\}$ 上を動き, 点 $\boldsymbol{x}_2=(x_2,y_2)$ は円 $C_2=\left\{(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_2-a)^2+{y_2}^2=r^2\right\}$ 上を動くものとする.

2 点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について, 以下の問いに答えよ. ただし, $\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする.

(1) 関数

$$f(\theta_1,\theta_2)=(r\cos\theta_2+a-\cos\theta_1)^2+(r\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2,\quad (\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R})$$

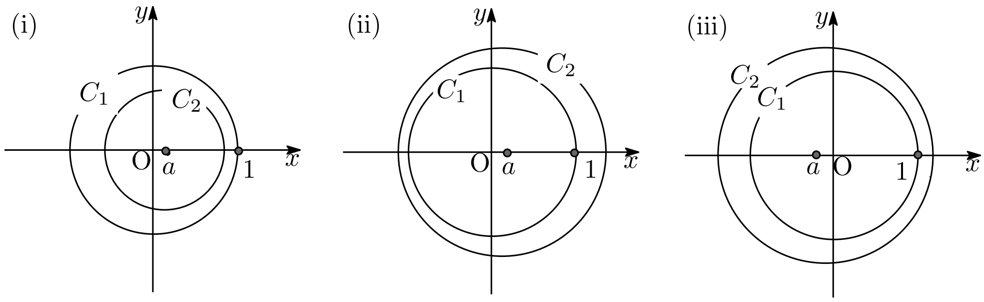
の $(\theta_1,\theta_2)=(0,0)$ におけるヘッセ行列

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ.

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ.

(3) 図 (i)(ii)(iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1,0)$，$\boldsymbol{x}_2^* = (a+r,0)$ が極値問題の極小解であるかどうか判定せよ．



(九州大 2021)　　(m20214712)

0.228 (1) 式 ① を x で微分せよ．

$$f(x) = 2x + 3 + \int_0^x f(t)dt \quad \cdots ①$$

(2) 式 ① を満たす $f(x)$ を求めよ．

(3) a, b を実定数として，式 ② の微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \cdots ②$$

は $x = e^t$ とおくことにより式 ③ になることを示せ．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad \cdots ③$$

(4) 式 ④ の微分方程式の一般解 y を x の関数として求めよ．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad \cdots ④$$

(九州大 2022)　　(m20224701)

0.229 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1，点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2，点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ．ただし，λ_j $(j=1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1$ を満たす実数とする．

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1\nabla\lambda_2 - \lambda_2\nabla\lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi} = \lambda_2\nabla\lambda_3 - \lambda_3\nabla\lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を，a, b, c, x, y, z を用いて表せ．

(3) 関数 $f = f(x,y,z)$ を $f(x,y,z) = e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z) + x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.230 n は 2 以上の自然数とし，k は 1 以上 n 未満の自然数とする．n 個の相異なる自然数 $1,\cdots,n$ の順列すべての中から等確率で選んだものを $(X_1,\cdots,X_n)$ とする．いま，k 番目までの自然数 $X_1,\cdots,X_k$ の中の最小のものを Y で表す．次に，$k+1$ 番目以降の自然数 $X_{k+1},\cdots,X_n$ の中で Y より小さいもののうち添え字が最小のものを X_j として，$Z=X_j$ とする．そのような X_j が存在しない場合は $Z=X_n$ とする．このとき，$Z=1$ の確率 $P_n(k)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $i\in\{1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の確率を求めよ．

(2) $i\in\{k+1,\cdots,n\}$ について，$X_i=1$ の条件の下で，$X_1,\cdots,X_{i-1}$ の中の最小値の自然数が Y である条件つき確率を求めよ．

(3) $P_n(k)$ を求めよ．解答には関数 $H(m)=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\frac{1}{\ell}$ を用いてよい．

(4) $P_{10}(k)$ を最大にする k と，その k に対する $P_{10}(k)$ の概数を求めよ．$H(9)=2.829$ を用いてよい．

(九州大 2022)　　(m20224703)

0.231 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&-9\\-20&-3&10\\4&1&0\end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224704)

0.232 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える．

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\cdots(*)$$

(1) ア）行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ．

イ）x_2,y_2 を用いて，x_1,y_1 をそれぞれ書き表せ．

(2) 原点を中心とした単位円 C : $x^2+y^2=1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x,y の方程式を求めよ．

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される．

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア～ウを埋めよ．

$$E'\ :\ \left(\boxed{\text{ア}}\right)x^2+\left(\boxed{\text{イ}}\right)xy+\left(\boxed{\text{ウ}}\right)y^2=1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.233 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する.

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$G_n=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx & for\ \ n=1\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{n-1}}{1+\exp(x^n)}dx & for\ \ n=2,3,4,\cdots\end{cases}$$

(1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ. ただし積分定数を C とせよ.

(2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ.

(3) 一般の正の整数 n について, 定積分 G_n を求めよ.

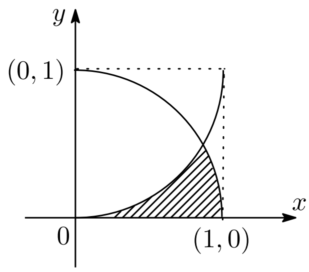
(九州大 2022) (m20224706)

0.234 第 1 象限において, 円 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$ および x 軸で囲まれる部分を A とする（図の斜線部）.

(1) 2 つの円の第 1 象限内の交点を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cdot e^{2x}dx$ を求めよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_A x^3\cdot e^{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.



(九州大 2022) (m20224707)

0.235 次の行列 A について, 以下の問いに答えよ. a, b は実数である.

$$A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ.

(2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった. このとき, a, b の満たすべき条件を示せ.

$$P=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)