

[選択項目] 年度：1991～2023 年 大学：九州芸術工科大

0.1 数列 $\{a_n\}$ において、 $a_1 = a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ であるとき、次の問に答えよ。

- (1) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくと、 S_n と a_{n+2} の間に成り立つ関係式を推定せよ。
- (2) 上の問で推定した関係式を数学的帰納法によって証明せよ。

(九州芸術工科大 1999) (m19994801)

0.2 x の関数 $f(x) = \int_0^1 \sqrt{|t-x|} dt$ について、次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大・最小値を求めよ。

(九州芸術工科大 1999) (m19994802)

0.3 以下に答えよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示し、これを使って $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ を求めよ。
- (3) $\frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ を微分せよ。

(九州芸術工科大 2000) (m20004801)

0.4 次の問に答えよ。ただし、 \log は自然対数を表す。自然対数の底は $e = 2.718\dots$ である。

- (1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

- (2) 極限值に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ。

$$\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x \log x = 0, \quad \lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x^x = 1$$

- (3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する。

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x \log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき、 f, g の各々について、 $[0, 1]$ における最大値と最小値を求めよ。

- (4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか、それとも無限大に発散するか、いずれであるか判定せよ。その理由も示せ。

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}} dx$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004802)

0.5 以下の問に答えよ。

- (1) $\int_{-1}^2 |2 - x - x^2| dx$ を求めよ。
- (2) $\int x \log x dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ を証明せよ.

(4) $F(x) = \int_a^{-x^2} f(t)dt$ のとき, $F'(x)$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004803)

0.6 微分方程式 $xy + y' = 0$ を解け.

(九州芸術工科大 2000) (m20004804)

0.7 n 次単位行列を E , すべての成分が 1 である n 次正方行列を J で表す. a, b は正の実数として, $A = aE + bJ$ とおく. \mathbf{x} は n 次元列ベクトル (縦ベクトル) で, その第 i 成分を x_i とする ($i = 1, 2, \dots, n$). 次の間に答えよ.

(1) J^2 および $J\mathbf{x}$ を求めよ.

(2) x_1, x_2, \dots, x_n を未知数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (零ベクトル) の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみであることを証明せよ. ただし, A の逆行列が存在することを用いずに示すこと.

(3) A の逆行列は $sE + tJ$ の形で与えられることがわかっている (s, t は実数). これを用いて, A の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004805)

0.8 以下に答えよ.

(1) 次の行列が直交行列になるような a, b, c の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, 次式を満たす x, y, z を求めよ.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004806)

0.9 α が行列 A の固有値であるとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(1) α は tA の固有値である. ただし, tA は A の転置行列である.

(2) k が自然数のとき, α^k は $A^k = \overbrace{A \cdots A}^k$ の固有値である.

(3) A が正則であるとき, α^{-1} は A^{-1} の固有値である.

(九州芸術工科大 2000) (m20004807)

0.10 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ を求めよ.

(2) 以下に順に答えよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

(b) $1 + \cos x = 2 \left(\sin \frac{\pi - x}{2} \right)^2$ を示せ.

(c) 上の (a) と (b) を使って, $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ を求めよ.

(3) $\frac{d}{dx} e^{x^x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014801)

0.11 $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 (逆正接関数) を $y = \tan^{-1} x$ と書く. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $y = \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ.

(2) $y = \tan^{-1} x$ の不定積分を部分積分法を用いて求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014802)

0.12 (1) $x^n \log x$ を積分せよ. ただし, \log は自然対数.

(2) $I_1 = \int e^{ax} \sin bxdx$, $I_2 = \int e^{ax} \cos bxdx$ を求めよ.

(3) 次の証明せよ. $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$

(九州芸術工科大 2001) (m20014803)

0.13 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列が収束することを, 「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し, その極限値を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014804)

0.14 E を 4 次単位行列とし, A を $A^2 = O$ (O は零行列) なる 4 次正方行列とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 行列 $E + A$ が逆行列を持つことを示し, その逆行列が $E - A$ で与えられることを示せ.

(2) 上の問 (1) を利用して, 次の行列 B の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし, } a, b, c \text{ は定数とする.}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

0.15 以下が成り立つことを示せ.

(1) A が正則のとき, $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$.

(2) 正方行列 A が正則行列 P によって対角化され, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となるとき, 自然数 n に対して, $P^{-1}A^n P = D^n$.

(3) 正方行列 A, B に対し $AB = A, BA = B$ のとき自然数 n に対して, $A^n = A$.

(九州芸術工科大 2001) (m20014806)

0.16 次の行列式を x について因数分解した形で求めよ. ただし, a, b, c は定数とする.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014807)

0.17 次の連立1次方程式に対して係数行列の行列式の値, 係数行列の逆行列, および, 解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ x - y = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014808)

0.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ. また, A^n を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014809)

0.19 (1) $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ を使って以下を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a) $a > 0, x > 0$ のとき, $e^{ax} \geq 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2}$ であることを使って $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-ax}$ を求めよ.

(b) 上の結果を使って $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x}$ を求めよ.

(c) 同じく (a) の結果を使って $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034801)

0.20 (1) 次の関数 $F(x)$ を x で微分せよ. $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$

(2) 次を求めよ. $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$

(九州芸術工科大 2003) (m20034802)

0.21 曲面 $z = x^2 + y^2$ の点 $(3, 4, 25)$ における接平面と法線の式を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034803)

0.22 ベクトル $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$ に対して $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ とおくとき, λ, \mathbf{c} を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034804)

0.23 (1) 正方行列 C の対角成分の和を $\text{tr}(C)$ と記す, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ を示せ.

(2) $AB = BA$, また, C が直交行列であるとき, ${}^t C A C$ と ${}^t C B C$ の積が交換可能であることを示せ.

(3) n 次の正則な正方行列 A, B に対して, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ であることを示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034805)

0.24 行列式 $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$ を2乗して, $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$ を示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034806)

0.25 $a > b > 0$ のとき, 線形変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって円 $x^2 + y^2 = 1$ がどのような図形に写像されるか式と図で示せ. また, それに続けて線形変換 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をほどこすとき, どのような図形に写像されるか式と図で示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034807)

0.26 2次形式 $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$ の標準形を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034808)

- 0.27** (1) 関数 $f(x) = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.
 (2) 関数 $g(x) = x^3 \sin x$ の n 次導関数を求めよ.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054801)

- 0.28** 積分 $\int_0^1 \log x dx$ は広義積分である. これを計算せよ.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054802)

- 0.29** (1) 3次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.
 (2) a を実数とする. このとき, 3次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ が逆行列を持つための条件を求めよ.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054803)

- 0.30** E を 3 次単位行列とし, A, X, Y を 3 次正方行列で

$$AX = E, \quad YA = E$$

を満たすものとする. このとき, $X = Y$ となることを証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054804)

- 0.31** (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ を求めよ. (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{1 - \cos x}$ を求めよ.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054805)

- 0.32** (1) $x^2 \log x$ を積分せよ.
 (2) 微分方程式 $x^2 y' + y^2 = 0$ を解け.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054806)

- 0.33** (1) $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$ のとき $\frac{dF}{dx}$ を求めよ.
 (2) $\sin(\pi - x) = \sin x$ を利用して
 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ を証明せよ.
 (九州芸術工科大 2005) (m20054807)

- 0.34** 以下の問に答えよ. ただし, ${}^t C$ は行列 C の転置行列, $\text{tr}(C)$ は正方行列 C の対角成分の和を表す.

- (1) 行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対して, AB の第 i 行第 j 列の要素がどのように表せるか示せ.
 (2) 正方行列 A , 正則行列 P に対して, $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ となることを示せ.
 (3) $m \times n$ 行列 A に対し $\text{tr}(A^t A) = \text{tr}({}^t A A)$ であることを示せ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054808)

- 0.35** 次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2005) (m20054809)

0.36 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054810)

0.37 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a, b を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054811)