

[選択項目] 年度：1991～2023 年 大学：九州芸術工科大

0.1 数列  $\{a_n\}$  において、 $a_1 = a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  であるとき、次の問に答えよ。

- (1)  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  とおくと、 $S_n$  と  $a_{n+2}$  の間に成り立つ関係式を推定せよ。
- (2) 上の問で推定した関係式を数学的帰納法によって証明せよ。

(九州芸術工科大 1999) (m19994801)

0.2  $x$  の関数  $f(x) = \int_0^1 \sqrt{|t-x|} dt$  について、次の問に答えよ。

- (1)  $f(x)$  の微分  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $-1 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最大・最小値を求めよ。

(九州芸術工科大 1999) (m19994802)

0.3 以下に答えよ。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  を示し、これを使って  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$  を求めよ。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{a^2 - x}}{x}$  を求めよ。
- (3)  $\frac{1}{1 + \sqrt{x}}$  を微分せよ。

(九州芸術工科大 2000) (m20004801)

0.4 次の問に答えよ。ただし、 $\log$  は自然対数を表す。自然対数の底は  $e = 2.718\dots$  である。

- (1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

- (2) 極限值に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ。

$$\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x \log x = 0, \quad \lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x^x = 1$$

- (3) 閉区間  $[0, 1]$  上の関数  $f, g$  を次のように定義する。

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x \log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき、 $f, g$  の各々について、 $[0, 1]$  における最大値と最小値を求めよ。

- (4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか、それとも無限大に発散するか、いずれであるか判定せよ。その理由も示せ。

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}} dx$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004802)

0.5 以下の問に答えよ。

- (1)  $\int_{-1}^2 |2 - x - x^2| dx$  を求めよ。
- (2)  $\int x \log x dx$  を求めよ。

(3)  $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$  を証明せよ.

(4)  $F(x) = \int_a^{-x^2} f(t)dt$  のとき,  $F'(x)$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004803)

0.6 微分方程式  $xy + y' = 0$  を解け.

(九州芸術工科大 2000) (m20004804)

0.7  $n$  次単位行列を  $E$ , すべての成分が 1 である  $n$  次正方行列を  $J$  で表す.  $a, b$  は正の実数として,  $A = aE + bJ$  とおく.  $\mathbf{x}$  は  $n$  次元列ベクトル (縦ベクトル) で, その第  $i$  成分を  $x_i$  とする ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 次の間に答えよ.

(1)  $J^2$  および  $J\mathbf{x}$  を求めよ.

(2)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を未知数とする連立 1 次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (零ベクトル) の解は  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  のみであることを証明せよ. ただし,  $A$  の逆行列が存在することを用いずに示すこと.

(3)  $A$  の逆行列は  $sE + tJ$  の形で与えられることがわかっている ( $s, t$  は実数). これを用いて,  $A$  の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004805)

0.8 以下に答えよ.

(1) 次の行列が直交行列になるような  $a, b, c$  の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ b & c & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列の行列式と逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, 次式を満たす  $x, y, z$  を求めよ.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004806)

0.9  $\alpha$  が行列  $A$  の固有値であるとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(1)  $\alpha$  は  ${}^tA$  の固有値である. ただし,  ${}^tA$  は  $A$  の転置行列である.

(2)  $k$  が自然数のとき,  $\alpha^k$  は  $A^k = \overbrace{A \cdots A}^k$  の固有値である.

(3)  $A$  が正則であるとき,  $\alpha^{-1}$  は  $A^{-1}$  の固有値である.

(九州芸術工科大 2000) (m20004807)

0.10 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$  を求めよ.

(2) 以下に順に答えよ.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  を示せ.

(b)  $1 + \cos x = 2 \left( \sin \frac{\pi - x}{2} \right)^2$  を示せ.

(c) 上の (a) と (b) を使って,  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$  を求めよ.

(3)  $\frac{d}{dx} e^{x^x}$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014801)

**0.11**  $y = \tan x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) の逆関数 (逆正接関数) を  $y = \tan^{-1} x$  と書く. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1)  $y = \tan^{-1} x$  の導関数を求めよ.

(2)  $y = \tan^{-1} x$  の不定積分を部分積分法を用いて求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014802)

**0.12** (1)  $x^n \log x$  を積分せよ. ただし,  $\log$  は自然対数.

(2)  $I_1 = \int e^{ax} \sin bxdx$ ,  $I_2 = \int e^{ax} \cos bxdx$  を求めよ.

(3) 次の証明せよ.  $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$

(九州芸術工科大 2001) (m20014803)

**0.13**  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で与えられる数列が収束することを, 「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し, その極限値を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014804)

**0.14**  $E$  を 4 次単位行列とし,  $A$  を  $A^2 = O$  ( $O$  は零行列) なる 4 次正方行列とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 行列  $E + A$  が逆行列を持つことを示し, その逆行列が  $E - A$  で与えられることを示せ.

(2) 上の問 (1) を利用して, 次の行列  $B$  の逆行列を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし, } a, b, c \text{ は定数とする.}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014805)

**0.15** 以下が成り立つことを示せ.

(1)  $A$  が正則のとき,  $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$ .

(2) 正方行列  $A$  が正則行列  $P$  によって対角化され,  $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  となるとき, 自然数  $n$  に対して,  $P^{-1}A^n P = D^n$ .

(3) 正方行列  $A, B$  に対し  $AB = A, BA = B$  のとき自然数  $n$  に対して,  $A^n = A$ .

(九州芸術工科大 2001) (m20014806)

**0.16** 次の行列式を  $x$  について因数分解した形で求めよ. ただし,  $a, b, c$  は定数とする.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014807)

0.17 次の連立1次方程式に対して係数行列の行列式の値, 係数行列の逆行列, および, 解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ x - y = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014808)

0.18 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  に対して固有値と固有ベクトルを求め,  $A$  を対角化せよ. また,  $A^n$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2001) (m20014809)

0.19 (1)  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  を使って以下を求めよ.

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(2) (a)  $a > 0, x > 0$  のとき,  $e^{ax} \geq 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2}$  であることを使って  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-ax}$  を求めよ.

(b) 上の結果を使って  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 e^{-x}$  を求めよ.

(c) 同じく (a) の結果を使って  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034801)

0.20 (1) 次の関数  $F(x)$  を  $x$  で微分せよ.  $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$

(2) 次を求めよ.  $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$

(九州芸術工科大 2003) (m20034802)

0.21 曲面  $z = x^2 + y^2$  の点  $(3, 4, 25)$  における接平面と法線の式を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034803)

0.22 ベクトル  $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$  に対して  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$  とおくとき,  $\lambda, \mathbf{c}$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034804)

0.23 (1) 正方行列  $C$  の対角成分の和を  $\text{tr}(C)$  と記す,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  を示せ.

(2)  $AB = BA$ , また,  $C$  が直交行列であるとき,  ${}^tCAC$  と  ${}^tCBC$  の積が交換可能であることを示せ.

(3)  $n$  次の正則な正方行列  $A, B$  に対して,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  であることを示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034805)

0.24 行列式  $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$  を2乗して,  $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$  を示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034806)

0.25  $a > b > 0$  のとき, 線形変換  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  によって円  $x^2 + y^2 = 1$  がどのような図形に写像されるか式と図で示せ. また, それに続けて線形変換  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  をほどこすとき, どのような図形に写像されるか式と図で示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034807)

0.26 2次形式  $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz$  の標準形を求めよ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034808)

- 0.27** (1) 関数  $f(x) = \sin x$  の  $n$  次導関数を求めよ.  
 (2) 関数  $g(x) = x^3 \sin x$  の  $n$  次導関数を求めよ.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054801)

- 0.28** 積分  $\int_0^1 \log x dx$  は広義積分である. これを計算せよ.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054802)

- 0.29** (1) 3次正方行列  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  の逆行列を求めよ.  
 (2)  $a$  を実数とする. このとき, 3次正方行列  $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$  が逆行列を持つための条件を求めよ.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054803)

- 0.30**  $E$  を 3 次単位行列とし,  $A, X, Y$  を 3 次正方行列で

$$AX = E, \quad YA = E$$

を満たすものとする. このとき,  $X = Y$  となることを証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054804)

- 0.31** (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$  を求めよ. (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cos x}{1-\cos x}$  を求めよ.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054805)

- 0.32** (1)  $x^2 \log x$  を積分せよ.  
 (2) 微分方程式  $x^2 y' + y^2 = 0$  を解け.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054806)

- 0.33** (1)  $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$  のとき  $\frac{dF}{dx}$  を求めよ.  
 (2)  $\sin(\pi-x) = \sin x$  を利用して  
 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  を証明せよ.  
 (九州芸術工科大 2005) (m20054807)

- 0.34** 以下の問に答えよ. ただし,  ${}^t C$  は行列  $C$  の転置行列,  $\text{tr}(C)$  は正方行列  $C$  の対角成分の和を表す.

- (1) 行列  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  に対して,  $AB$  の第  $i$  行第  $j$  列の要素がどのように表せるか示せ.  
 (2) 正方行列  $A$ , 正則行列  $P$  に対して,  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$  となることを示せ.  
 (3)  $m \times n$  行列  $A$  に対し  $\text{tr}(A^t A) = \text{tr}({}^t A A)$  であることを示せ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054808)

- 0.35** 次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2005) (m20054809)

**0.36** 行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054810)

**0.37** 楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の定数  $a, b$  を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054811)