[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：三重大

0.1 次の式を因数分解せよ．

(1) $pqx^2-(p^2-q^2)x-pq$　　(2) $x^3-2x^2-16x+32$

(三重大 2002)　(m20023101)

0.2 $a \leq x \leq a+1$ において関数 $f(x)=x^2-10x+8a$ の最小値を $g(a)$ とするとき，$g(a)$ を最小にする a の値と最小値を求めよ．

(三重大 2002)　(m20023102)

0.3 ２次方程式 $x^2-12x+k=0$ の 1 つの解が他の解の 2 乗になるとき，定数 k の値を定めよ．

(三重大 2002)　(m20023103)

0.4 点 $\mathrm{P}(x,x^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点で 2 点 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(3,9)$ の間にある．このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ．

(三重大 2002)　(m20023104)

0.5 a を実数とする放物線 $C: y=x^2+2ax-a^2+5a+4$ が与えられたとき，以下の問いに答えよ．

(1) a が動くとき，放物線 C の頂点の軌跡が描く放物線の式を求めよ．

(2) 放物線 C が他の放物線 $y=-x^2-6x$ と 2 点で交わるときの a の範囲を求めよ．

(三重大 2002)　(m20023105)

0.6 ３次関数 $f(x)=-x^3+ax^2+x$ が，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で極大値，極小値をとるような定数 a の値の範囲を定めよ．

(三重大 2002)　(m20023106)

0.7 関数の微分の定義は次式で与えられる．

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという．

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい．

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば，$f(x)+g(x)$ は微分可能であり，次の公式が成り立つ．

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

(三重大 2002)　(m20023107)

0.8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は，$x=1$ で極小値 $y=-5$ をとる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a と b を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の極大値を求めよ．

(三重大 2002)　(m20023108)

0.9 任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ および $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=2$ の 2 つの条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(三重大 2002)　(m20023109)

0.10 次の不定積分を計算しなさい．　$\displaystyle\int x^2e^x dx$

(三重大 2002)　(m20023110)

0.11 底面の半径が a，高さが a の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と 30° の傾きをなす平面で直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さいほうの立体の体積を求めよ．

(三重大 2002) (m20023111)

0.12 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\{s_2(x)\}^2 dx = 1\ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x)dx = 0$$

(1) 定積分 $f(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい．(定積分の形になる．)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{x - a\sin x - b\sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい．

(三重大 2002) (m20023112)

0.13 $y = f(x)$ に関して，次の微分方程式の一般解を求めなさい． $x^2\dfrac{dy}{dx} = y$

(三重大 2002) (m20023113)

0.14 次の 4 つのベクトルの中から，一次独立な 3 つのベクトルの組を全てあげ，その理由を示しなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2002) (m20023114)

0.15 m は実数とする．

$A = \begin{pmatrix} m & m+3 \\ 1-m & -m \end{pmatrix}$ について

(1) A が逆行列を持たないとき，A^2 を求めよ．

(2) A の逆行列が A 自身であるように，m の値を定めよ．

(三重大 2002) (m20023115)

0.16 連立方程式 $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ を，逆行列を用いて解きなさい．

(三重大 2002) (m20023116)

0.17 ベクトル $(1, 2)$ に行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のように（一般には）向きと大きさが異なるベクトル $(-3, -3)$ が得られるが，他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル (x, y) が存在することもある．後者のようなベクトルは，この行列の**固有ベクトル**と呼ばれ，その長さが何倍となったか（a の値）は**固有値**と呼ばれる．このような方向をもったベクトル (x, y) を求めよ．また，ベクトルの長さは何倍になっているか．

(三重大 2002) (m20023117)

0.18 関数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y - (mx+b)\} = 0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x = 1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y = mx + b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい)．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

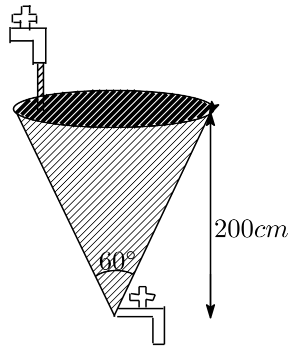
(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003) (m20033101)

0.19 次の関数の第 1 次導関数を求めなさい． $y = a^x$ （ただし，$a > 0$）

(三重大 2003) (m20033102)

0.20 高さ 200cm，開き角 60° の直円錐状の容器がある．頂点を逆さにして，上からホースで，毎秒 300cc の水を入れる．最初，容器に高さ 100cm のところまで水が入っていた．容器の厚さは無視できるとして，以下の問に答えよ．



(1) 水が一杯になるには，何秒を要するか？

(2) 水を入れ始めてから t 秒後に，容器の水の高さは h cm となった．t と h の関係式を示せ．

(3) 水が一杯になったので，水を入れるのを止めた．次に底の蛇口を開いて容器内の水を流した．流出する水の量は，高さ h cm に比例して，毎秒 $20h$ cc であった．底の蛇口を開いてから s 秒後に容器の水の高さは h cm となったとして，s と h の関係式を示せ．

(4) 容器が空になるには，何秒を要するか？

(三重大 2003) (m20033103)

0.21 次の関数の不定積分を求めなさい． $y = \cos^2 x$

(三重大 2003) (m20033104)

0.22 曲線 $f(x) = x^3 - a^2x$ と直線 $g(x) = a^2x$ がある（a は正の定数）．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概略図を描け（x 軸との交点と極大・極小点を明示せよ）．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の交わる 3 つの交点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$ を求めよ $(x_1 < x_2 < x_3)$.

(3) 3 つの交点のうち，点 A_2 点 A_3 と曲線によって囲まれる面積 S を求めよ．

(三重大 2003) (m20033105)

0.23 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の極大値，及び，極小値の値と，その点の座標の値を求めよ．次に曲線 $f(x, y) = 0$ のグラフの概形を x–y 平面上に描け．また，同じ x–y 平面上に極値も書き込め．

(三重大 2003) (m20033106)

0.24 次の微分方程式の一般解を求めなさい． $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

(三重大 2003) (m20033107)

0.25 3 点 $P_1(3, -2, -1), P_2(1, 3, 4), P_3(2, 1, -2)$ を通る平面の方程式を求めよ．また，その平面と原点 O との最短距離を求めよ．

(三重大 2003) (m20033108)

0.26 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 2, -1)$，$\boldsymbol{b} = (4, 1, 2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう 2 辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003)　　(m20033109)

0.27 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，x, y, z および w を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033110)

0.28 次の行列の行列式を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2003)　　(m20033111)

0.29 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで，$a, b, c, d, e, f, l, m, n$ は定数として，方程式 $\det A = 0$ が 3 次元空間（xyz 空間）上の平面の式を与えることを示せ．また，この平面の法線ベクトルを求めよ．

(2) この平面に直線 $\dfrac{x-d}{l} = \dfrac{y-e}{m} = \dfrac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ．

(三重大 2003)　　(m20033112)

0.30 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 行列 A のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2003)　　(m20033113)

0.31 ある 3×3 の行列 A とベクトル $\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．これらの間に，$A\mathbf{a_1} = 2\mathbf{a_1}$, $A\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2}$, $A\mathbf{a_3} = 3\mathbf{a_3}$ の関係が成り立つとして，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ．

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を，$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \alpha_3\mathbf{a_3}$ で分解した．定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ を求めよ．

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ．

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033114)

0.32 $$y = \begin{cases} c(1-\sqrt{x}) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0\,,\ 1 < x) \end{cases}$$

が確率密度になるように c を求め，その分布の平均と分散を計算しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033115)

0.33 (1) 表が出る確率が p の硬貨を n 回投げたとき，x 回表が出る確率 $f(x;p)$ を求めよ．

(2) $f(x;p)$ が最大となる p の値 p_0 を求めよ．

(3) p_0 の x に関する期待値を $E[p_0]$ と書くとき，$E[p_0]=p$ となることを示せ．

ただし，$$E[p_0]=\sum_{x=0}^{n} p_0 f(x;p)$$ である．

(三重大 2003)　　(m20033116)

0.34 次の各不等式を解け．

(1) $\log_{\sqrt{a}}(x-5)<\log_a(x-2)$　ただし，a は 1 でない正の定数とする．

(2) $x^{\log x}>\dfrac{1000}{x^2}$　（対数の底は 10）

(三重大 2004)　　(m20043101)

0.35 方程式 $x^4-4kx^3+3=0$ が実数解を持つような, 実定数 k の値の範囲を求めよ．

(三重大 2004)　　(m20043102)

0.36 実数係数の 3 次方程式　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-p^2x+q=0$　(ただし，$p>0$)　について，次の (1) から (3) に答えよ．

(1) この方程式が 1 実根しかもたない条件を示し，それぞれの場合についてグラフの概形を描け．

(2) この方程式が重根をもつ条件を示し，それぞれの場合についてグラフの概形を描け．

(3) この方程式が 3 つの異なる実根をもつ条件を示し，それぞれの場合についてグラフの概形を描け．

(三重大 2004)　　(m20043103)

0.37 鉛直の壁に立てかけた長さ 5m の板がある．その下端を毎秒 16cm の速さで水平に引く場合について，次の (1)，(2) に答えよ．

(1) 板の下端が壁から 3m になった瞬間における板の上端の速さ，および加速度の大きさを求めよ．

(2) 板の下端が壁から 3m になった瞬間における板の中点の速さ，および加速度の大きさを求めよ．

(三重大 2004)　　(m20043104)

0.38 次の不定積分を求めなさい．

$$\int x^2e^{-x}dx$$

（三重大 2004）　　(m20043105)

0.39 以下の式で表される，二つの 3 次関数について， (1)〜(3) のすべてに答えよ．

$$y=-2x^3+8x^2-6x \qquad ①$$

$$y=x^3-2x^2+ax \qquad ②$$

(1) ①，②で表される 2 本の曲線は，原点 $(0,0)$ で交差する．このほかに，ただ 1 点で両者が接するような， a の値を求めよ．以下の問題で， a はこの値を取るとする．

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする．

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）．

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する．

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する．

また， xy 平面上に， ①, ② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ．

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

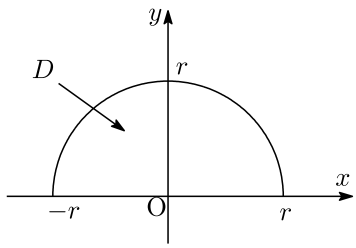
(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ．

（三重大 2004） (m20043106)

0.40 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$$\overline{y} = \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy \quad \text{（ただし, } S \text{ は図形 } D \text{ の面積）}$$

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



(三重大 2004) (m20043107)

0.41 空間座標系で，$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqq 1$$

をみたす点の集合の作る立体の体積を求めよ．

(三重大 2004) (m20043108)

0.42 次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = a^2(b+1) \qquad (a > 0\,,\ b > 0)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 一般解を求めよ.

(2) $x = 0$ で $y = 0$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$，および $x = \pi$ で $y = b$ のとき，y が無限大となる a の条件を求めよ.

(三重大 2004) (m20043109)

0.43 $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 5$$

(三重大 2004) (m20043110)

0.44 x, y, z に関する次の連立方程式

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + \alpha y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}\right.$$

が, 自明な解 ($x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0$) の他に解をもつための α の条件を求めなさい.

(三重大 2004) (m20043111)

0.45 以下のように行列表現された連立一次方程式がある． ただし, a は任意の実数である．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1-a & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) a のすべての値について, 行列 $\boldsymbol{A}$ および行列 $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$（$\boldsymbol{A}$ の右側に $\boldsymbol{b}$ を並べたもの）のランク（階数）を求めなさい．

(2) (1) の結果を用いて, a のすべての値について解の存在性を答えなさい. また, 解が存在する場合は解を求めなさい．

(三重大 2004)　　(m20043112)

0.46 次の 2 つの行列 A, P について, P が逆行列をもち, $B = P^{-1}AP$ が対角行列 B となるように, 実数 x, y, α, β の値を求めなさい． ただし, $\alpha > \beta$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

（三重大 2004）　　(m20043113)

0.47 直交デカルト座標系における基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ のとき, 内積（スカラー積）$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の交角の余弦を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ の $\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ 上への正射影を求めよ．

(3) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ のとき, 外積（ベクトル積）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ. また, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めよ．

（三重大 2004）　　(m20043114)

0.48 (1) 平均 0, 分散 1 の正規分布 $f(x)$ に関する以下の問に答えよ．

(a) $f(x)$ の極大点における x と $f(x)$ の値を求めよ. また, $f(x)$ の変曲点 $(f''(x) = 0)$ における x と $f(x)$ の値を求めよ．

(b) $f(x)$ のグラフを図示せよ．

(2) 確率変数 X と Y に関する以下の問に答えよ．

(a) 任意の実数 λ に対して次の関係が成り立つことを示せ．

$$E[\{\lambda(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)\}^2] = \lambda^2\sigma_x^2 + 2\lambda\sigma_{xy} + \sigma_y^2$$

ここで, $E[X]$ は X の期待値を表し,

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[X] \\ \mu_y &= E[Y] \\ \sigma_x^2 &= E[(X - \mu_x)^2] \\ \sigma_y^2 &= E[(X - \mu_y)^2] \\ \sigma_{xy} &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \end{aligned}$$

とする．

(b) $E[\{\lambda(X - \mu_x) + (Y - \mu_y)\}^2] \geq 0$ となることを示せ．

(c) (a) , (b) の関係を利用して相関係数 ρ_{xy} が -1 から 1 の間の値を取ることをとる示せ．ただし, $\sigma_x^2\sigma_y^2 \neq 0$ とする．

(三重大 2004)　　(m20043115)

0.49 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(x^3+4)^2}dx$ を計算せよ.

(三重大 2005)　　(m20053101)

0.50 微分方程式 $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=xy$ を解け.

(三重大 2005)　　(m20053102)

0.51 ベクトル $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ に対して, $\vec{b}-k\vec{a}$ と $\vec{a}$ が垂直となる k の値を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053103)

0.52 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053104)

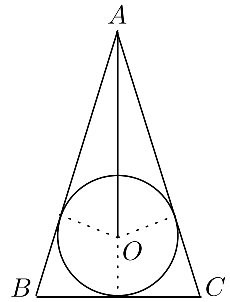
0.53 行列 $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{5} \\ b & 2b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, 実数 a , b の値を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053105)

0.54 図のように $AB=AC$ となる二等辺三角形 ABC が, 半径 1, 中心 O の円に外接する. 次の問に答えよ.

(1) $AO=x$ として, 二等辺三角形 ABC の面積 S を x で表せ.

(2) 面積 S が最小となる場合の各辺の長さを求めよ.



(三重大 2005)　　(m20053106)

0.55 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 A のすべての固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 正則行列 P によって行列 A を対角化したい. このような正則行列 P と, その逆行列 P^{-1}, および対角化された行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 行列 $P^{-1}A^nP$ を求めなさい. ただし, n は自然数とする.

(三重大 2005)　　(m20053107)

0.56 次の不定積分を求めなさい. ただし, e は自然数の底, ω は実定数とする.

$$\int e^x \cos \omega x dx$$

(三重大 2005)　　(m20053108)

0.57 次の常微分方程式に関する以下の問に答えなさい．ただし，e は自然対数の底，a，b はともに実定数とする．

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

(1) $f(x) = 0$ の場合の一般解を求めなさい．

(2) $f(x) = e^{bx}$ の場合の一般解を求めなさい．

(三重大 2005)　　(m20053109)

0.58 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ．
ここで，a，b，c，d は実数であり (ただし，$c \neq 0$)，$i^2 = -1$ である．

(2) λ_1，λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^{*} x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$，α^* は α の複素共役を表す．

(三重大 2005)　　(m20053110)

0.59 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ．

(三重大 2005)　　(m20053111)

0.60 以下の (1)〜(3) の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log_e x}{x^2} dx$　の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} d\theta$　の値を求めよ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．
$f(x) = 2 \cdot x - \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \cdot \cos t \cdot dt$

(三重大 2005)　　(m20053112)

0.61 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，連立一次方程式 $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつように k の値を定めよ．

(三重大 2005)　　(m20053113)

0.62 $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + x$ が $x = \pi/3$ で極大値をとる．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 係数 a，b の満足する条件を求めよ．

(2) この極大値のとりうる範囲を求めよ．

(三重大 2005)　　(m20053114)

0.63 円に内接する四角形 $ABCD$ があり，$AB = 4$，$BC = 3$，$CD = 2$，$DA = 1$ のとき，次の問に答えよ．

(1) $\cos A$ の値を求めよ．

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ．

(三重大 2005)　　(m20053115)

0.64 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1 \ : \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0,1,2)$ を含む平面の式を求めよ.

(2) l_1 および原点 $O(0,0,0)$ を含む平面の式を求めよ.

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta \leq 90^\circ$ とする .

(三重大 2005)　　(m20053116)

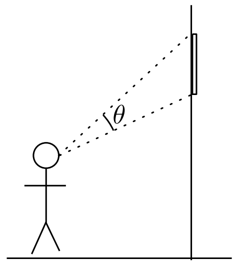
0.65 次の行列のランク（階数）を求めよ. また, 正則な場合は逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(三重大 2005)　　(m20053117)

0.66 (1) 関数 $y = \dfrac{x}{x^2+2}$ のグラフの概形を書きなさい.

(2) 美術館の壁にかけてある絵は, その上端と下端が, 観覧者の目の高さの上方 $2m$ および $1m$ のところにある. 絵画を最も観やすくするためには, 観覧者と壁との距離を何 m にすれば良いか？
（ここでは, 最も観やすいとは, 観覧者の縦方向の視角 θ が最大になれば良いとする.）



(三重大 2005)　　(m20053118)

0.67
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^4} & (x \geq 0\,,\ y \geq 0) \\ 0 & (\text{その他の}\ x\,,\ y) \end{cases}$$

の確率密度をもつ同時確率分布について以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ が確率密度になるように c の値を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の周辺確率密度 $f_1(x)$ を求めよ.

(3) 条件付き確率密度 $f(y \mid x)$ を求めよ.

(三重大 2005)　　(m20053119)

0.68 交通事故が一日に平均 2 回起こり, 火事が平均 1 回起こる町がある. 交通事故と火事はそれぞれ独立にポアソン分布 $f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$ に従って起こるものとして以下の問に答えよ. ただし, μ はポアソン分布の平均である.

(1) この町で交通事故も火事も起こらない日は 1 年 (365 日) に何日あるか, その期待値を求めよ.

(2) この町で交通事故と火事があわせて 2 回起こる日は 1 年に何日あるか, その期待値を求めよ.

e^{-x} の値は右の表の値を使用せよ.

x	e^{-x}
1	0.37
2	0.14
3	0.050
4	0.018
5	0.0067

(三重大 2005)　　(m20053120)

0.69 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

(2) $\displaystyle\int \{\sin(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)\}\,dt$ 　　ただし，ω，a，b は定数である．

(3) $\displaystyle\int \sin^3\theta\ d\theta$

(三重大 2006)　　(m20063101)

0.70 平面極座標系 (r, θ) において　$r = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ 　（ただし，ε は 0 または正の整数）
と表される曲線がある．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x, y) で表せ．

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ．

(a) $\varepsilon = 0$　　(b) $0 < \varepsilon < 1$　　(c) $\varepsilon = 1$　　(d) $\varepsilon > 1$

(三重大 2006)　　(m20063102)

0.71 次の行列式を因数分解せよ．　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063103)

0.72 次の固有方程式の固有値を求めよ．　$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

(三重大 2006)　　(m20063104)

0.73 直交座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ に関して，それぞれの位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OB} = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} \qquad \overrightarrow{OC} = c\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$$

で与えられる三点 A, B, C がある．以下の問に答えよ．

(1) 二点 AB 間の距離を求めよ．　　(2) AB と AC のなす角を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ はどのような三角形であるかを答えよ．

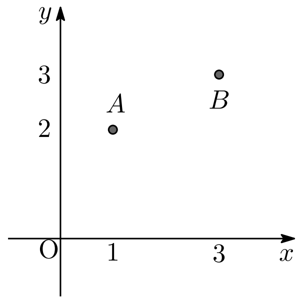
(三重大 2006)　　(m20063105)

0.74 xy 平面上の曲線 $y = f(x) = a\ \log(x+1)$ が 2 点 $A(1,2)$，$B(3,3)$ のできるかぎり近傍を通るように a の値を定めたい．次の (1)〜(3) の問に答えなさい．ただし，a は実数，log は自然対数の演算を表すものとする．

(1) A と点 $(1, f(1))$ との距離の二乗および B と点 $(3, f(3))$ との距離の二乗の合計を $g(a)$ とする時，$g(a)$ を a で表しなさい．

(2) $g(a)$ が最小となるような実数 a の値を求めなさい．

(3) $g(a)$ が最小となる時の $f(x)$ の曲線を右上の図に描き入れなさい．



(三重大 2006)　　(m20063106)

0.75 行列 $A = \begin{pmatrix} m & m+5 \\ 2-m & -m \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．ただし、m は実数とする．

(1) A が逆行列を持たないとき，A^2 を求めなさい．

(2) $A^{-1} = A$ となるような m の値を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063107)

0.76 1 辺が 10cm の正方形を底面にもつ，高さ 15cm の四角錐の容器を上下逆さまに置く．この容器に毎秒 $0.5\mathrm{cm}^3$ の割合で水を静かに注ぐとき、以下の問に答えなさい．

(1) t 秒後の水面の深さを $y(\mathrm{cm})$，水面の 1 辺の長さを $x(\mathrm{cm})$ としたとき，水面の面積 $S(\mathrm{cm}^2)$ と水の体積 $V(\mathrm{cm}^3)$ を x, y であらわせ．また，x と y の関係を示しなさい．

(2) 水面の 1 辺の長さ $x(\mathrm{cm})$ を t で表しなさい。

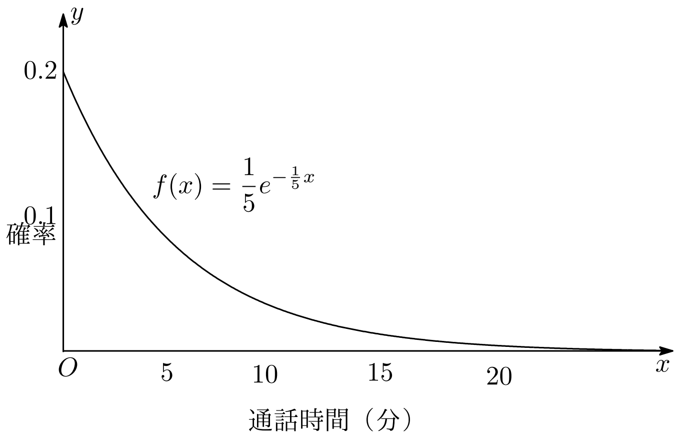
(3) 水面の面積 $S(\mathrm{cm}^2)$ を t で表し、S の増加する割合を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063108)

0.77 ある人の電話の通話時間 x(分) との頻度確率との関係（確率分布）が

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad (\ x > 0,\ e \text{ は自然対数の底})$$

で表されるものとする時，次の (1)〜(5) の問いに答えなさい．



(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めなさい．

(2) 通話時間が 10 分である（ちょうど 10 分後に通話が終了する）確率を求めなさい．

(3) 通話が 10 分以内に終了する確率を求めなさい．

(4) 通話を始めてから 10 分が経過している時点において，さらにその後 10 分以内に通話が終了する確率を求めなさい．

(5) この人の平均通話時間を求めなさい。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-ax} = 0$，$(a > 0)$ である．

(三重大 2006)　　(m20063109)

0.78 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1, -3, 1)$ と $\boldsymbol{n} = (3, 2, -2)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい．

(3) 点 $A = (1, 4, 0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063110)

0.79 (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ の第 n 次導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(3) (2) の結果を用いて，$g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063111)

0.80 (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, \sqrt{6}, 1)$ がなす角 θ を求めなさい．

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい．

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006)　　(m20063112)

0.81 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063113)

0.82 正の整数 N を 8 進数で表した時，n 桁の数になったとする．

(1) N の取り得る最大値と最小値（例えば，$n = 2$ に限れば，$8 \leqq N \leqq 63$）を n を用いて表せ.（答のみの記載でも良い）

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N}{n}$ を求めなさい.（途中経過を，詳しく答案用紙に記載せよ.）

(三重大 2006)　　(m20063114)

0.83 以下の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}\, dx$

(三重大 2006)　　(m20063115)

0.84 (1) 2 項定理を利用して，$(x - 2y)^8$ の x^6y^2 の係数を求めよ．

(2) $x + y + z = 18$ を満足する非負の整数の値の組 (x, y, z) の個数を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063116)

0.85 確率密度が　$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$　で与えられる分布について，次の問に答えよ．

(1) この分布の平均を求めよ．　(2) この分布の分散を求めよ．

(3) この分布のモーメント母関数を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063117)

0.86 (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．ここで，a, b, c, d は実数であり（ただし，$c \neq 0$），$i^2 = -1$ である．

(2) λ_1 , λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求め，エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} {x_{1j}}^* x_{2j}$ を計算せよ．ただし，x_{ij} は $\boldsymbol{x}_i$ の j 成分であり $(i, j = 1, 2)$，α^* は α の複素共役を表す．

(三重大 2006)　　(m20063118)

0.87 (1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ であることを導け．ただし，$\alpha > 0$ とする．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ．

(三重大 2006)　　(m20063119)

0.88 次の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} = (2,3,5),\ \boldsymbol{b} = (1,0,1)$ が一次独立であるかどうかを調べよ.

(2) $\boldsymbol{a} = (2,3,5),\ \boldsymbol{b} = (1,0,1),\ \boldsymbol{c} = (0,1,1)$ が一次独立であるかどうかを調べ，一次従属ならば，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せ.

(三重大 2007)　　(m20073101)

0.89 $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x-3y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4y+6z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ を満たす全ての λ と，それぞれの λ について $x,\ y,\ z$ の比 $x:y:z$ を求めよ．ただし，$x,\ y,\ z$ は全ては 0 でないとする.

(三重大 2007)　　(m20073102)

0.90 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置くことにより求めよ.

(三重大 2007)　　(m20073103)

0.91 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(三重大 2007)　　(m20073104)

0.92 以下の重積分の値を求めなさい.　$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$　　$D\ :\ x^2+y^2 \leqq 1,\quad x>0,\quad y>0$

(三重大 2007)　　(m20073105)

0.93 (1) 定数 $k_1,\ k_2$ を含む次の行列 A の階数 (rank) を，$k_1,\ k_2$ の値で場合分けして求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考え，その $\boldsymbol{v}$ が表す点の集合が x, y, z を軸とする直交座標系でどのような形状となるかを，行列 A の階数 (rank) ごとに説明しなさい.

(三重大 2007)　　(m20073106)

0.94 以下の関数を x で微分せよ.

(1) a^x　　(2) xa^x　　(3) $\dfrac{x^3}{x^2-1}$　　(4) $\displaystyle\int_0^x (x\cos t - \sin t)dt$

(三重大 2007)　　(m20073107)

0.95 以下の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^e \log_e x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx$

(三重大 2007)　　(m20073108)

0.96 n が自然数のとき，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成立することを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(三重大 2007)　　(m20073109)

0.97 以下の方程式および不等式が表す範囲を図示せよ.

(1) $y - x = \sqrt{1-2xy}$　　(2) $y - x < \sqrt{1-2xy}$

(三重大 2007)　　(m20073110)

0.98 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として，以下の設問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^2 - 5A + 6E$ および A^5 を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 2A - 8E = O$ を満たすとき，$(a+d\,,\ ad-bc)$ の値の組を全て求めよ．

(三重大 2007)　　(m20073111)

0.99 3次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，3個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,1)\,,\quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(2,1,0)\,,\quad \boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1)$$

を考える．以下の問いに答えなさい．ここで，上付き添え字 t は転置を表す．

(1) 方程式 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ から λ_1, λ_2, λ_3 を未知数とする連立方程式を導出しなさい．

(2) (1) の連立方程式を解くことにより，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が互いに一次独立であることを示しなさい．

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合で一意に表せることを証明しなさい．

(三重大 2007)　　(m20073112)

0.100 3次元空間における正規直交系 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を用いて，3点 P, Q, R の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ が，それぞれ，以下のように表されている．

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\,,\quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3\,,\quad \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

(1) $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ への正射影（点 Q から原点と P を通る直線に下ろした垂線の足を表す位置ベクトル）を，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合で表しなさい．

(2) ベクトル $\alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ が，$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ と垂直になるように，α, β を決めなさい．

(三重大 2007)　　(m20073113)

0.101 (1) $x^3 - 3x \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ ((1) の配点はわずか)．

(2) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ のグラフの概形を書きなさい．

(3) 方程式 $x^3 - 3x - y^2 = 0$ が表す曲線の概形を書きなさい．

<u>(2),(3) の回答上の注意</u>

グラフ（曲線）中には，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点の値，y 軸との交点の値を記入せよ．なお，極大値，極小値，最大値，最小値，変曲点，x 軸との交点，y 軸との交点は，それぞれ，存在しないかもしれないし，複数存在するかもしれない．また，各種の数値が無理数であった場合は，そのままの形で，解答用紙に記入しなさい．但し，有効数字2桁程度の近似値も求めないと，グラフが若干不正確になり, 若干減点となる．

(三重大 2007)　　(m20073114)

0.102 サイコロを6回振ったとき，次の事象が起こる確率を求めよ．

(1) 6回とも異なる目が出る．　　(2) 同じ目が一組出る（同じ目が2回だけ出る）．

(3) 同じ目が二組出る（同じ目が4回出る場合を除く）．

(三重大 2007)　　(m20073115)

0.103 次の関数 $f(x)=\begin{cases} c\cos x & \left(|x| \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(|x| > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が確率密度になるような定数 c の値を求めよ.
(2) その分布の分布関数を求めよ.
(3) その分布の平均を求めよ.
(4) その分布の分散を求めよ.

(三重大 2007) (m20073116)

0.104 対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ （ a, b, c は実数 ）は適当な直交行列 T（直交行列とは ${}^tT\ T=T\ {}^tT=I$ [単位行列] を満たす行列，${}^tT$ は T の転置行列）を使って，${}^tTAT=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる.

(1) 自然数 n に対して $A^n=T\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}{}^tT$ となることを示せ.

(2) $a+b=\alpha+\beta$, $ab-c^2=\alpha\beta$ の関係があることを示せ.

(3) $a=b=2$, $c=-1$ のとき，α, β の値を求めよ．また，直交行列 T も求めよ.

(三重大 2007) (m20073117)

0.105 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\ :\ x+y<1,\ 0<x,\ 0<y\}$ で定義された関数 $f(x,y)=xy(1-x-y)$ について考える.

(1) D における $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0, y_0) を求めよ.

(2) D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007) (m20073118)

0.106 次の行列 A に対して

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値方程式をたて，固有値をすべて求めよ．ただし，固有値はすべて整数値とする.

(2) 固有ベクトルをすべて求め，それを用いてこの行列を対角化（$P^tAP=E\ :\ E$ は単位行列）する行列 P を求めよ．ただし，P は直交行列である.

(三重大 2008) (m20083101)

0.107 次の関数 $f(x)$ が最小値をとるときの x の値 x_0 を a の関数 $x_0(a)$ として求め，その関係を図で示せ. また，関数 $f(x)$ のグラフの概形を書け.

$$f(x)=\frac{1}{2}(a-1)x^2+\frac{1}{4}x^4 \qquad (a>0)$$

(三重大 2008) (m20083102)

0.108 次の極限および級数を求めよ．（ただし，答だけでなく，なぜそうなるのかの説明も必要である．）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-an}$ （ただし，$a>0$）

(三重大 2008)　　(m20083103)

0.109 以下の微分方程式 (1) および積分方程式 (2) を解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = y$ を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよ．ただし，$f(0) = 1$ とする.

(2) $xf(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{x} f(x)dx + 1$ を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよ.

(三重大 2009)　　(m20093101)

0.110 $p(x) = 2xe^{-x^2}$,　$q(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ とする時,　$f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot q(t-x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい．グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること.

(三重大 2009)　　(m20093102)

0.111 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ が，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ かつ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，k, x, y は実数である.

(1) k の値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた k の値に対して $A\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた結果を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする.

(三重大 2009)　　(m20093103)

0.112 大きさや材質などが等しい白玉 7 個と赤玉 5 個の入った不透明な袋から手探りで 1 個ずつ玉を取り出す試行を 2 回繰り返す時，(1)〜(3) の設問に答えなさい．ただし，取り出した玉は元に戻さないものとする.

(1) 1 回目，2 回目とも赤玉を取り出す確率を求めよ.

(2) 2 回目に赤玉を取り出す確率を求めよ.

(3) 1 回目の試行結果を隠しておき，2 回目に取り出した玉が赤玉であることが分かった時，1 回目に取り出した玉も赤玉である確率（事後確率）を求めよ.

(三重大 2009)　　(m20093104)

0.113 次の (1) から (3) の微分方程式を，それぞれ与えられた初期条件のもとで解きなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 3y$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 5$）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$　（初期条件は $x = 1$ のとき $y = 3$）

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y)$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 0$）

(三重大 2009)　　(m20093105)

0.114 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

(2) A, B が同じ次数の正方行列であるとき，行列式 $\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix}$ の値を，$|A+2B|$ と $|A-B|$ の式で表しなさい．

この導出には，n 次正方行列 P，m 次正方行列 S，$m \times\ n$ の行列 R，$n \times\ m$ の零行列 O に対して，$\begin{vmatrix} P & O \\ R & S \end{vmatrix} = |P||S|$ が成り立つことを使ってよい．

(3) 問 (2) の結果を利用して，行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めなさい．

(三重大 2009)　　(m20093106)

0.115　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いについて答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化せよ．

(3) A^{23} を求めよ．

(三重大 2009)　　(m20093107)

0.116　以下の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 6x^5 - \frac{2}{x} dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty 9x^2 e^{-3x} dx$

(三重大 2009)　　(m20093108)

0.117　近似式について，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha << 1$ が成り立つ場合，$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$ と近似できる理由を述べよ．

(2) $\cos(\theta + \triangle\theta)$ を θ の周りで，$\triangle\theta^5$ までテーラー展開せよ．

(3) 上記の展開式の 1 次 $(\triangle\theta)$ までを利用して，$\cos(61^\circ)$ の近似値を求めよ．ただし，テーラー展開内の θ はラジアン表記であることに留意せよ．

(三重大 2009)　　(m20093109)

0.118　(1) 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 一般の実対称行列 B について，その固有値はすべて実数で，異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(三重大 2009)　　(m20093110)

0.119 (1) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+xy=x$ について，初期条件 $y(0)=0$ を満たす解を求めよ．

(2) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0$ の一般解を求めよ．

(三重大 2009)　　(m20093111)

0.120 (1) 次の微分方程式が完全 微分方程式であることを示しなさい．

$$(3x^2y-y^3)\,dx=(3y^2x-x^3)\,dy$$

(2) 完全微分方程式 $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ の一般解が

$$\int P(x,y)\,dx+\int\left\{Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right\}dy=c \quad \text{ただし } c \text{ は任意定数}$$

で与えられることを利用して，

$$(3x^2y-y^3)\,dx=(3y^2x-x^3)\,dy$$

の一般解を求めなさい．

(三重大 2010)　　(m20103101)

0.121 曲線 $y=x^3-6x^2+9x\quad(0\leqq x\leqq 4)$ がある. いま, 原点を通る直線を引いたところ, この直線は原点を含めて 3 点で曲線と交わり, 直線と曲線で囲まれた 2 つの領域ができた. この 2 つの領域の面積が等しいとき, この直線の方程式を求めなさい.

(三重大 2010)　　(m20103102)

0.122 (1) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}=8abc$$

(2) (1) を利用して, 次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 2010)　　(m20103103)

0.123 以下の文章の $\boxed{}$ に適切な語句または数式を入れ, 解答欄に記入しなさい.

大きさがで 0 ない 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある. いま, 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ と表し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\ ①\ }$

と表すことができる. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\ ②\ }$

である.

内積については, 次が成り立つ.

交換法則： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\ ③\ }$

分配法則： $\vec{a}\cdot(\,\vec{b}+\vec{c}\,)=\boxed{\ ④\ }$

ここで, $\vec{a}=(\,a_1,\ a_2,\ a_3\,)$, $\vec{b}=(\,b_1,\ b_2,\ b_3\,)$ とすると,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{⑤}$

である.

一方, 外積については, 次が成り立つ.

歪対称： $\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{⑥}$

分配法則： $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \boxed{⑦}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \boxed{⑧}$

ここで, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ であるとき,

$\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{⑨}$

である. ただし, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ は基本ベクトルである.

(三重大 2010) (m20103104)

0.124 次の方程式を z について解きなさい. 解が複素数になる場合には $a + bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) の形で表現しなさい.

$$z^3 = -64i$$

(三重大 2010) (m20103105)

0.125 次の関数を x と y についてそれぞれ偏微分しなさい. ただし, $x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1$ とする.

$$f(x, y) = \log_y x$$

(三重大 2010) (m20103106)

0.126 次の微分方程式の一般解を求めなさい. ただし, $x \neq 1$ とする.

$$(x - 1)\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$$

(三重大 2010) (m20103107)

0.127 次の積分の値を求めなさい. ただし, 定数 a は $a > 0$, e は自然対数の底とする.

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx$$

(三重大 2010) (m20103108)

0.128 (1) xy 平面内において, 3 点 $(-2,\ 19)$, $(1,\ -8)$, $(3,\ 4)$ を通る放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ を, 行列を使って求めることを考える. 放物線の式の係数を求める連立一次方程式を書いて, それを行列を使って表現しなさい.

(2) (1) で求めた行列を用いた式を解き, 放物線の式を求めなさい.

(3) xy 平面内の点を原点を中心として反時計まわりに 45°回転させる 1 次変換行列を求めなさい.

(4) (2) で求めた式で表される放物線を, 原点を中心として反時計まわりに 45°回転させて得られる放物線の式を求めなさい.

(三重大 2010) (m20103109)

0.129 次の行列 A の行列式 $|A|$ 及び逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2010) (m20103110)

0.130 $x_1,\ x_2,\ x_3$ についての連立方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ を考える. ただし

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とする. このとき $|B|\neq 0$ であるとして, 連立方程式の解が

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

とかけることを示せ.

(三重大 2010) (m20103111)

0.131 (1) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)\,dx$ としたとき, I^2 を極座標を用いて計算し $I=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となることを示せ.

ただし, $a>0$ とする. 次に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-x^2)\,dx$ の値を求めよ.

(2) $f(z)=\displaystyle\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt$ とするとき, n を 0 または正の整数として

(i) $f(n+1)=n!$, (ii) $f(n+\frac{1}{2})=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ となることを示せ.

(三重大 2010) (m20103112)

0.132 以下の関数を微分せよ.

(1) $y=\sin^2 x$ (2) $y=\dfrac{1}{(2x-3)^3}$ (3) $y=\log 3x$

(三重大 2010) (m20103113)

0.133 以下の不定積分を求めよ. 積分定数は C とする.

(1) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int\sin(\log x)\,dx$

(三重大 2010) (m20103114)

0.134 x,y 平面上に, 中心を点 (a,b) とし, 半径が r の円 A がある. A の外部にある原点 $O(0,0)$ から, A に引いた 2 本の接線の接点を P,Q とするとき, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ.

(2) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ.

(三重大 2010) (m20103115)

0.135 xy 平面上に, 曲線 $C\ :\ y=x^3+3x^2+x$ と点 $A(1,a)$ がある. A を通って C に 3 本の接線が引けるとき, a の値の範囲を求めよ.

(三重大 2010) (m20103116)

0.136 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^2-5A+6E$ および A^5 を求めよ.

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2-2A-8E=O$ を満たすとき, $a+d$ および $ad-bc$ を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103117)

0.137 指示に従って導関数を求めなさい.

(1) $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$ を x で微分せよ．e は自然対数の底を表す.

(2) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ を x で微分せよ．a は定数を示す.

(3) $x = \sin t,\ y = \cos 2t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(三重大 2011)　　(m20113101)

0.138 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$$

(三重大 2011)　　(m20113102)

0.139 定積分の値を求めよ．自然対数は log で表す.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-1}{x} \, dx$

(三重大 2011)　　(m20113103)

0.140 箱の中に 1 から 8 までの整数を記入した 8 枚のカードが入っている．この箱から任意にカードを 1 枚取り出し，その数字を調べてからもとの箱に戻す．これを 3 回繰り返し，取り出したカードの数字の最大値を X とする.

(1) $X \leqq 4$ となる確率を求めよ.

(2) $k = 1, 2, 3, \cdots .8$ として，$X = k$ となる確率を求めよ.

(3) 数列の和に関する下記の等式について，数学的帰納法を用いて証明せよ．n は自然数を示す.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

(4) (3) の等式を参照して X の期待値を求めよ.

(三重大 2011)　　(m20113104)

0.141 xy 平面上において，$(x,y) = (0,0),\ (-2,0)$ を直径の両端とする円 A，および $(x,y) = (0,0),\ (20,0)$ を直径の両端とする円 B がある．以下の問に答えよ.

(1) 円 A および円 B の両方に接する直線を全て求めよ.

(2) (1) で求めた直線のうち，y 軸と平行でないもの全てに接する任意の円について，円の半径 r をその円の中心座標を用いて表せ．円の中心座標については，適切な文字変数を与えて用いること.

(三重大 2011)　　(m20113105)

0.142 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ.

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x,y) を (x',y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ．また，直線に移された場合の直線の式を求めよ.

(2) 直線 $2x+y=0$ が，直線 $6x-5y=0$ に移されるとき，a,b の値を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113106)

0.143 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$ において，初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0$（ただし，$y'(x)\equiv dy(x)/dx$）を満たす解を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113107)

0.144 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqq\ x,\ 0\leqq\ y,\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$ で関数 $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ を考える．

(1) 領域 D における関数 $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(2) 領域 D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113108)

0.145 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化することにより，A^{17} を求めよ．

(3) 正則行列の持つ性質について列挙せよ．

(三重大 2011)　　(m20113109)

0.146 微分方程式 $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$ の解について，以下の問に答えよ．ただし，$\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ であり．初期条件は，$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$ とする．

(1) $\gamma=0,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(2) $\gamma=2,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(3) $\gamma=6,\ k=9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113110)

0.147 次の定積分を求めなさい．

$$\int_1^4 \frac{2x+7}{x^2+7x+10}\,dx$$

(三重大 2011)　　(m20113111)

0.148 次の関数の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ および 2 階偏導関数数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ を求めなさい．

$$f(x,y)=e^{xy^3}$$

(三重大 2011)　　(m20113112)

0.149 次の 2 重積分を求めなさい．

$$\iint_R xy\,dxdy \quad (\,R\,:\,x^2+y^2\leqq\ 9 \text{ かつ } x\geqq\ 0\,)$$

(三重大 2011)　　(m20113113)

0.150 次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{t+x(t)}{t}\ ,\quad x(1)=3$$

(三重大 2011)　　(m20113114)

0.151 以下の問に答えなさい.

(1) 次の行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ をひとつ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)$ を用いて, $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) n が正の整数のとき, 問 (2) の結果を利用して, A^n を求めなさい.

(三重大 2011)　　(m20113115)

0.152 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) A^n を求めよ.

(三重大 2012)　　(m20123101)

0.153 以下の (1) については不定積分を, (2) と (3) については積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{4x^2+2x+6}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-at}dt$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(三重大 2012)　　(m20123102)

0.154 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x\,,\ A_y\,,\ A_z)$ とベクトル $\boldsymbol{B} = (B_x\,,\ B_y\,,\ B_z)$ が与えられている. 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって構成される平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角度を θ とした場合に, $\cos\theta$ の値を求めよ.

(三重大 2012)　　(m20123103)

0.155 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

$$f(x) = \log(1+x)$$

(三重大 2012)　　(m20123104)

0.156 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_D xy^2\,dxdy \qquad \big(D\ :\ 0 \leqq\ x \leqq\ y \leqq\ 1\big)$$

(三重大 2012)　　(m20123105)

0.157 質量 m の物体が速度に比例する空気抵抗を重力と反対方向に受けながら落下しているものとする. ここで, 空気抵抗の速度に対する比例係数を k とし, 重力加速度を g とする. また, これら定数 $m,\ k,\ g$ は速度に関係なく一定であるとする.

(1) 落下している物体の運動を記述する微分方程式を落下速度 $v(t)$ を用いて表しなさい. ただし, 物体の落下方向を正の方向とする.

(2) 初速度 $v(0)=0$ として，(1) の微分方程式を解きなさい．また，時間経過とともに $v(t)$ がある一定の値に近づくことを示し，その値を求めなさい．

(三重大 2012)　　(m20123106)

0.158 以下で与えられる 3 次正方実数行列 A と可換な 3 次正方実数行列 X を下記 (1)〜(3) の手順により求めなさい．ここで λ および β は任意の実数とする．

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) 3 次単位行列 E は，任意の 3 次正方行列と可換であることを示しなさい．

(2) 行列 A を，E と以下に示す行列 F の線形結合の形で表しなさい．

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 上記の (1) および (2) の結果を用いて，行列 A と可換な行列 X を求めなさい．

(三重大 2012)　　(m20123107)

0.159 (1) 次の交代行列 $\boldsymbol{A}$（i 行 j 列成分 a_{ij} と j 行 i 列成分 a_{ji} が $a_{ij}=-a_{ji}$ を満たす行列）の行列式，固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の交代行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式は $|\boldsymbol{B}|=p^2$ とかける．p を求めよ．

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(3) n 行 n 列の正方行列 $\boldsymbol{C}$ が交代行列であり n が奇数のとき，行列式 $|\boldsymbol{C}|$ は 0 となることを示せ．

(三重大 2012)　　(m20123108)

0.160 関数 $z(x,y)=2x^3+6xy^2-6x+1$ の極値の値とその点の座標をすべて求めよ．

(三重大 2012)　　(m20123109)

0.161 xy 平面上の曲線 $r=(1+\cos\theta)$ の概形を描け．またこの曲線の全長を求めよ．ただし r は動径，θ は r が x 軸となす角で $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする．

(三重大 2012)　　(m20123110)

0.162 次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$　　(3) $y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$

(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$　　(5) $y=\log_a(x^2-1)\quad(a>0\,,\ a\neq 1)$

(三重大 2012)　　(m20123111)

0.163 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad \int x\cos^2 x\,dx$$

(三重大 2012)　　(m20123112)

0.164 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において，原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ．ただし，不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである．

(三重大 2012) (m20123113)

0.165 x, y 平面上についての以下の設問に答えよ．

(1) $|x|+|y|=1$ のグラフを描け．

(2) $|x+y|+|x-y|=1$ のグラフを描け．

(3) 実数 x, y が (2) の等式を満たすとき，$|x|+|y|$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(三重大 2012) (m20123114)

0.166 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は，投げ上げた地点を原点にとり，物体の運動する曲線を含む平面上で，地面上に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると，

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$
$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

で与えられる．この時の以下の設問に答えよ．ただし，g は重力の加速度である．

(1) この物体は，どのような曲線を描いて運動するか，軌跡の式を示して説明せよ．

(2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について，両者の速度と方向を求め，両者の関係を説明せよ．

(三重大 2012) (m20123115)

0.167 以下の関数を微分せよ．

(1) $y=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$ (2) $y=\sqrt{2x^2-3}$ (3) $y=e^x\sin x$

(4) $y=\dfrac{1}{\tan x}$ (5) $y=\log(x^2+1)$

(三重大 2012) (m20123116)

0.168 以下の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\sqrt{2x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int(\log x)^2\,dx$

(三重大 2012) (m20123117)

0.169 i を虚数単位とし，複素数 α を $\alpha=(x-i)^2$，$\overline{\alpha}$ を α の共役複素数とするとき，次の (1) と (2) に答えよ．

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=2$ を満たす実数 x の値を求めよ．

(2) $\alpha\times\overline{\alpha}=4$ を満たす実数 x の値を求めよ．

(三重大 2012) (m20123118)

0.170 1 から 9 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつ，合計 9 枚ある．A 君と B 君がそれぞれ 1 枚ずつ，A 君 $\to B$ 君の順にカードを取り出すとき，次の (1) と (2) に示される確率をそれぞれ求めよ．ただし，取り出したカードはもとにもどさないものとする．

(1) A 君が偶数のカードを取り出し，B 君が奇数のカードを取り出す確率

(2) B 君が取り出したカードが偶数であることが判明している時，A 君が取り出したカードも偶数である確率

(三重大 2012)　　(m20123119)

0.171 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値および，固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(三重大 2012)　　(m20123120)

0.172 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い．

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.173 $y = x\log x$ のとき，y' を求めよ．　ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ であり，$\log$ は自然対数である．

(三重大 2013)　　(m20133102)

0.174 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+1)^2}dx$ を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133103)

0.175 微分方程式の初期値問題 $y'' - 2y' + 5y = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ の解を求めよ．
ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(三重大 2013)　　(m20133104)

0.176 $2\times\ 2$ 行列 A が次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしている．

(a) $A^2 - 3A + 2E = O$　　(b) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

ただし，E は単位行列，O は零行列を表す，以下の問いに答えよ．

(1) $A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) A を求めよ．

(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133105)

0.177 y の x に関する 1 階微分を y' で表すとき，微分方程式

$$y' + 3y = \cos 2x$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで解きなさい．

(三重大 2013)　　(m20133106)

0.178 $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ のとき，y を x の関数と見なして y の極値を求めなさい．

(三重大 2013)　　(m20133107)

0.179 3 次元空間内で，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と円柱面 $x^2+y^2=x$ によって囲まれる部分の体積を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133108)

0.180 二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ が，$a_{n+1}=a_n+2b_n \quad b_{n+1}=-a_n+4b_n$ を満たす. ただし，$a_0=1,\ b_0=-1$ である．以下の問いに答えなさい.

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を求めなさい.

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 問 (3) の結果を利用して，A^n を求めなさい.

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133109)

0.181 変数 x に関する関数を微分せよ.

(1) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$　　(2) $y=x\log_e x$　　(3) $y=x^2\sin 2x$

(三重大 2013)　　(m20133110)

0.182 変数 x に関する関数の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx$

(三重大 2013)　　(m20133111)

0.183 行列に関する以下の問に答えよ.

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および BA を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を満たす実数 λ とベクトル $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ を求めよ．ただし，$x^2+y^2=1$ とする.

(三重大 2013)　　(m20133112)

0.184 x,y に関する下記の連立方程式について行列を用いて表せ．さらに，この連立方程式が解をもたないようにするための定数 a を行列式を用いて求めよ.

$$\begin{cases} (a-6)x+(a+1)y=0 \\ (a-10)x+a(a+1)y=a-2 \end{cases}$$

(三重大 2013)　　(m20133113)

0.185 放物線 $y=x^2+a$ と円 $x^2+y^2=9$ について，次の問に答えよ.

(1) この放物線と円が接するとき，定数 a の値を求めよ.

(2) 異なる 4 個の交点を持つような定数 a の値の範囲を求めよ.

(3) 共有点の個数と定数 a の値の関係を説明せよ.

(三重大 2013)　　(m20133114)

0.186 確率密度関数に関する以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x) = k\,(1 - |x|)$ （ただし，$|x| \leqq 1$）が確率密度関数となるように，定数 k の値を定めよ．ここで，確率密度関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 であるという性質がある．

(2) X を確率変数とするとき，(1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8)$ を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133115)

0.187 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$ （ただし，ω は定数）を考える．以下の問に答えよ．

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_z\, dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.188 (1) A を N 行 N 列の実対称行列，すなわち，${}^tA = A$ （${}^tA$ は A の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき，A の固有値 $a_i\,(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ と各 a_i に対する固有ベクトル $\overrightarrow{v}_i$ について以下のことを示せ．

(a) 固有値はすべて実数である．

(b) $a_i \neq a_j$ ならば，$\overrightarrow{v}_i$ と $\overrightarrow{v}_j$ は直交する．すなわち，内積 $(\overrightarrow{v}_i, \overrightarrow{v}_j) = 0$．[ただし，$\overrightarrow{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(a) 固有値の和と積を求めよ．

(b) B を対角化する行列，すなわち，UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133117)

0.189 微分可能な関数 $f(x)$ が，$f(x) = \cos^2(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\,\{\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\}\,dt$ を満たすとき，以下の問に答えなさい．

(1) 与式の両辺を微分して $f'(x)$ を求めなさい．

(2) $f''(x)$ を求めなさい．

(3) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ をそれぞれ求めなさい．

(4) 問 (1)〜(3) の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx$ を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143101)

0.190 以下の問に答えなさい．

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える．これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように，定数 k の値を定め，解を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考える． 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい．なお，写像 f の核は $\left\{\boldsymbol{x} \in R^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$（ $\boldsymbol{0}$ は R^4 の零ベクトルとする）として定義される．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014)　　(m20143102)

0.191 xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 2)$, $B(3, 4, 3)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい．

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.192 2 次の正方行列 A を用いると，点 $(2, 1)$, $(-1, 5)$ をそれぞれ点 $(4, 14)$, $(-13, 37)$ に移す 1 次変換を行うことができる．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) この 1 次変換のための行列 A を求めなさい．

(2) この行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143104)

0.193 次の微分方程式の解を求めなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

(三重大 2014)　　(m20143105)

0.194 次の関数を微分せよ．

(1) $y = (3x - 1)^3$　　(2) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

(3) $y = \log_e\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$　　(4) $y = \dfrac{2e^x + 1}{e^x + 1}$

(三重大 2014)　　(m20143106)

0.195 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\log_e(1 + x^2)}{1 + x^2}dx$

(三重大 2014)　　(m20143107)

0.196 $f(x)=x^2+ax+b$ とするとき，

$-1<f(-1)<1, \quad 0<f(1)<4$

が成立する．このとき，$f(x)$ の最小値 m のとり得る値の範囲を求めよ．

(三重大 2014) (m20143108)

0.197 空間ベクトルである $\overrightarrow{a}=(1,-1,2)$ と $\overrightarrow{b}=(-1,-2,1)$ について，(1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角度を求めよ．

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\overrightarrow{c}$ を求めよ．

(3) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に 60° の角度をなし ，大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\overrightarrow{d}$ を求めよ．

(三重大 2014) (m20143109)

0.198 行列 $A=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ による 1 次変換において $x^2-y^2=1$ を満たす不動点 $Q(x,y)$ が存在する．

m の値と点 $Q(x,y)$ を求めよ．

(三重大 2014) (m20143110)

0.199 ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 1 枚ずつ 2 枚のカードを取り出すとき，(1)〜(4) の確率を求めなさい．ただし，取り出したカードはもとにもどさないものとする．

(1) 1 枚目，2 枚目ともに A（エース）である確率

(2) 1 枚目に引いたカードが A（エース）である確率

(3) 2 枚目に引いたカードが A（エース）である確率

(4) 1 枚目に引いたカードは伏せたままにして，2 枚目に引いたカードが A（エース）であったとき 1 枚目も A（エース）である確率

(三重大 2014) (m20143111)

0.200 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$，$x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015) (m20153101)

0.201 x_1，x_2，x_3 に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ \alpha x_1+x_2=\beta \quad (\alpha,\ \beta\text{は実定数}) \end{cases}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) 連立方程式を行列 A, $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くとき，行列 A, $\boldsymbol{b}$ を求めなさい,

ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ である.

(2) $\alpha = 1$, $\beta = 3$ のとき，A^{-1} を求め，それを利用して連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(3) 任意の α, β について $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するかどうかを調べ，存在する場合にはその解を求めなさい.

(三重大 2015)　　(m20153102)

0.202 次の行列 A の固有値，固有ベクトルおよび固有ベクトル間の角度を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2015)　　(m20153103)

0.203 以下の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$　ただし $|x| < a,\ a > 0$　　(4) $\displaystyle\int \sinh x\,dx$

(三重大 2015)　　(m20153104)

0.204 次の関数の x に関する導関数 y' を求めよ.

(1) $y = x^3 e^{-2x}$　　(2) $y = x \log_e \dfrac{1}{x}$　　(3) $y = x^{\sin x}$

(三重大 2015)　　(m20153105)

0.205 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{b}{\sqrt{b^2 - x^2}}\,dx$　（ ここで b は $b \neq 0$ の実数であり，$|x| < |b|$ ）

(三重大 2015)　　(m20153106)

0.206 次の点 P は，t の値が変化するとどのような曲線，あるいは直線上を動くか，数式およびグラフで示せ.

(1) 放物線 $y = x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P

(2) 円 $x^2 + y^2 - 2tx + 2(2t-1)y + 5t^2 - 4t - 8 = 0$ の中心 P

(三重大 2015)　　(m20153107)

0.207 A と B の二人がサイコロを交互に振り最初に 2〜m $(1 \leq m \leq 5)$ のいずれかの目を出した方を勝ちとするゲームを行う．A が最初にサイコロを振る場合について，以下の問に答えなさい．ただし，A が n 回目にサイコロを振ったときに A の勝ちが決まる確率を $P(m, n)$ とする.

(1) $P(2, 1)$ を求めよ.

(2) $P(2, 2)$ を求めよ.

(3) $P(m, n)$ を m と n を用いて表せ.

(4) $m = 2$ のとき，A が勝つ確率を求めよ.

(三重大 2015)　　(m20153108)

0.208 次の連立方程式を行列を用いて解け．ただし，a は定数とする．

(1) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x+5y=-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 7x-5y=11 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} a^2x+2y=2a \\ ax \quad +y=2 \end{cases}$

(三重大 2015) (m20153109)

0.209 点 $(1,\ -1)$, $(-3,\ 7)$ をそれぞれ $(5,\ -5)$, $(-11,\ 23)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A を求めなさい.

(2) 行列 A は $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ を満たす，このとき A^4 を求めなさい．ただし，E は単位行列である.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2016) (m20163101)

0.210 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A$(0,\ 1,\ 1)$，点 B$(-a,\ 0,\ 1)$，点 C$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ がある．ただし，a は正の実数で，$0 \leqq t < 2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $\angle ACB=\theta$, $t=\pi$ とした場合，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい.

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい.

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ.

(三重大 2016) (m20163102)

0.211 以下の問いに答えなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ である.

$y=x^x\ (x>0)$ のとき，y' を求めよ.

(三重大 2016) (m20163103)

0.212 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016) (m20163104)

0.213 以下の問いに答えなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

$y''+4y'+3y=e^{2x}$ の一般解を求めよ.

(三重大 2016) (m20163105)

0.214 次の関数 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい.

$f(x)=e^x\sin x$

(三重大 2016) (m20163106)

0.215 関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ に関して，次の問いに答えなさい.

(1) 範囲 $0 \leqq x \leqq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y=f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し，$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい.

(2) 次の式が成り立つことを，問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい.

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\Big(a\sqrt{1-a^2}+\sin^{-1}a\Big)$$

(三重大 2016) (m20163107)

0.216 以下の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \\ 3a & 3 & a \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{rank}A$ を求めなさい．

(2) $\det A$ を求めなさい．

(3) $a = -1$ のとき，A^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A が 0 を固有値として持つとき，a の値と 0 以外の固有値を求めなさい．

(三重大 2016)　　(m20163108)

0.217 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$　　(2) $y = \sqrt{x^2+3x+2}$　　(3) $y = x^{\log_e x}$

(三重大 2016)　　(m20163109)

0.218 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

(三重大 2016)　　(m20163110)

0.219 行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，積 AB および積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ．

(2) 上記の設問 (1) において，$C = xA + B$ とすれば，逆行列 C^{-1} が存在しない場合の x を求めよ．

(3) 次の連立方程式を満たす行列 X, Y を求めよ．

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X + 2Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(三重大 2016)　　(m20163111)

0.220 (1) 曲線 $y = \log_e x$ 上の点 (1, 0) における接線が曲線 $y = ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ．

(2) この接線，曲線 $y = ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

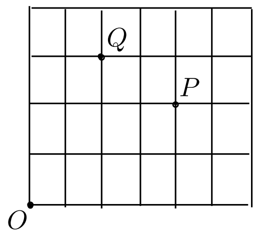
(三重大 2016)　　(m20163112)

0.221 (1) 異なる n 個のものから r 個をとって並べる方法（順列）の数 ${}_nP_r$，および組合せの数 ${}_nC_r$ を式で表せ．また，それぞれの式の意味および両式の関係について説明せよ．

(2) 下図の点 O から出発し，サイコロを投げて次の規則に従って 1 目盛りだけ進むものとする．

（規則）1 または 2 の目が出れば右に進み，それ以外の目が出れば上に進む．

このとき，点 Q に達する確率は，点 P に達する確率の何倍になるか．



(三重大 2016)　　(m20163113)

0.222 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.223 xyz 空間中の曲面 $z = 5 - x^2 - y^2$，z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒，および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163115)

0.224 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx$ の値を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163116)

0.225 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ．

(1) A^5 の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ．

(2) A の固有値および <u>互いに直交する長さ 1</u> の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A を変換 $P^T AP$ によって対角化する直交行列 P を構成し，対角化を実行せよ．ただし，P^T は P の転置行列である．

(三重大 2016)　　(m20163117)

0.226 ある 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) この行列 A の固有値を求めなさい．

(2) この行列 A の固有ベクトルを求めなさい．

(3) A^n の値を求めなさい

(三重大 2017)　　(m20173101)

0.227 (1) $2x + y + 2z = 3$ で表される平面 A と，$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2) $x + y + z = 1$ で表される平面 A と，$2x + y + z = 1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3) ある平面に点 A, B, C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a, b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c, d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173102)

0.228 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい．

$\sin 3x \cos 2x$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい．

$y = -3x^2 + 12 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(三重大 2017)　　(m20173103)

0.229 次の関数の与えられた範囲内での最大値と最小値を求めなさい．ただし，log の底は e とする．

$$y = \frac{4\log x}{3x} \qquad (x \geqq 1)$$

(三重大 2017) (m20173104)

0.230 z を複素数とするとき，方程式 $z^4 = -1$ のすべての解を求めなさい．

(三重大 2017) (m20173105)

0.231 $y = y(x)$ に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = x$ の一般解を求めなさい．

(三重大 2017) (m20173106)

0.232 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2e^x \cos x dx$ を計算しなさい．

(三重大 2017) (m20173107)

0.233 x, y に関する実数値関数 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい．

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい．

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v) = 4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい．

(三重大 2017) (m20173108)

0.234 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{4\sqrt[4]{x} - 2x^{-2} + x}{3x}$ (2) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ (3) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$

(三重大 2017) (m20173109)

0.235 次の不定積分および定積分を求めよ．

(1) $y = \displaystyle\int x \log_e x \ dx$ (2) $y = \displaystyle\int_1^3 \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^2} dx$

(三重大 2017) (m20173110)

0.236 ベクトル $\overrightarrow{a} = (4, -3)$，$\overrightarrow{b} = (1, -7)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

(2) 点 $P_0(3,4)$ を通り，$\overrightarrow{a}$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(三重大 2017) (m20173111)

0.237 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} (2) $2(A - 3B)$ (3) AB (4) $(AB)^n$

(三重大 2017) (m20173112)

0.238 微分方程式 $0 = dy + aydx$ で表される関数 $y = f(x)$ について以下の (1)〜(3) の問いに解答せよ．ただし，a は実数で $a > 0$ とする．

(1) $f(0) = a$ の時，与えられた微分方程式を解き，$f(x)$ を x のみの関数として表せ．

(2) $g(x) = xf(x)$ とする時，極値や変曲点を示して $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx}$$

(三重大 2017)　　(m20173113)

0.239 3 本の「あたり」と 17 本の「はずれ」を含む 20 本のくじがある．　続けて 2 回くじを引く時，(1)〜(4) の問いに答えよ．　ただし，1 度引いたくじは元に戻さないものとする．

(1) 1 回目にくじを引いた時点で，それが「あたり」である確率を求めよ．

(2) 1 回目に「あたり」を引き，かつ 2 回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(3) 1 回目に「はずれ」を引き，かつ 2 回目で「はずれ」を引く確率を求めよ．

(4) 2 回目に引いたくじが「はずれ」であった時，1 回目のくじが「あたり」であった確率を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173114)

0.240 (1) 次の行列 A とベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を求めよ．またベクトル $\overrightarrow{v}$ と $A\overrightarrow{v}$ の内積 $\overrightarrow{v}\cdot A\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，a, b, c, x, y は実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の行列式 $|A|$ と，2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) (1) の $\overrightarrow{v}$ が $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} > 0$ を満たし，(2) の行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき，(1) の内積が $\overrightarrow{v}\cdot A\overrightarrow{v} > 0$ となる十分条件は，$a > 0$，$c > 0$ かつ $|A| > 0$ であることを証明せよ．

(三重大 2017)　　(m20173115)

0.241 2 重積分 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2}\,dtdx$ の値を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173116)

0.242 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \cos 2x$ の一般解を求めよ．

(三重大 2017)　　(m20173117)

0.243 3 次元空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 となるベクトルを全て求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からなる行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183101)

0.244 三角関数について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数である．

この際，オイラーの公式 $(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$ を用いても良い．ただし，i は虚数単位である．

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ.

(5) $\cos(n\theta)$ は, $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ.

(三重大 2018) (m20183102)

0.245 時間 t の関数 $f(t) = p(1 - e^{-qt})$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, p, q は正の実数である.

(1) $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t)dt$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ.

(3) $0 \leqq t$ に対する $f(t)$ の変化を図示せよ. ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ がどうなるかも図示すること.

(4) $0 \leqq t$ に対する $g(t)$ の変化を図示せよ. ただし $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ がどうなるかも図示すること.

(5) $f(t)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(三重大 2018) (m20183103)

0.246 (1) 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を $x < 1$ において定義する. 任意の自然数 n に対して, 下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい. ここで, $\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について, $m \geqq 0$, $n \geqq 0$, $m+n > 0$ の条件を満たす任意の整数 m, n に対して式 ㋐ が成り立つとする. また, 式 ㋑ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}g(x,y) = g(x,y) \cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0) = e \cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお, $m = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n}g(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n}g(x,y) = g(x,y)$$

また, $n = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0}g(x,y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m}g(x,y) = g(x,y)$$

(a) $g(x,y) = u(x)w(y)$ とおく. 任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい. ここで, $u(x)$ は変数 x に関する関数, $w(y)$ は変数 y に関する関数とする.

$$\frac{d^m}{dx^m}u(x) = u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい.

(三重大 2018) (m20183104)

0.247 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) A の逆行列を求めなさい.

また, それを利用して x, y に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解きなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を求めなさい.

また，それを利用して $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めなさい．ここで，n は自然数とする.

(三重大 2018)　　(m20183105)

0.248 次の関数を微分せよ.

(1) $y = 5^{-2x}$　　(2) $y = \sin^4 x \cos^4 x$　　(3) $y = x^{\log x}$

(4) $y = \dfrac{(x-1) \cdot \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt{(2x+5)^3}}$　　(5) $y = \log_a(2x^2-4)$　$(a > 0,\ a \neq 1)$

(三重大 2018)　　(m20183106)

0.249 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

(三重大 2018)　　(m20183107)

0.250 次の連立 1 次方程式を行列を用いて解け.

(1) $\begin{cases} 5x + 6y - 7z = -3 \\ 4x + 7y + 3z = 4 \\ -3x - 9y + z = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

(三重大 2018)　　(m20183108)

0.251 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように a, b を定めよ.

(三重大 2018)　　(m20183109)

0.252 以下の設問 (1) から (3) に答えよ.

(1) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$,　$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ とすると，$A = B$ であることを示せ.

(2) (1) の結果を利用して A の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ の値を計算せよ.

(三重大 2018)　　(m20183110)

0.253 袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ，袋 B に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っている．解答者はそれぞれの袋の中にある赤玉，白玉の個数をあらかじめ知っているものとし，以下の設問に答えよ.

(1) 袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数（0 個，1 個，2 個）の期待値をそれぞれ求めよ.

(2) 袋 A から 1 つの玉を取り出し，その後，袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ.

(3) 袋 A から 1 つの玉を取り出した後で，2 つの玉を袋 A から取り出すか，あるいは袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出す可能性が高いほうを選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ.

(三重大 2018)　　(m20183111)

0.254 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 A と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ となることを示せ．　ただし θ, ϕ は実数，i は虚数単位とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 A について，$\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 B の 2 つの固有値を求めよ．ただし k は実数とする．また $|k| \leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を k の関数として，$|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

0.255 曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の極値及び変曲点を求め，この曲線の概形を書け．

(三重大 2018)　　(m20183113)

0.256 星芒形 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $(a > 0)$ の概形を書け．またこの曲線の全長を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183114)

0.257 次の関数を微分せよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $y = x^2 e^x$　　(2) $y = \sqrt{\cos 2x}$

(3) $y = \log_e(1 - e^{-x})$　　(4) $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^5}}$

(三重大 2020)　　(m20203101)

0.258 次の不定積分，定積分を求めよ．（e は自然対数の底である.）

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1} dx =$　　(2) $\displaystyle\int x e^{-x} dx =$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2) dx =$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$

(三重大 2020)　　(m20203102)

0.259 次の関数 $f(x)$ の増減を調べて極値と変曲点を示し，グラフの概形を描け.（e は自然対数の底である.）

$$f(x) = x(\log_e x - 1)^2 \qquad (x > 0)$$

(三重大 2020)　　(m20203103)

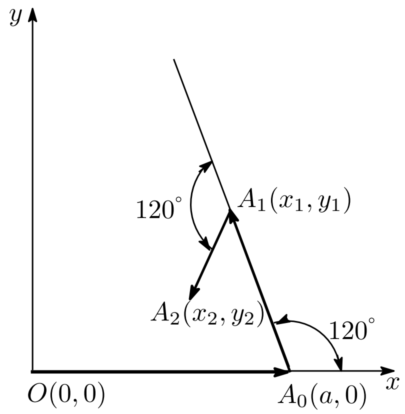
0.260 次の不等式が表す領域を xy 平面に図示せよ．

$$(-x + y^2 - 1)(4x^2 - 8x + y^2) < 0$$

(三重大 2020)　　(m20203104)

0.261 図に示すように原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $A_0(a,0)$ に向かうベクトル $\overrightarrow{OA_0}$ がある．次にベクトル $\overrightarrow{A_0A_1}$ を，点 A_0 を始点とし，長さが $\overrightarrow{OA_0}$ の 1/2，向きを $\overrightarrow{OA_0}$ から 120°（反時計回り）方向とするベクトルとして定義する．さらにベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$ を点 A_1 を始点とし，長さが $\overrightarrow{A_0A_1}$ の 1/2，向きを $\overrightarrow{A_0A_1}$ から 120°（反時計回り）方向とするベクトルとして定義する　．以降同じ操作を行ってベクトルを定義していくものとして，以下の設問に答えよ．

(1) 点 A_1 の座標 (x_1, y_1) を求めよ.



(2) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を点 A_{n-1} の座標 (x_{n-1}, y_{n-1}) と a を使って表せ.

(3) この操作を繰り返したとき，点 A_n が漸近する座標 (x, y) を求めよ.

(三重大 2020)　　(m20203105)

0.262 ある選挙区において，国政選挙の有権者全員の中で A 党の支持率が 20% であるという．この選挙区の有権者の中から無作為に n 人を抽出するとき，k 番目の抽出された人が A 党支持なら 1，不支持なら 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする．

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ について期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を 0.02 以下にするためには，抽出される標本の大きさは，少なくとも何人以上必要であるか?

(三重大 2020)　　(m20203106)

0.263 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の行列式を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 行列 A について，1 次独立な固有ベクトルをすべて求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 としなさい.

(4) (3) で求めた固有ベクトルが互いになす角度をすべて求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203107)

0.264 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする.

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい.

(2) 楕円 E 上の点 $(0, 2, 0)$ をとおり，$\overrightarrow{n} = (0, 1, 3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい.

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい.

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい.

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.265 以下の問いに答えなさい．ただし，y は x の関数であり，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 初期条件を $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ とするとき，微分方程式　$xy'' + y' = 0$　を解きなさい．

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において，(1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい．ただし，区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は，$L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$　で与えられる．

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.266 $f(x)$, $g(x)$ を実数全体で微分可能な関数とする．

(1) $y = f(x)$, $xy'' = 2y'$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ とする．ただし，$x \neq 0$ のとき，$y' \neq 0$ とする．$f(x)$ を求めなさい．

(2) $y = g(x)$, $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - 6x + 6$, $g(-1) = \dfrac{1}{e} - 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = e - 1$ とする．$g(x)$ を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203110)

0.267 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 P の固有値 λ_i $(i = 1, 2, 3)$ と対応する単位固有ベクトル v_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする．

(2) VV^T を求めなさい．ただし，

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である．

(3) 行列 P は固有値・固有ベクトルに対して，$PV = VA$ が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である．このとき，$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 P_1, P_2, P_3 が存在することが知られている．行列 P_1, P_2, P_3 を求めなさい．

(4) 0 以上の整数 n に対して P^n を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203111)

0.268 $x > 0$ において，$h(x) = \log \alpha^x - \log x^\alpha$ と定義する．ここで，α は正の実数とする．任意の正の実数 x に対して，$x^\alpha \leqq \alpha^x$ となる正の実数 α を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203112)

0.269 p の関数

$$f(p) = p \log \frac{p}{q} + (1 - p) \log \frac{1 - p}{1 - q}$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，定義域は $0 < p < 1$ とし，q は $0 < q < 1$ を満たす定数とする．また，log は自然対数を表す．

① p の関数 $f(p)$ の最小値を求めなさい．

② 右側極限値 $\lim_{p \to +0} f(p)$，および，左側極限値 $\lim_{p \to 1-0} f(p)$ を求めなさい．

③ p の関数 $f(p)$ の変曲点の有無を，理由を説明して答えなさい．

④ 問 ①, ②, ③ の結果を用いて，$q = 1/2$ に固定したとき，$f(p)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，必要であれば $\log 2$ の近似値として 0.7 を使ってもよい．

(三重大 2022)　　(m20223101)

0.270 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta + \varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする．

(三重大 2022)　　(m20223102)

0.271 2 次曲線 C : $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を X, Y を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.272 二次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\vec{u} = k\vec{u}$，$\vec{u} \neq \vec{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\vec{u}$ について，以下の各問に答えなさい．

(1) この定数 k の値を求めなさい．

(2) このベクトル $\vec{u}$ を求めなさい．

(3) A^n を求めなさい．

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は，この行列 A を用いた一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した．返還前の直線の式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223104)

0.273 $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と，$2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある．この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい．

(1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい．

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい．

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223105)

0.274 曲線 $y = 3x^2$ を y 軸周りに回転してできる回転体を容器として考える．y 軸を鉛直上向きにとり，この容器に毎秒 c の割合で水を入れるものとする．この際，t 秒後の容器内の水面の高さを答えなさい．ただし，c は定数である．また，水面の高さは x 軸と水面との距離とする．

(三重大 2022)　　(m20223106)

0.275 以下の関数の y の値が最小値となる x の値を求めなさい．

$$y = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{(x-5)^2+1}$$

(三重大 2022)　　(m20223107)

0.276 以下の極限値を求めなさい．

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^5}\sum_{n=1}^{m} n^4$$

(三重大 2022)　　(m20223108)

0.277 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^{2x} \quad (x > 0)$　　(2) $y = e^{-2x}\sin 3x$

(3) $y = \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)^2$　　(4) $y = (3x-1)\sqrt{x^3+1}$

(三重大 2022)　　(m20223109)

0.278 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^2 5^{2x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$

(三重大 2022)　　(m20223110)

0.279 次の行列の積を求め，その行列式の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　　(m20223111)

0.280 次の連立 1 次方程式を，行列を用いて解け．

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

(三重大 2022)　　(m20223112)

0.281 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022)　　(m20223113)

0.282 任意の x に対して (1)，(2) を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$　　ただし，$f(x)$ は連続関数とする．

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_0^x tf(x-t)\,dt \quad , \quad f(x) > 0$　　ただし，$f(x)$ は微分可能な関数とする．

(三重大 2022)　　(m20223114)

0.283　A 国において，ある病気 X に罹患している人は 8 %である．病気 X を診断するための Y 検査で，罹患している人が正しく陽性と判定される確率は 80 %であり，罹患していない人が誤って陽性と判定される確率は 7 %である．

(1) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陽性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(2) A 国のある人が検査 Y を受けたところ，陰性と判定された．この人が病気 X に罹患している確率を求めよ．

(三重大 2022)　　(m20223115)