[選択項目] 年度：1991～2023 年　大学：長崎大

0.1 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい. ただし, $0 \leq x \leq 2\pi$ とする.

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, その概形を描きなさい.

(2) f の最大値を $f_{\max}$ とし, そのときの x を $x_{\max}$ とする. また,f の最小値を $f_{\min}$ とし, そのときの x を $x_{\min}$ とする. このとき, $x_{\max}$, $x_{\min}$ および $\left|\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}\right|$ を求めなさい. ただし, $\left|\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}\right|$ は $\dfrac{f_{\max}}{f_{\min}}$ の絶対値を表す.

（長崎大 2004）　(m20045001)

0.2 次の関数をに x ついて微分せよ.

$y = (2x^3 + x - 3)^5$　　$y' =$ ______

（長崎大 2004）　(m20045002)

0.3 次の導関数を示せ.

(1) x^n　(2) e^x　(3) $\log x$　(4) $\sin x$　(5) $\tan x$

（長崎大 2004）　(m20045003)

0.4 次の設問 (1),(2) に答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x}\sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$y = \frac{1}{x+1} \quad , \qquad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad \text{直線 } x = 2$$

（長崎大 2004）　(m20045004)

0.5 方程式 $y = x^2 + 2x + 2$ について, 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を示すグラフを図示せよ.

(2) このグラフを x 軸方向に $+3$, y 軸方向に -2 移動したグラフの方程式を示せ.

(3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれる領域を x 軸について回転させた時の体積を求めよ.

（長崎大 2004）　(m20045005)

0.6 連続関数 $f(x)$ において Taylor 展開の 2, 3 項を記述せよ. ただし, h は x の微小な変化量である.

$$f(x+h) \approx f(x) + \boxed{} + \boxed{} + O(h^3)$$

（長崎大 2004）　(m20045006)

0.7 次の 2 変数関数の x 偏微分 z_x を求めよ.

$z = e^{-(x^2+y^2)}$　　$z_x =$ ______

（長崎大 2004）　(m20045007)

0.8 次の微分方程式が与えられているとき, 設問 (1) から (3) に答えよ.

$$y''(x) + 4y'(x) + 7y(x) = Q(x) \qquad \text{(i)}$$

(1) 上の (i) 式において $Q(x)=0$ とする．初期条件 $y(0)=0$, $y'(0)=-3$ が与えられているとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上の (i) 式において $Q(x)=3e^{-5x}$ のとき, 微分方程式の解を少なくとも一つ求めよ．

(3) 次に, $Q(x)$ が具体的に与えられていない場合を考える．(i) 式の解の 1 つを $y_1(x)$ とするとき, $y_2(x)=5y_1(x)$ は必ず, 微分方程式

$$y''(x)+4y'(x)+7y(x)=5Q(x) \qquad \text{(ii)}$$

の解であるか. 理由を述べて説明せよ.

(長崎大 2004)　　(m20045008)

0.9 微分方程式 $(y')^2=x$ を解け．

(長崎大 2004)　　(m20045009)

0.10 二つのベクトル $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ の内積を求めよ．

$\overrightarrow{A}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{B}=(5,-1,2)$ 　　$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=$ ________________

（長崎大 2004）　　(m20045010)

0.11 行列 A,T を $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし, ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. また, t を $t\geq 0$ の実数とし, 指数関数 e^{-3x} , e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t)=\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ とする. これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{x}(t)=TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする. この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい.

(2) $y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ とする. このとき

$$J=\int_0^\infty y(t)^2 dt$$

を求めなさい.

(3) 行列 $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p,q,r を用いて未知の対称行列を $P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA+A^TP=-Q$$

を満足するように決定し, $W=\boldsymbol{s}^TP\boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す.　　（長崎大 2004）　　(m20045011)

0.12 次のベクトルに関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次従属系であることを示せ.

(2) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つためには, a,b,c にはどのような条件が必要か.
但し, 行列 A は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を, それぞれ第 1, 2, 3 列とする行列である.

(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を全て求めよ.

（長崎大 2004）　　(m20045012)

0.13 方程式 $z^5 = 1$ を満足するすべての z について以下に問いに答えなさい.

(1) 与えられた方程式を満足する z のうち, $z = 1$ を除いて偏角が最小のものを $z = \omega$ とする. このとき与えられた方程式のすべての解は $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ であることを示しなさい. ただし, 複素数 z の偏角 $\arg z$ は $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ の範囲で考えることにする.

(2) (1) で定義した ω は

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$

を満足していることを示しなさい.

（長崎大 2004）　(m20045013)

0.14 以下に設問に答えよ.

(1) 複素数 z を $z = x + iy$ とするとき, x と y を z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表わせ.

(2) 原点を中心とし, 半径 r の円を (x, y) 座標で表わせ.

(3) 原点を中心とし, 半径 r の円を, x と y をそれぞれ実部, 虚部とする複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ で表わせ.

（長崎大 2004）　(m20045014)

0.15 x を $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ の実数とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を用いて, 次の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

を導きなさい.

(2) $y = \tan^{-1} x$ に対して, 逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

を用いて, $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表しなさい.

(3) n を自然数とし,

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

とおく. この I_n に対して, $n = 1$ のときの I_1 を求めなさい.

(4) (3) で与えられた I_n を

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int 1 \times \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$$

と考え, 部分積分法を用いて

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n$$

が成り立つことを示しなさい.

(5) (3) で与えられた I_n に対して, $n = 3$ のときの I_3 を求めなさい.

(長崎大 2005)　(m20055001)

0.16 一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える.

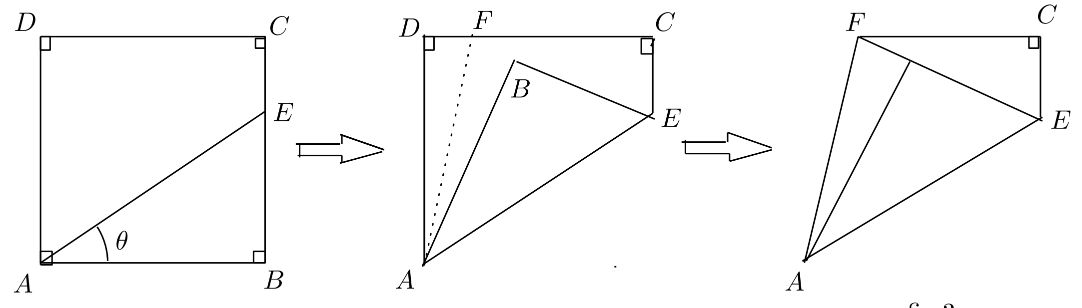


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.17 $a > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ について以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ を計算せよ.

(4) 定積分 $J = \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 + x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ.

(長崎大 2005)　　(m20055003)

0.18 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, $2\times\ 2$ 行列を $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

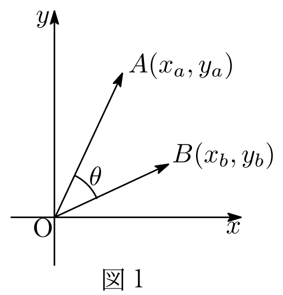


図 1

(1) $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x, y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,

$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

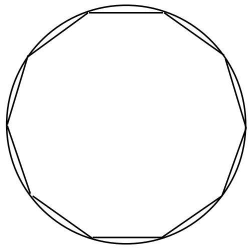
0.19 図 2 に示すように半径 1 の円に内接する正十角形の頂点を次の手順で 1 つずつ選び, 合計 3 個選ぶ.

- 10 個の頂点から勝手に 1 つの頂点を選び, その頂点を P_1 とする.
- P_1 を除いた 9 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_2 とする.
- P_1 , P_2 を除いた 8 個の頂点の中から勝手に 1 つ選び, その頂点を P_3 とする.

このとき以下の問に答えなさい.

(1) 頂点 P_1 , P_2 , P_3 を選ぶ際の選び得るすべての場合の数を求めよ.

(2) 上の手順で選んだ P_1 , P_2 , P_3 で三角形を作るとき,
$\triangle P_1P_2P_3$ が直角三角形になる確率を求めよ.



単位円に内接する正 10 角形

(長崎大 2005) (m20055005)

0.20 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面内の円の方程式は一般に

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad ①$$

で表されることを示せ. ただし, A, B, C, D は実数である.

(2) 複素平面内の円の方程式は一般に

$$\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0 \qquad ②$$

で表されることを示せ. ただし, $z=x+iy$, α , γ は実数, β は複素数である.

(長崎大 2005) (m20055006)

0.21 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

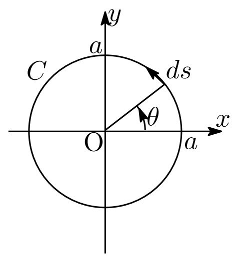
(2) $f(t)$ が $f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad |t|\leq T \\ 0 & , \quad |t|>T \end{cases}$ ただし T は正の実数 で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω , 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.22 ベクトル関数 f が $f=4y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ で与えられるとき,
右に示す円 $C\left(x^2+y^2=a^2\ ,\ z=0\right)$ 上で次の線積分を行え.
ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ,
x , y , z 方向の単位ベクトルである.

$$I=\oint_C f\cdot ds$$



(長崎大 2005) (m20055008)

0.23 次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を以下のように

$$B=P^{-1}AP$$

対角化する行列 P と対角行列 B を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055009)

0.24 次の関数が与えられている.

$$f(x) = 1 - \cos x$$
$$g(x) = x \sin x$$

(1) これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ.

(2) これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005)　　(m20055010)

0.25 不定積分 $\displaystyle\int x^2 \log x dx$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055011)

0.26 以下の問に答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) 微分方程式 $y' - y = 0$ を解け.

(2) 初期条件 $y(0) = 1$ を満たす微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ の解を求め, この解のグラフを描け.

(長崎大 2005)　　(m20055012)

0.27 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055013)

0.28 以下の問に答えよ.

(1) (x, y, z) 空間内の 3 点を $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ をこれらの座標で示せ.

(2) $f(r) = \dfrac{1}{r}$,　$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とするとき, $f(r)$ の傾き $\nabla f(r)$ およびその発散 $\nabla \cdot \Big[\nabla f(r)\Big] = \nabla^2 f(r)$ を求めよ. 但し, $r \neq 0$ とする.

(長崎大 2005)　　(m20055014)

0.29 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(長崎大 2005)　　(m20055015)

0.30 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx$$

(長崎大 2005)　　(m20055016)

0.31 ベクトル $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ と $\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ がある. ここで $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである.

(1) 内積 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ を求めよ.

(2) 外積 $\vec{A} \times \vec{B}$ を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055017)

0.32 次の式 Ψ についてその偏導関数 $\partial\Psi/\partial r$ および $\partial\Psi/\partial\theta$ を計算しなさい.

$$\Psi = \cos\theta \exp(-r)$$

(長崎大 2005) (m20055018)

0.33 次の式について偏微分 $\partial S/\partial a$ と $\partial S/\partial b$ を求めよ.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - a - bx_i \Big)^2$$

(長崎大 2005) (m20055019)

0.34 ある県の交通安全週間 7 日間の交通死亡数は以下の表の通りであった. 平均死亡者数とその標準偏差を求めよ.

	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目	5 日目	6 日目	7 日目
死亡者数	0 人	1 人	3 人	6 人	1 人	1 人	3 人

(長崎大 2005) (m20055020)

0.35 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2005) (m20055021)

0.36 次の関数を x について（不定）積分せよ.

$$\sin x + x^2$$

(長崎大 2005) (m20055022)

0.37 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

(長崎大 2005) (m20055023)

0.38 a, b を任意の実数とする次の対称行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A が逆行列を持たないとき, $b > 0$ であるような a の範囲を示せ.

(2) 行列 A の固有値の一つが 1 であるとき b の値を求めよ. また, 1 以外の固有値を a を用いて表せ. ただし, $a \neq 0$ とする.

(長崎大 2007) (m20075001)

0.39 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある．糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ．

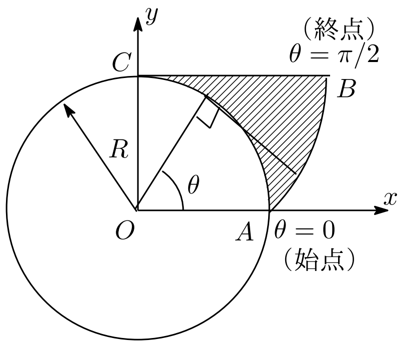
(1) 図のように $\theta=0$ の位置からはじめて $\theta=\pi/2$ まで糸が外れた．円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか．

(2) θ の位置まで糸が外れたとき，糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ．

(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に，糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる．

$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ．



(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}=R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる．右辺に含まれる定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.40 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ とするとき．

(1) $f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)$ を求めよ．

(2) $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$ を求めよ．

ここで，$f_x(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\cdots,f_{xx}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2},\cdots$ とする．

(長崎大 2007)　　(m20075003)

0.41 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$ を求めよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ．

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$,　$\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075004)

0.42 次式で与えられる行列 A について以下の小問に答えよ．　$A=\begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$

ただし，各小問は互いに無関係である．

(1) 行列 A に左から $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を乗じて得られる行列 BA の行列式の値が 2 であった．このときの a と b の関係を求めよ．

(2) 行列 A が固有値 1 を持つとき，a と b の関係を求めよ．

(3) 行列 A が固有ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を持つとき，a と b の関係を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075005)

0.43　次の微分方程式を解け，ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1)　$y' + y = 0$　　　(2)　$y' + y = (x+1)^2$

(3)　初期条件 $y(0) = 0$（$x = 0$ のとき $y = 0$）を満たす $y' + y = (x+1)^2$ の解を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075006)

0.44　次の式について偏微分 $\partial^2 z/\partial x^2$ と $\partial^2 z/\partial x \partial y$ を求めよ．

$z = x^3 - 5xy^2 + 2$

(長崎大 2007)　　(m20075007)

0.45　次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(長崎大 2007)　　(m20075008)

0.46　次の関数を x について不定積分せよ．

$$I = \int x \log x \, dx$$

(長崎大 2007)　　(m20075009)

0.47　次の微分方程式を解け．

(1)　$y' = \tan x \cot y$　　　(2)　$x(x-y)y' + y^2 = 0$

(長崎大 2007)　　(m20075010)

0.48　(1)　次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

(2)　次の方程式で囲まれる面積を求めよ．ただし，a，b は定数である．　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(長崎大 2007)　　(m20075011)

0.49　関数 $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 19x + 10$ において，$f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075012)

0.50　関数

$$f(x) = 1 - e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ とする．

(1)　$\dfrac{df}{dx} = 0$ を満足する x の値をすべて求めなさい．

(2)　(1) で求めた x に対して，$f(x)$ の値および $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ の値を求めなさい．

(3)　$0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\pi$ における，最初の極大値を y_1，2 番目の極大値を y_2 とし，

$$p_1 = y_1 - 1 \,, \quad p_2 = y_2 - 1$$

と定義する．このとき，$\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい．ln は自然対数（底が e の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085001)

0.51　袋の中に 100 個のくじが入っており，その内 27 個が当りくじである．次のルールに従ってこのくじを引く．

[ルール]

袋の中からくじを 1 つ引き，当りかはずれを確認した後，そのくじを再び袋の中に戻す．

(1) このくじを 2 回引き，どちらもはずれる確率を求めなさい．

(2) このくじを 3 回引き，少なくとも 1 回は当たる確率を小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで求めなさい．

(3) このくじを何回か引いたとき，少なくとも 1 回は当たる確率が 0,9999 よりも大きくなるには，何回以上引く必要があるか．ただし，$\mathrm{Log}_{10}7.3 = 0.8633$ として計算しなさい．Log_{10} は常用対数（底が 10 の対数）を表す．

(長崎大 2008)　　(m20085002)

0.52 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ と $f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ について考える．また $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

ある多項式 $g(x)$ を与えられた $f(x)$ で割ったときの商を $q(x)$，余りを $r(x)$ とする．このとき，$f(x)$ が 2 次式であることより，余り $r(x)$ は，未定の係数 a, b を用いて $r(x) = ax + b$ とおくことができ，さらに，$g(x)$ について

$$g(x) = f(x)q(x) + ax + b \qquad ①$$

が成立する．以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の x に行列 A を代入した $f(A) = A^2 - 6A + 5I$ を求めなさい．

(2) n を正の整数とし，$g(x) = x^n$ とする．このとき，① 式を満足する a, b を n で表しなさい．

(3) (2) の a, b および ① 式を利用して，正の整数 n に対して A^n を求めなさい．（A^n の各要素を n で表しなさい．）

(長崎大 2008)　　(m20085003)

0.53 次のベクトルについて以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の一次結合（線形結合）で表せ．

(長崎大 2008)　　(m20085004)

0.54 次の値を求めよ．

(1) $I(R) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

(2) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$　　注：問 (1) の結果を引用してもよい．

(長崎大 2008)　　(m20085005)

0.55 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y'' + 16y = 0$　　(2) $y'' + 16y = 17e^x$

(3) 初期条件 $y(0) = 6$，$y'(0) = -2$，$(x = 0$ のとき $y = 6$，$y' = -2)$ を満たす $y'' + 16y = 17e^x$ の解を求めよ．

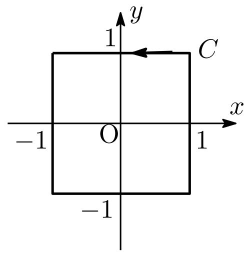
(長崎大 2008)　　(m20085006)

0.56 点 (x,y,z) での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とし，$r=|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とするとき，以下の問いに答えよ．ここで，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，$x,y.z$ 方向の単位ベクトルを表す．

(1) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を計算せよ．

(2) 右図の閉曲線 $C(z=0)$ に沿って，次の線積分を計算せよ．

$$\oint_C \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$



(長崎大 2008)　　(m20085007)

0.57 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085008)

0.58 $D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy$ を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085009)

0.59 行列 $A=\begin{pmatrix}\alpha & 4\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$ の固有値が 1 と 6 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha\geq\beta$ とする．求める過程も記述すること．

(長崎大 2008)　　(m20085010)

0.60 熱帯にあるオイスター島には，乾季と雨季の季節だけがあり，この 1000 年において，毎年，乾季の日が 30 %，雨季の日が 70 %の割合で存在するものとする．この島のある日の天気の観測（簡単のため，晴れ，曇り，雨の 3 種類とする）のみから，その日が乾季か雨季であるかの推定を行いたい．もし乾季であれば晴れの日は 80 %，曇りの日は 10 %，雨の日は 10 %の割合である．また，雨季であれば晴れの日は 10 %，曇りの日は 20 %，雨の日は 70 %の割合である．無作為 (random) に選んだある日の天気を観測したところ晴れであったという．この観測をした日が乾季である確率を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085011)

0.61 次の微分方程式を解け．　$\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$　　(長崎大 2008)　　(m20085012)

0.62 連続な関数 $f(x,y)$ の Taylor 展開について，右辺第 2 項，第 3 項を記述せよ．

ただし，Δx は x の微小な変化量である．

$$f(x+\Delta x,\ y)=f(x,y)+\boxed{}+\boxed{}+O(\Delta x^3)$$

(長崎大 2008)　　(m20085013)

0.63 ベクトル $\overrightarrow{A}=(2,3)$，$\overrightarrow{B}=(5,-2)$ の内積と外積を求めよ．

$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=$ ________　　　$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=$ ________

(長崎大 2008)　　(m20085014)

0.64 次の連立 1 次方程式を解け．
$$\begin{cases}2x+\ y+\ z=15\\ 4x+2y+5z=39\\ 8x+8y+9z=83\end{cases}$$

(長崎大 2008)　　(m20085015)

0.65 3 次曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ のグラフを描き，これと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085016)

0.66 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ．

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$ ただし，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

(長崎大 2008) (m20085017)

0.67 ベクトル $\overrightarrow{a}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(3,-1,2)$ の場合，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(長崎大 2008) (m20085018)

0.68 以下の問いに答えなさい．ただし，y は $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $x=\tan y$ に対して，$\dfrac{dx}{dy}$ を求めなさい．

(2) $y=\tan^{-1}x$ に対して，逆関数の微分の公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

を利用して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x で表しなさい．

(長崎大 2009) (m20095001)

0.69 2 行 2 列の行列 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする．0 以上の整数 n に対して，A のべき乗 A^n を考える．このとき以下の問いに答えなさい．ただし，a は $0<a<1$ の実数とする．また，$n=0$ に対して，$A^0=I$ とする．

(1) $n=2,3,4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい．

(2) 行列 $I-A$ の逆行列を求めなさい．

(3) 行列 T_n を次式で定義する．このとき，$(I-A)T_n=I-A^n$ が成り立つことを示しなさい．

$$T_n=I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a,n を用いて表しなさい．

(長崎大 2009) (m20095002)

0.70 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n=\int_0^n e^{-st}\cos\omega t\,dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009) (m20095003)

0.71 行列 A, B が与えられている．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $C = A + B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(2) $C = A \times\ B$ における，行列 C の $(1,1)$ 要素の値

(3) 行列 A の行列式 $|A|$

(4) 行列 A の逆行列

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

(長崎大 2009)　　(m20095004)

0.72 次の微分方程式の解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = ax$　　ただし，$x = x_0$ で $y = y_0$ とする．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ay$　　ただし，$x = x_0$ で $y = y_0$ とする．

(長崎大 2009)　　(m20095005)

0.73 (1) $y = x^3 - 3x$ のグラフを描き，x 軸との交点を示せ．

(2) $y = x^3 - 3x$ の極値の位置と極値を示せ．

(3) 変曲点の位置を示せ．

(4) $f = \displaystyle\int_0^z y dx$ のグラフを，(f, z) 座標に描け．

(5) $y = x^3 - 3x$ の導関数を求めそのグラフを描け

(長崎大 2009)　　(m20095006)

0.74 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) a^x の微分を求めよ．

(2) $\tan^{-1} x$ の微分を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{\tan^{-1} x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ．

(長崎大 2009)　　(m20095007)

0.75 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\, dxdy$ を求めよ．

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{array} \right. \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.76 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' + 4y = \sin 3x$

(3) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.4$　（$x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = 1.4$）を満たす $y'' + 4y = \sin 3x$ の解を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095009)

0.77 (1) $N\times\ M$ の行列 A と $P\times\ Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N\times\ N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n\to\infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．ただし，$a\neq 1$ である．

(長崎大 2009)　　(m20095010)

0.78 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

(b) $e^{-x^2}+\tan x$

(2) 次の極限値を求めよ．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$

(長崎大 2009)　　(m20095011)

0.79 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\,,\ x\geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}\qquad(0\leq t\leq 2\pi\,,\ a>0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.80 (1) 微分方程式 $y''+2y'-35y=0$ の一般解を求めよ．
なお，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，　$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(2) 微分方程式 $y''+2y'-35y=12e^{5x}+37\sin 5x$ の特殊解を求めよ．

(3) 微分方程式 $y''+2y'-35y=12e^{5x}+37\sin 5x$ の一般解を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095013)

0.81 2 つの実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$　$(n=0,1,2,3,\cdots)$ が $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$，　$b_n=3a_{n-1}-b_{n-1}$ を満たすとき，以下の手順に従って $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，$a_0=1$，$b_0=-1$ である．

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ，

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(3) A を対角化する行列 P を求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(5) 実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(長崎大 2009) (m20095014)

0.82 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ の逆関数を求めよ．

(長崎大 2010) (m20105001)

0.83 下記の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

(長崎大 2010) (m20105002)

0.84 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1) $y=\tan(2x-3)$ (2) $x^3y^3+y-x=0$

(長崎大 2010) (m20105003)

0.85 次の定積分を求めよ．

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-9)^3}\,dx \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$$

(長崎大 2010) (m20105004)

0.86 次の関数について，x^3 の項まで Maclaurin（マクローリン）の級数展開で表せ．

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

(長崎大 2010) (m20105005)

0.87 次の行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(長崎大 2010) (m20105006)

0.88 次の 2 次曲線の標準形を求めよ．

$$2x^2+6xy+2y^2+6x+4y+1=0$$

(長崎大 2010) (m20105007)

0.89 次の行列について考える．以下の設問に答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ．

(2) $A^2=A\times\ A$ を求めよ．

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) A の固有値を求めよ．

(長崎大 2010) (m20105008)

0.90 関数 $u(x,y) = e^x \cos y$ がある. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の偏微分を求めよ.
$$\frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}$$
(2) 次の式を計算せよ.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(長崎大 2010)　　(m20105009)

0.91 次の関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ に関する以下の設問に答えよ.

(1) y のグラフを描きたい. x 軸との交点を求めよ.

(2) y のグラフの概形を図示せよ. (特に極大値と極小値を求めなくてよい)

(3) $(0 \leq x \leq 2)$ の区間の面積を求めよ.

(4) 上で概形を図示した y のグラフと, $y = ax$ との交点について考える. a の値により交わる点が変化する. a の値と交点の数との関係について説明せよ.

(長崎大 2010)　　(m20105010)

0.92 (1) $e^{a\sqrt{x}}$ の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(2) $x^k \sin ax$ の微分を求めよ. ただし, k は整数, a は実定数である.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ を計算せよ. ただし, $a,\ b$ は正定数である.

(長崎大 2010)　　(m20105011)

0.93 $z = f(xy)$ のとき, $xz_x - yz_y$ を計算せよ. ただし, z_x は z の x 偏微分, z_y は z の y 偏微分である.

(長崎大 2010)　　(m20105012)

0.94 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$ を求めよ.

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ.
$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,,\qquad x \text{ 軸}\,,\qquad \text{直線 } x = 2$$

(長崎大 2010)　　(m20105013)

0.95 2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{3x+2y}\, dxdy\,,\quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を求めよ.

(長崎大 2010)　　(m20105014)

0.96 つぎの微分方程式を解け. ここで, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y' + 3y = 0$

(2) $y' + 3y = \sin x$

(長崎大 2010)　　(m20105015)

0.97 平面 P が $x + y - z + 1 = 0$, 直線 f が $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{4}$ で与えられるとき, 平面 P と直線 f の交点を求めよ.

(長崎大 2010)　　(m20105016)

0.98 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = x_2 \end{cases}$ を行列を用いて表わせ.

(長崎大 2010)　　(m20105017)

0.99 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1=-1,\ \boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda_2=2,\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように, a,b,c,d を求めよ.

(長崎大 2010) (m20105018)

0.100 $\log_e\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を x で微分せよ.

(長崎大 2011) (m20115001)

0.101 $\sinh(1-2x)$ を不定積分せよ.

(長崎大 2011) (m20115002)

0.102 2^x を x^3 の項までマクローリン展開せよ.

(長崎大 2011) (m20115003)

0.103 関数 $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ について, 以下の問題に答えよ.

(1) y の 1 次導関数および 2 次導関数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y$ を求めよ.

(3) この関数の増減表を作成せよ.

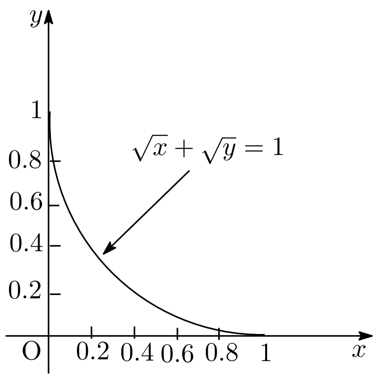
(4) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$ のグラフの概形を描け.

(長崎大 2011) (m20115004)

0.104 右図に示すような曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について, 以下の問題に答えよ.

(1) この曲線と直線 $x=0,\ y=0$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ.



(長崎大 2011) (m20115005)

0.105 以下の $A,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X}$ について次の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 逆行列を用いて $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ を満たす x,y,z（未知の実数）の値を求めよ.

(長崎大 2011) (m20115006)

0.106 以下の行列 A の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115007)

0.107 以下の問いに答えよ．

(1) $e^{2x}\sin(ax)$ の微分を求めよ．ただし a は定数である．

(2) $x^{\sin x}$ の微分を求めよ．　　(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x - x}$ を計算せよ．

(長崎大 2011)　　(m20115008)

0.108 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し，2 次の項まで求めよ．

(長崎大 2011)　　(m20115009)

0.109 次の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$

(長崎大 2011)　　(m20115010)

0.110 次の積分を計算せよ．

$$\iint_D xy(x-y)dxdy\ ,\quad D\ :\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$$

(長崎大 2011)　　(m20115011)

0.111 以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y''+y=0$ の一般解を求めよ，　なお，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ ，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(2) 微分方程式 $y''+y=6\sin x$ の特殊解を求めよ，

(3) 微分方程式 $y''+y=6\sin x$ の一般解を求めよ，

(長崎大 2011)　　(m20115012)

0.112 次式で与えられるベクトルと行列に対して，積が定義できる組を選びその積を求めよ．

ベクトル　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

行列　$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

(長崎大 2011)　　(m20115013)

0.113 2 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ で定義するとき，次の問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ．

(3) 2 次元空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ．

(長崎大 2011)　　(m20115014)

0.114 関数 $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \quad (0 \leqq \ x < 2\pi,\ 0 \leqq \ y < 2\pi)$ の極値を求めよ．求める過程も記述すること．

(長崎大 2011) (m20115015)

0.115 微分方程式 $y' + 4y^2 = 1$ を解け．答えを求める過程も記述すること．

(長崎大 2011) (m20115016)

0.116 行列 $A = \dfrac{1}{\alpha\beta + 3}\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 1.5 & \beta \end{pmatrix}$ の逆行列の固有値が 2 と 2.5 であるとき，実数 α 及び β の値を求めよ．なお，$\alpha \geq \beta$, $\alpha\beta \neq -3$ とする．求める過程も記述すること．

(長崎大 2011) (m20115017)

0.117 離散型確率変数 X が m 個の値 x_1, x_2, $\cdots$ x_m を取り，それぞれの値を取る確率を p_1, p_2, $\cdots$, p_m とする $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1\right)$．確率変数 X の期待値を $E(X) = \mu$ とすると，確率変数 X の分散 $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2 p_i$ を $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ と記すことができることを示せ．

(長崎大 2011) (m20115018)

0.118 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$$

(長崎大 2011) (m20115019)

0.119 次の微分方程式の解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x$$

(長崎大 2011) (m20115020)

0.120 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115021)

0.121 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115022)