[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：名古屋大

0.1 関数の増大を示す最も基本的なものとして次の等式がある．

「 任意の整数 $m > 0$ に対して， $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ 」

この等式は関数の増大について何を示しているのか．また，この等式が成立する理由を説明せよ．

(名古屋大 1999)　(m19992801)

0.2 xyz 空間において，同一直線上にない 3 点 (x_1, y_1, z_1) ， (x_2, y_2, z_2) ， (x_3, y_3, z_3) を通る平面の方程式を求めよ．

(名古屋大 1999)　(m19992802)

0.3 未知関数 $x(t)$ ， $y(t)$ に関する次の連立微分方程式 (E) を考える．

$$(E) \qquad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) 連立微分方程式 (E) を解け．

(名古屋大 1999)　(m19992803)

0.4 時刻 t_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ における N 個の測定データ x_i を最小 2 乗法によって直線 $x = a + bt$ で近似するものとする．このとき， a ， b を決める式を導け．

(名古屋大 1999)　(m19992804)

0.5 $\tan x = t$ とするとき，$\sin 2x, \cos 2x$ を t で表わせ．次に，dx を t 及び dt で表わせ．

(名古屋大 2000)　(m20002801)

0.6 $f(x), g(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき，$[a, b]$ における部分積分法を $f(x), g(x)$ を用いて説明せよ．次に，$[0, 1]$ における $x \log(1 + x)$ の定積分の値を求めよ．

(名古屋大 2000)　(m20002802)

0.7 A, B, C を同じ次数の正則行列とする．このとき，それらの積 ABC は正則行列か．もし ABC が正則であれば，その逆行列は何か．

(名古屋大 2000)　(m20002803)

0.8 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & x & 1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(名古屋大 2000)　(m20002804)

0.9 次の関数のすべての極値を求め，グラフの概形をかけ．

(1) $y = -\cos 2x + 2\cos x \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(2) $y = e^{1-x^2}$　　(3) $y = x^3 e^{-x}$

(名古屋大 2002)　(m20022801)

0.10 3次元空間内の原点を O，点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す．

点 A を通り，方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 l が与えられている．

(1) 直線 l を表す方程式を書け．

(2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき，点 P に最も近い直線 l 上の点を Q とする．点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q = Lp + b$ の形で表せ．
ただし，L, b は直線 l だけで定まり，p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す．

(3) 行列 L の階数を求めよ．

(4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(名古屋大 2002) (m20022802)

0.11 次のようにサイコロを振る場合を考える．各問いに答えよ．

(1) 1つのサイコロを振り，最初に出た目が偶数のときはもう1度，奇数のときはもう2度振る．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(2) 1つのサイコロを振り，1が出たら再びサイコロを振り，1が出る限りサイコロを振り続け，2から6が出たら終了する．出る目の数の合計の期待値を求めよ．

(3) 2つのサイコロを同時に振って，出る目の数の和が素数である確率を求めよ．

(名古屋大 2002) (m20022803)

0.12 次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ． $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その2点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0, y_0) で表し，$x_0 y_0 \neq 0$ とする．

(3) 曲線が囲む図形の面積を求めよ．

(名古屋大 2003) (m20032801)

0.13 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ．

(2) A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）．

(3) A によって1次変換 $f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ を定める．
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ．

(4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ．

(名古屋大 2003) (m20032802)

0.14 赤玉が r 個，白玉が w 個入っているつぼの中からランダムに一つの玉を取り出し，取り出した玉と同色の玉を c 個加えて一緒に戻すという試行を繰り返すことを考える（一回の試行終了後には玉が c 個増えることになる．ただし，r, w, c は全て正整数で，赤玉が出るという事象を R，白玉が出るという事象を W とする．二つの事象 A, B がこの順番に連続して起こる確率を $P\{AB\}$，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付確率を $P\{AB|A\}$ と表す．以下の確率を求めよ．

(1) 1 回目に赤玉を取り出す確率 $P\{R\}$.

(2) 1 回目に赤玉が出たという条件のもとで，2 回目に赤玉が出る条件付確率 $P\{RR|R\}$.

(3) 上記条件のもとで，3 回目に白玉が出る条件付確率 $P\{RRW|RR\}$.

(4) 3 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{RRW\}$.

(5) n 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{R^{n-1}W\}$.

(名古屋大 2003)　　(m20032803)

0.15 以下の不等式を証明せよ．

(1) $1 + x \leqq e^x$

(2) $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n = 1$ ならば $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq n$．ただし，$x_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

(名古屋大 2004)　　(m20042801)

0.16 次の 2 つの不等式で表される領域の共通部分の体積 V を求めよ．
$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$,　$x^2 + y^2 \leqq a^2$.　　ただし，$0 < a \leqq 1$ とする．

(名古屋大 2004)　　(m20042802)

0.17 行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ．

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化したもの（大きさが 1 のもの）を示せ．

(3) A を対称行列と交代行列の和で表せ．なお，行列 X の転置行列を X^t としたとき，$X^t = X$ を満たすものを対称行列，$X^t = -X$ を満たすものを交代行列という．

(名古屋大 2004)　　(m20042803)

0.18 確率変数 X が値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとり，$X = x_i$ となる確率を　$P(X = x_i) = p_i$　と表記するとき，以下の問いに答えよ．ただし，$P(X \geqq a)$ は X が a 以上の値である確率を表すとする．

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ の値を示せ．

(2) X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を x と p を用いて表せ．

(3) X の期待値を $E[X] = \mu$，分散を $V[X] = \sigma^2$ とする．任意の正数 k に対して次の式が成り立つことを示せ．　$\sigma^2 \geqq k^2 P(|X - \mu| \geqq k)$

(4) 確率変数 X の平均と分散がそれぞれ 50 と 9 であるとき，$P(40 < X < 60)$ に関してわかる事を述べよ．

(名古屋大 2004)　　(m20042804)

0.19 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの固有値 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052801)

0.20 関数 $y=e^{\sqrt{3}x}(\sin x+1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)}=e^{\sqrt{3}x}\left\{2^n\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}n\right)+\left(\sqrt{3}\right)^n\right\}$ となることを証明せよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052802)

0.21 領域 $D: {r_1}^2\leq x^2+y^2\leq {r_2}^2\quad(0<r_1<r_2)$ における重積分
$\displaystyle\iint_D(a+bx+cx^2+fxy+cy^2)dxdy$ を求めよ. ただし, a, b, c, f は定数である.

(名古屋大 2005)　　(m20052803)

0.22 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+3\dfrac{dy(x)}{dx}+2y(x)=0$　　(2) $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+y(x)=\cos x$

(名古屋大 2005)　　(m20052804)

0.23 つぼ U には白球 1 個と黒球 1 個の計 2 個, つぼ V には白球 2 個と黒球 1 個の計 3 個が入っている. 各つぼから 1 球ずつ取って, U のつぼから取った球は V のつぼへ, V のつぼから取った球は U のつぼへ入れる手続きを n 回行なうとき, U に白球が 2 個ある確率を p_n, 白球, 黒球が 1 個ずつある確率を q_n, 黒球が 2 個ある確率を r_n とする. 以下の問に答えよ.

(1) p_1, q_1, r_1 を求めよ.

(2) p_n, q_n, r_n を p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1} を用いて表せ.

(3) この手続きを無限回行なうと確率 p_n, q_n, r_n がそれぞれ一定値 p,q,r になること（すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=p$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=q$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n=r$）が分かっているとする. このとき p,q,r の値を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052805)

0.24 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ とする.

(1) A の 2 つの固有値 α, β $(\alpha>\beta)$ を求めよ.
また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix}z\\1\end{bmatrix}$ の形で求めよ（z の値のみで良い）.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ.

(3) $\gamma_n=\alpha^n-\beta^n$ とする．A^n を γ_{n-1}, γ_n, γ_{n+1} で表せ.

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

0.25 (1) 微分方程式 $x(-1-2xy)y'=2y(1+xy)$ を解け.

(2) 微分方程式 $y''+2y'+5y=\exp x$ を解き，y の一般解を求めよ.

(名古屋大 2006)　　(m20062802)

0.26 (1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x^2+2x}{x^3+3x^2-x-3}\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^3+x)\cos\left\{\frac{\pi}{4}(x^2+1)\right\}dx$ を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062803)

0.27 ○×式の問題が $2N$ 問ある．そのうち，N 問は○が正解であり，残り N 問は×が正解であるとする．解答者が無作為に N 問に○を，残り N 問に×を解答する．このとき，正解数が k 問 $(0 \leqq k \leqq 2N)$ となる確率を P_k とする．

(1) $N=3$ の場合の P_k $(k=0,1,2,3,4,5,6)$ を求めよ．

(2) ○が正解の問題に○を記し正解となった問題数を x 問，×が正解の問題に×を記し正解となった問題数を y 問とする．このときの x と y の関係を記せ．

(3) P_k を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062804)

0.28 赤, 黄, 青のランプがあり，各時刻において，いずれか一つのランプが点灯する．時刻 t に，赤のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，赤が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，黄のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，黄が 0.5，赤が 0.25，青が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に，青のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，青が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時刻 t に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ で表し，時刻 $t+1$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t+1)$, $X_2(t+1)$, $X_3(t+1)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ と表したときの行列 A を示せ.

(2) 行列 A の行列式を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(名古屋大 2007)　　(m20072801)

0.29 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$x > -1$ とする.

(1) $f(x)$ の x に関する一次微分および二次微分を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)dx$ を計算せよ．ただし，e は自然対数の底である.

(3) $f(x)$ の増減表を作成し，$y=f(x)$ のグラフの概略を図示せよ.

(名古屋大 2007)　　(m20072802)

0.30 3 人がジャンケンを行い，一人だけが勝ったときに終了するものとする．以下の問いに答えよ.

(1) 1 回で終了する確率を求めよ.

(2) ちょうど n 回目のジャンケンで，終了する確率 $P(n)$ を求めよ.

(3) n 回以内に終了する確率を求めよ.

(4) n 回以内に終了する確率が 50% 以上となる回数 n を求めよ.
ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$，$\log_{10} 5 = 0.699$ とする.

(5) (2) の確率 $P(n)$ に回数を乗じ，これの N 回目までの和，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(n)$ を求めよ.

(6) (5) の N を無限大としたときの値を求めよ.

(名古屋大 2007) (m20072803)

0.31 水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_0, y_0 とする.

「瓶 A 中の水の 1 割と，瓶 B 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り，小瓶 C の水を瓶 B に，小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ x_n, y_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) x_n, y_n を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 T を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) x_n, y_n を，x_0, y_0 および n を用いて表せ.

(4) $n \to \infty$ としたときの，x_n/y_n の値を求めよ.

(名古屋大 2008) (m20082801)

0.32 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n : \text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.33 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解き，y の一般解を求めよ.

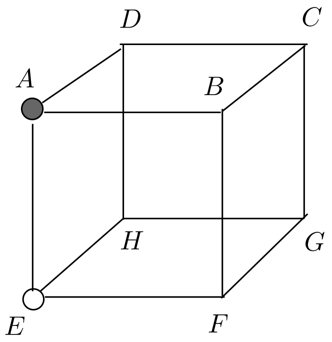
(名古屋大 2008) (m20082803)

0.34 図 1 のように，各頂点に A〜H の名前がつけられた，一辺の長さ a の立方体を考える．最初に，黒いピンと白いピンが，それぞれ頂点 A, 頂点 E に設置してある．サイコロを 4 回振り，1 回目と 2 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，黒いピンを $A \to B \to C \to D \to A \cdots$ と移動させ，3 回目と 4 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，白いピンを $E \to F \to G \to H \to E \cdots$ と移動させることとする．次の問いに答えよ.

(1) 黒いピンが頂点 C に止まる確率を求めよ.

(2) 黒いピンと白いピンの距離が $\sqrt{2}a$ となる確率を求めよ.

(3) 黒いピンと白いピンの距離の期待値を求めよ．なお，無理数は無理数のままで解答して良い.



(名古屋大 2008)　　(m20082804)

0.35　以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{dy}{dt} = y'$ と記すことにする．

(1) 常微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ の一般解を求めよ．

(2) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(名古屋大 2011)　　(m20112801)

0.36　以下の問に答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A^5 を求めよ．

(名古屋大 2011)　　(m20112802)

0.37　以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\, \cos nx\, dx$　（m, n は負でない整数）

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx$　（ヒント：$x = \tan\theta$とおけ．また，$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$ である．）

(名古屋大 2011)　　(m20112803)

0.38　$\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする．　以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'$ と記すこととする．

(1) $\boldsymbol{f}(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合，$\boldsymbol{f}(t)$ と $\boldsymbol{f}'(t)$ は直交することを証明せよ．ただし，$|\boldsymbol{f}(t)| > 0,\ |\boldsymbol{f}'(t)| > 0$ とする．

(2) 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}(t)$ とするときに，位置ベクトルが $\boldsymbol{g}'(t)$ となる点を点 B とする．もし，$\boldsymbol{g}(t)//\boldsymbol{g}''(t)$ が成り立つならば，三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{g}(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし，O は原点とする．また，$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}'$ の公式を用いてよい．

(名古屋大 2011)　　(m20112804)

0.39　2 次元ラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．

(2) 関数 $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．また，境界条件を円 $x^2+y^2=4$ 上で $u=0$，円 $x^2+y^2=9$ 上で $u=5$ としたとき，境界条件を満たすように a と b の値を求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142801)

0.40 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(名古屋大 2014)　　(m20142802)

0.41 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x}dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(3) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.42 次の漸化式で定義される数列を考える．

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である．

(名古屋大 2014)　　(m20142804)

0.43 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) A の固有値 λ と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^m（m は自然数）を求めよ．

(名古屋大 2015)　　(m20152801)

0.44 (1) 常微分方程式 $y'' + 6y' + 5y = 5x$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $y'' + \dfrac{x-1}{x}y' - \dfrac{1}{x}y = xe^{-x}$ について

(i) この微分方程式の右辺を 0 とした同伴方程式の基本解の 1 つが $y_1 = e^{-x}$ であることを示せ．

(ii) 微分方程式の一般解を $y = ue^{-x}$ とおいて解け．ただし，u は x の関数である．

(名古屋大 2015)　　(m20152802)

0.45 3 次元空間内において，平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_X，$\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトルを e_Y，e_X と e_Y のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_Z とし，e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする新たな直交座標系を考える．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて e_X，e_Y，e_Z を表せ．ただし，e_X，e_Y，e_Z はこの順に右手系をなすものとする．

(2) 設問 (1) で求めた e_X, e_Y, e_Z を基本ベクトルとする直交座標系における $\boldsymbol{b}$ の成分 $(b_X,\ b_Y,\ b_Z)$ を求めよ.

(3) ある直交座標系において $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ と成分表示されるものとする. この直交座標系の xy 平面上において放物線 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)=(t,t^2,0)$ を考える. ただし, t は実数とする. 放物線 $\boldsymbol{p}$ を e_X, e_Y, e_Z を基本ベクトルとする直交座標系の成分で表せ. ただし, これら 2 つの直交座標系の原点は互いに一致するものとする.

(名古屋大 2015) (m20152803)

0.46 (1) x の関数に関する定積分 I_1 を, 次のように x を s に変換して計算する場合を考える.

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\int_0^{\beta} s\,ds$$

ただし, $0<a<1$ とする. このとき, x を s の関数として表し, 積分の上限 β を求めよ.

(2) 設問 (1) の変数変換を用いて, 次の定積分 I_2 の計算を考える.

$$I_2=\int_0^1 \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx=\int_0^{\beta} f(s)\,ds$$

このとき $f(s)$ を求め, $f(s)$ が $0\leq s\leq\beta$ において, 極大値をただ 1 つ持つことを示せ.

(名古屋大 2015) (m20152804)

0.47 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 A が 2 個の固有値を持つような a を全て求めよ. またそのときの固有値を求めよ.

(2) 行列 A が 3 個の固有値を持つような a の場合について,

(a) 全ての固有値と固有ベクトルを a を用いて記せ.

(b) 行列 A は, ある正則行列 P によって $D=P^{-1}AP$ と対角化可能である. P を一つ示し, その P に対応する, P^{-1}, D をそれぞれ求めよ.

(名古屋大 2016) (m20162801)

0.48 3 つのつぼがあり, つぼ A には白玉 5 個, 赤玉 3 個, つぼ B には白玉 4 個, 赤玉 4 個, つぼ C には白玉 1 個, 赤玉 7 個が入っている. 1 から 6 の目が等しい確率で出るサイコロを振って, 1 の目が出たらつぼ A を, $2,3$ の目が出たらつぼ B を, $4,5,6$ の目が出たらつぼ C を選択して, そのつぼから玉を無作為に 1 個取り出して元に戻す試行を繰り返す.

(1) 1 回の試行を行った時に白玉を取り出す確率を求めよ.

(2) 1 回の試行を行って白玉を取り出した場合にサイコロの 4 の目が出た確率を求めよ.

(3) 4 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の分布を求めよ.

(4) 10 回試行した場合の白玉が出る回数の確率の期待値 $\big(E(X)\big)$ と分散 $\big(V(X)\big)$ を求めよ.

(名古屋大 2016) (m20162802)

0.49 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (2n-1)\pi<x\leqq\ 2n\pi \\ \ \ 1 & 2n\pi<x\leqq\ (2n+1)\pi \end{cases}$$

(名古屋大 2016) (m20162803)

0.50 次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

(名古屋大 2016)　　(m20162804)

0.51 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系) 上の点 $p(x, y, z)$ を，この座標系と原点を共有し，別の直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系) で示した場合，p の座標値は (x', y', z') となった．なお，座標系は右手系とする．

(1) x', y', z' を x, y, z へ変換する行列 M を求めよ．

(2) いま，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系における， ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}$ の正側から見て，$\boldsymbol{k}$ を軸として右回りに 45° 回転し，回転後の $\boldsymbol{i}$ の正側から見て，$\boldsymbol{i}$ を軸として右回りに 45° 回転した後のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による座標系を $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系とする．

(a) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系で $p_1(1, 0, 0)$, $p_2(0, 1, 0)$, $p_3(0, 0, 1)$ で示される点の，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系での座標を求めよ．

(b) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系に変換する行列 M の各要素の値を求めよ．

(c) M の転置行列は M の逆行列と等しくなる． $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系で $p_4(2, 1, 1)$ で示される点の $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系での座標を求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162805)

0.52 定数 a を含む行列 A と未知変数 x, y, z に関する次の方程式を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

以下の設問に計算手順を示し解答せよ．

(1) 方程式がただひとつの解をもつための，定数 a が満たすべき条件を示せ．

(2) $a = 0$ とする．方程式の解を求めよ．

(3) $a = 4$ とする．このとき，A の固有値のひとつは 2 である．

(a) 固有値 2 に属する A の固有ベクトルをひとつ求めよ．なお固有ベクトルの大きさ（ノルム）は 1 とする．

(b) 残りの A の固有値をすべて求めよ．

(名古屋大 2017)　　(m20172801)

0.53 次の定積分を求めよ．ただし，$y = \tan^{-1} x$ とした場合，$x = \tan y$ であることを意味する．

$$\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$$

(名古屋大 2017)　　(m20172802)

0.54 次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を，それぞれ求めよ．

$$z = \sin\left(x^2 y\right)$$

(名古屋大 2017)　　(m20172803)

0.55 次の微分方程式を解け．ただし，k, p, q はゼロではない定数で， かつ $p \neq q$ であり，さらに，$t = 0$ において $x = 0$ とする．

$$\frac{dx}{dt} = k(p - x)(q - x)$$

(名古屋大 2017)　　(m20172804)

0.56 赤玉が N 個，白玉が N 個入ったくじ引き機を使い， 各回ごとにどちらの色の玉が出るかを予想する．N は 1 以上の整数であり，また，くじ引き機を出た玉はくじ引き機に戻さないとする． 予想者はすべての予想をくじ引き開始前に終了しており，$2N$ 回の試行に対して， 最終的に必ず赤白それぞれが N 個ずつになるように予想してあるとする．このとき，予想が i 回当たる確率を P_i とする．以下の設問に答えよ．

(1) $N=2$ のとき，$i=0,1,2,3,4$ の場合の P_i を求めよ．

(2) $N=3$ のとき，P_i がゼロとなる i の値をすべて求めよ．

(3) $N=4$ のとき，P_i がゼロとならない場合の P_i をすべて求めよ．

(4) P_i がゼロとならない場合の P_i を求める式を N と i を用いて導け．

(名古屋大 2017)　　(m20172805)

0.57 三次元ユークリッド空間において，点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3(=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある． また，点 P があって，点 O から点 P までの位置は実変数 t に関するベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ で表される．座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を変数 t に関して 2 階微分すると $\sin(t)\boldsymbol{e}_1-\cos(t)\boldsymbol{e}_2$ となった． なお，$t=0$ のとき，座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ の変数 t に関する 1 階微分の値は $-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$ であり，また，$t=0$ のとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(0)$ の値は $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ である． このとき，以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を求めよ．

(2) 正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1=\cos(t)\boldsymbol{e}_1+\sin(t)\boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b}_2=-\sin(t)\boldsymbol{e}_1+\cos(t)\boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{e}_3$ がある．また，ある点 Q があって，点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)=5t\boldsymbol{b}_1+7t\boldsymbol{b}_2$ である．

(a) 座標系 E を用いて表したベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ について， 変数 t に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(b) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ とおく． 座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ の変数 t に関する 2 階微分を求めよ． 得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(名古屋大 2017)　　(m20172806)

0.58 原点と正規直交する基底ベクトル $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$ をもち， それぞれの基底ベクトルに対応する座標を x，y，z とするユークリット空間を考える．また，演算子 ∇ を $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$ と定義する．

(1) $V=xy(x^2+y^2+z^2)$ とする．∇V を基底ベクトルと x，y，z を用いて表せ．

(2) 以下に示す $\vec{f}$ に対して，$\nabla W=\vec{f}$ となるスカラー関数 $W(x,\ y,\ z)$ が存在するかを考える．ここで，W の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0)=0$ とする．W が存在するならばそれをひとつ示し，W が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\vec{f}=(2x+yz)\vec{e}_x+(2y+zx)\vec{e}_y+(xy+1)\vec{e}_z$

(ii) $\vec{f}=(2x+yz)\vec{e}_x+(2y+z)\vec{e}_y+(xy+1)\vec{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

0.59 10 個の玉に，互いに区別できるように 1 から 10 の番号を記して箱に入れた．箱の中から無作為に玉を一つ取り出す試行を行う．一度取り出した玉は箱に戻さずに試行を N 回行い，取り出した順に，玉に記された番号を a_1，a_2，$\cdots$，a_N として，以下の問いに答えよ．

(1) $N=3$ のときに a_1，a_2，a_3 がすべて偶数である確率を求めよ．

(2) $N=5$ のときに $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ となる場合は何通りあるか求めよ.

(3) $N=5$ で $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ となった場合に, $a_1>2$ である条件付き確率を求めよ.

(4) $N=3$ のときに $a_1+a_2+a_3$ が 3 の倍数となる確率を求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182802)

0.60 $\log x$ は自然対数とし, 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int x\log x dx$

(名古屋大 2018)　　(m20182803)

0.61 (1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=x+1$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ. （ヒント：$u=y/x$ と置換せよ）

$$x\frac{dy}{dx}=-x+y$$

(名古屋大 2018)　　(m20182804)

0.62 次の行列 A を考える.

$$A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

(1) A の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ. なお固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(2) 定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，$aA^4+bA^3+cA^2+dA$ は単位行列となった. $a,\ b,\ c,\ d$ を一組求めよ.

(3) 大きさが 1 のベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$ に A^k を乗じた $A^k\boldsymbol{v}$ を考える. ここで k は正の整数である.

(i) $A^k\boldsymbol{v}$ を $v_1,\ v_2$ を用いて表せ.

(ii) $k\to\infty$ としたとき, $A^k\boldsymbol{v}$ の大きさの最大値を示し, それを与える $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ.

(名古屋大 2018)　　(m20182805)

0.63 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ に関して, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値のうち, 実数となる固有値およびその固有ベクトルを求めよ.

(2) A^3-8E を求めよ. ただし, E は 3 次の単位行列である.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(名古屋大 2022)　　(m20222801)

0.64 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において,
曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}\quad(0\leqq t\leqq\pi)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\cos z\,\boldsymbol{k}$ を考える. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ.

(名古屋大 2022)　　(m20222802)

0.65 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4) $I_n=\displaystyle\int(\log x)^n\,dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022)　　(m20222803)

0.66 袋の中に，白玉が 5 個，赤玉が n 個入っているとする．ただし，n は 2 以上の整数とする．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の数を X とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_n を求めよ．

(2) p_n が最大になる n の値と，このときの p_n の値を求めよ．

(3) X の期待値が 0.625 になるとき，n の値を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222804)