[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：名古屋工業大

0.1 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972901)

0.2 (1) 微分方程式 $y''+2y'-3y = e^x x$ を解くために，$y = e^x z$ とおくと，微分式方程式 $z''+az'+bz = x$ が導かれる．定数 a, b の値を求めよ．

(2) 上で導かれた微分方程式 $z''+az'+bz = x$ の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972902)

0.3 (1) 次の行列 A の固有多項式 $|\,xE-A\,|$ を計算して，A の固有値を求めよ．但し，E は単位行列を表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 上で得られた固有値の固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972903)

0.4 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，

$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつっくたとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972904)

0.5 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$ に対し，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982901)

0.6 $\sin^2 x$ の n 次導関数を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982902)

0.7 曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982903)

0.8 $D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y\}$ として次の積分の値を求めなさい．

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

(名古屋工業大 1998） (m19982904)

0.9 関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\ , & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0\ \ , & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

で与えられるとき，重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982905)

0.10 次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 1998） (m19982906)

0.11 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問に答えよ．ただし，$a \geq 0$ である．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ．

(2) λ_1 , λ_2 にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは 0 ベクトルのみであることを示せ．

(3) 上の問 (2) における固有ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が互いに直交するときの a の値を求めよ．

(名古屋工業大 1998） (m19982907)

0.12 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(3) 二つの関数 $x(t)$, $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時，$P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか．

(4) (3) の $X(t)$, $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998) (m19982908)

0.13 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$

(名古屋工業大 1999) (m19992901)

0.14 関数 $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ について次の問に答えよ.

(1) f_x , f_y , f_{xx} , f_{xy} および f_{yy} を求めよ.

(2) 極値を求めよ.

(3) $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ での最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 1999) (m19992902)

0.15 次の積分の値を求めよ. $\displaystyle\iint_K (3x^2 + 2y) dx\, dy$, $K : x^2 \leq y \leq 2 - x$

(名古屋工業大 1999) (m19992903)

0.16 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする. 次の A 上での重積分を求めよ. $a > 0$ とする.

$$\iint_A e^{-(ax)^2 - (ay)2} dx\, dy$$

ただし, 次の変数変換を用いて計算を行うこと.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ.

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999) (m19992904)

0.17 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $w = w(x)$ を微分方程式

$$4xw'' + 2w' + w = 0 \qquad (*)$$

の解とする. 独立変数 x を $x = t^2$ により t に変換し, $u = w(t^2)$ と置くとき, u の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 1999) (m19992905)

0.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ.

(1) $|A|$ および A^{-1}

(2) A の固有値

(3) 上の (2) で求めた各固有値に対する固有ベクトル

(名古屋工業大 1999)　　(m19992906)

0.19 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ.

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を求めよ.

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は， $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける．このことを用いると， $A^n\mathbf{x}$ は， λ_1 , λ_2 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか． α , β は，実数である.

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$A\mathbf{x}\ ,\ A^2\mathbf{x}\ ,\ \cdots\ ,\ A^n\mathbf{x}\ ,\ \cdots$$

なるベクトルの列は，二次元平面上の点列を表すが，この点列の挙動は， $\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる．このことを，(1) と (2) で求めたことを用いて論じよ.

(名古屋工業大 1999)　　(m19992907)

0.20 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{1+x+x^2})$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002901)

0.21 (1) 逆三角関数 $y = \arcsin x$ (ただし，$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$) の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であることを示せ.

(2) 次の定積分の値を部分積分法を用いて求めよ.

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

(名古屋工業大 2000)　　(m20002902)

0.22 $\displaystyle\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ をガンマ関数という.

(1) $a > 0$ のとき，$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成り立つことを示せ.

(2) a が自然数である時，$\Gamma(a) = (a-1)!$ が成り立つことを示せ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002903)

0.23 (1) オイラーの微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = R(x)$$

は，独立変数を $x = e^t$ によって x から t に変換すると，2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = R(e^t)$$

に書き換えられることを示せ.

(2) 次のオイラーの微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2$$

の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002904)

0.24 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．更に，行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002905)

0.25 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A=PBP^{-1}$ となるように行列 $P,\ B$ を定めよ．ここで，行列 B はある実数 a,b について $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形となるように定めよ．

(3) A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002906)

0.26 (1) 2 変数の関数 $f(x,y)=x^4-4x^3y+ax^2y^2+bxy^3+cy^4$ が次の 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

をみたすとき，実定数 a,b,c の値を求めよ．

(2) 上の関数 $f(x,y)$ に対して次の関係式

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

をみたす 2 変数の関数 $g(x,y)$ を求めよ．

(3) $w=f(x,y)+ig(x,y)$ を $z=x+iy$ を用いて表せ．ただし，$i\ (i^2=-1)$ は虚数単位である．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002907)

0.27 $\alpha>1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\alpha}{a_n})\quad (n=1,2,3,\ldots)$ によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n\geq\sqrt{\alpha}\ (n=1,2,3,...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012901)

0.28 関数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ の領域 $x^2+y^2\leq 1$ における最大値，最小値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012902)

0.29 曲面 $z=1-x^2-y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012903)

0.30 $D=\{(x,y)|0\leq y\leq x,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ のとき，　$I=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012904)

0.31 x の連続関数 y は次の等式を満たすとする．

$$y = -1 + \int_1^x (t - y(t))dt$$

(1) y は微分可能であることを示せ．

(2) y を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012905)

0.32 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a \neq b$ であることを示し，対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001)　　(m20012906)

0.33 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\overrightarrow{x}$ を列ベクトルとするとき，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x}$ $(\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0})$ を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012907)

0.34 $f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$ を領域 $R : x^2 + y^2 \leqq 1$ で考える．

(1) 領域 R の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) R における関数 $f(x,y)$ の最大値最小値を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032901)

0.35 $x > 0$ で微分方程式 $(*)x^2y'' + xy' - y = 0$ を考察する．

(1) $y_1 = x$ は方程式 $(*)$ の解であることを示せ．

(2) $y = y_1 z$ とおく．y が $(*)$ の解であるとき，z の満たすべき方程式を求めよ．

(3) y_1 と独立な微分方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032902)

0.36 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする．

(1) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は $a + b + c = 0$ であることを示せ．

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる非自明な 3 次元のベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ．ただし，$(,)$ は空間ベクトルの内積である．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032903)

0.37 xyz 空間で円柱 $x^2 + y^2 = 4$，xy 平面，放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003) (m20032904)

0.38 4 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について次の問い (1),(2),(3) に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) 次の列ベクトルを行列 A の列で与えられる 4 つの列ベクトルの 1 次結合で表せ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2004) (m20042901)

0.39 2 変数関数

$$f(x, y) = \frac{x + y^2 - y}{1 + x^2}$$

に対して極値をとる点を求めよ.

(名古屋工業大 2004) (m20042902)

0.40 xy 平面の 5 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D y dx dy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004) (m20042903)

0.41 $x \neq 0$ で次の常微分方程式を解け.

$$x^2 y' = (y^2 + 1)(y - 1)(y + 2)$$

(名古屋工業大 2004) (m20042904)

0.42 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = N\,,\ 0 < x, y, z < N\}$$

を考える. そして, 正の数 p, q, r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x, y, z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x,y,z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052901)

0.43 実数 a,b,c,d,e,f を用いて表される次の 4 次正方行列を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(1) この行列の行列式を求めよ.

(2) $be = af + cd$ の時, この行列式の値を可能な限り簡単にせよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052902)

0.44 次の定数係数 2 階線形微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

(名古屋工業大 2005)　　(m20052903)

0.45 xyz 空間内の半円柱面 $y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ を 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ によって切ったときに得られる曲面

$$S = \{(x,y,z) \,|\, y^2 + z^2 = 1,\ z \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ が外向きに（つまり S 上の $z > 0$ なる点では z の正方向に）貫く流束 (flux) を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052904)

0.46 自然な内積を持つ $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -16 \\ q \end{pmatrix}$ は

i) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とが成す角は $\dfrac{\pi}{3}$ であり,　　ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次従属である

という条件をみたす．このとき次の問に答えよ.

(1) k を求めよ.　　(2) p, q を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062901)

0.47 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ.

(2) 標準基底に関して行列 $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ と表される線形写像 $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がある．この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき，円 $C : x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062902)

0.48 (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(ii) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして，原点以外で定義される関数 $f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ を簡単な形にせよ．

(名古屋工業大 2006) (m20062903)

0.49 次の重積分を変数変換の公式を用いて計算せよ．

$$\iint_D 2(x+y)^6(x-y)^8 dxdy\ , \qquad D=\{(x,y)\ :\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0,\ x+y\leqq\ 1\}$$

(名古屋工業大 2006) (m20062904)

0.50 (1) 級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(2) $\log(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}+\cdots\ ,\ \ -1<t\leq 1$ を利用して，
関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ を $x-1$ のべき級数に展開せよ．

(名古屋工業大 2006) (m20062905)

0.51 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ のとき，重積分 $V=\displaystyle\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$ を求めよ．
ただし，$\max(x^2,y^2)$ は x^2, y^2 の小さくない方を表す．
（ヒント：領域 D を $x>y$ と $x\leq y$ の二つの部分に分けて積分を考えること）

(名古屋工業大 2006) (m20062906)

0.52 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 直接計算で $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$ を確かめよ．ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3 次単位行列である．

(2) (1) の結果に基づき $n\geq 4$ に対して，帰納法で $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$ を証明せよ．

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^{50}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2006) (m20062907)

0.53 常微分方程式 $(2x+y)y'-(x+2y)=0$ について次の問いに答えよ．

(1) 方程式の一般解を求めよ． (2) 初期条件 $y(0)=2$ を満たす特殊解を求めよ．

(名古屋工業大 2006) (m20062908)

0.54 (1) $x>0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ．

(2) (1) を利用して，π^e と e^π の大小関係を調べよ．

(名古屋工業大 2007) (m20072901)

0.55 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{x+y}(2x-y-z)dzdydx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi\int_x^\pi\frac{\sin y}{y}dydx$

(名古屋工業大 2007) (m20072902)

0.56 次の行列式の値が 0 となる a の値を全て求めよ. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072903)

0.57 次の行列 A は対角化可能かどうか判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072904)

0.58 次の連立一次方程式を解け. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3 \end{cases}$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082901)

0.59 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ で各列ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ.

(2) (1) で求めた P の転置行列を ${}^tP$ とする. この時 ${}^tPP = E_3$（E_3 は単位行列）を示し，さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $({}^tP\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b})$ が成り立つ性質を用いて，$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とした時に，次の等式を示せ.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (({}^tPAP)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}))$$

(4) $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とした時，x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2.x_3) (i = 1, 2, 3)$ があり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ.

(名古屋工業大 2008)　　(m20082902)

0.60 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とし，次の計算結果を最も簡明な形で示せ. $\Delta \left(\tan^{-1} \dfrac{y}{x} \right)$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082903)

0.61 $\{(x, y) \,;\, x^2 + y^2 - ax = 0,\ y > 0\}$ $(a > 0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする.

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x, y) \,;\, x^2 + y^2 - ax \leq 0,\ y \geq 0\}$ を極座標で表せ.

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ. $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008)　　(m20082904)

0.62 次の行列式 D を因数分解せよ. $D = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & c^2+d^2 & 0 & 2cd \\ 2ab & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 2cd & 0 & c^2+d^2 \end{vmatrix}$

(名古屋工業大 2009)　　(m20092901)

0.63 (1) 次の行列 A は対角化できないことを示せ. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(2) 行列 B を $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ とおく. $B^{-1}AB$ を求めよ.

(3) 自然数 n に対して A^n を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092902)

0.64 (1) 次の不定積分 I を求めよ. $I=\displaystyle\int\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,dx$

(2) 次の 2 重積分 J の値を求めよ. $J=\displaystyle\int_1^2\left(\int_x^2\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}}\right)dx$

(名古屋工業大 2009) (m20092903)

0.65 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ. $f(x,y)=x^4+6x^2y^2+y^4-6y^2$

(名古屋工業大 2009) (m20092904)

0.66 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ を $x-3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ.

(3) 次の重積分を求めよ.

$$V=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$$

(名古屋工業大 2009) (m20092905)

0.67 行列 A, 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$, 定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を次のように定義する.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

ただし，a は定数である. 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) 方程式が解をもたないための a の値を求めよ.

(2) 方程式が無数の解をもつための a の値を求めよ.

(3) 方程式が唯一の解をもつための a の範囲を示せ. またこの範囲の a に対して解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092906)

0.68 関数 $f(x)$ が $[0,\infty)$ において微分可能で，次の微分方程式を満たす.

$$f'(x)-\frac{1}{x+1}f(x)=(x+1)^2e^x$$

このとき,

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ.

(2) 初期条件 $f(0)=1$ を満たす特殊解 $f(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009) (m20092907)

0.69 次の 4 次行列 A, 4 次単位行列 E, およびパラメータ t に対して, 行列式 $\left|tE - A\right|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102901)

0.70 3 次元数ベクトル空間を $\mathbb{R}^3$ とする. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1\,,\ \boldsymbol{a}_2\,,\ \boldsymbol{a}_3\}$ から, グラム・シュミットの正規直交化法（シュミットの正規直交化法ともいう）により $\mathbb{R}^3$ の正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1\,,\ \boldsymbol{u}_2\,,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を構成しなさい.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102902)

0.71 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し, $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし, 等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102903)

0.72 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい.

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}} \frac{1}{x^2+y^2+5}\,dy \right\} dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい.

$$J = \iint_D e^{-(x^2-2xy+4y^2)}\,dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s = x - y\,,\ t = \sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき, J を (s, t) 変数の 2 重積分として表しなさい. ただし K を具体的に表示する必要はない.

(b) (a) の集合 K を求めなさい.

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102904)

0.73 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102905)

0.74 4 点 $P(1,3,2),\ Q(1,1,a+2),\ R(4,0,2),\ S(a+1,6,-3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102906)

0.75 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 積 AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102907)

0.76 境界条件「$x=0$ のとき, $y=1$」のもとで, 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y$$

の整級数の解 $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$ を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102908)

0.77 次の連立一次方程式が解をもつように定数 k の値を定め, そのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 3y - z = k & \cdots\cdots \quad ① \\ 2x + y + 3z = 5 & \cdots\cdots \quad ② \\ 3x + 2y + 4z = 9 & \cdots\cdots \quad ③ \end{cases}$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112901)

0.78 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を A とする. ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, 内積を使って関数を $Q(\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ と定義する.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 条件 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$ の下での関数 $Q(\boldsymbol{u})$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112902)

0.79 $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 6x$ とする.

(1) 方程式 $f(x, y) = 0$ の表す平面曲線はどのような図形か答えよ.

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112903)

0.80 次の積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right)^2 \, dx$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112904)

0.81 次の積分の値を求めよ.

$$I_2 = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} \, dxdy \,, \quad D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \,,\ x + y \geqq 0\right\}$$

(名古屋工業大 2011)　　(m20112905)

0.82 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}$ を求めよ。

(名古屋工業大 2011)　　(m20112906)

0.83 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} \, dx$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112907)

0.84 $3\times\ 3$ 行列 A と B は関係 $A^3-AB=I$ を満たす. ただし, I は 3 次単位行列である.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) A^2 と A^{-1} を求めよ.

(2) B を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112908)

0.85 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x\ ,\quad (\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \gamma\neq 0\ \text{定数})$$

が一つの特殊解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ を持つとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を決めよ.

(2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2011) (m20112909)

0.86 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ. また, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122901)

0.87 次の行列 A と P について, 問 (1) と (2) に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\quad ,\quad P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\lambda_3)$ とする. このとき行列 P が直交行列で, かつ次を満たすように a,b,c を求めよ.

$$^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122902)

0.88 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-y^3-xy$ について, 問 (1) と (2) に答えよ.

(1) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) を求めよ.

(2) (1) で求めた点において極値の判定をせよ.

(名古屋工業大 2012)　　(m20122903)

0.89 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2+x-1}\,dx$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122904)

0.90 次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \log(x+y)dxdy\ , \quad D=\{(x,y)\mid 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ 1\leqq\ y\leqq\ 2\}$$

(名古屋工業大 2012)　　(m20122905)

0.91 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122906)

0.92 R^3 の 2 組の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ \text{と}\ \ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 基底 $A\to B$ の基底変換の行列 P を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ であるとき，

$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ．

(3) 2 組の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して，
同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122907)

0.93 微分方程式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ は，条件 $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ を満たすとき，完全形

という．関数 $f(x)$ は $(0,\infty)$ で微分可能　かつ　$f(\pi)=1$ である．微分方程式

$$\Big(\sin x-f(x)\Big)\frac{y}{x}\,dx+f(x)\,dy=0\ , \quad x>0$$

は完全形とするとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122908)

0.94 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{9x-4}{(x-2)(x^2+3)}dxdy$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132901)

0.95 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqq\sqrt{3}y\leqq\ x\ ,\ x^2+y^2\leqq\ 5\right\}$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132902)

0.96 関数 $f(x,y)=4x^3-9xy^2+6y^3-12x$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の停留点 $\left(\text{すなわち}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\ \text{をみたす点}\right)$ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた停留点のそれぞれについて，極値の判定をせよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132903)

0.97 (x,y,z) 空間における次の 2 直線の距離を求めよ.

$$\frac{x-5}{2}=-\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{4}\ ,\qquad \frac{x-3}{8}=y+7=-\frac{z+2}{5}$$

(名古屋工業大 2013)　　(m20132904)

0.98 (x,y,z) 空間における平面 $2x+3y+4z+6=0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X,Y,Z) 空間の図形の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.99 行列

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ.（ すなわち，正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.）

(名古屋工業大 2013)　　(m20132906)

0.100 次の問いに答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt,\quad x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.101 3 次行列 X が方程式 $A^*X=A^{-1}+2X$ を満たす．ただし,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

， $A^*=adjA$ は行列 A の余因子行列である．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 方程式 $\left(|A|I-2A\right)X=I$ が成立することを証明せよ．ここで，$|A|$ は行列 A の行列式であり，I は 3 次単位行列である.

(2) 行列 X を求めよ，

(3) X の固有値を求めよ，

(名古屋工業大 2013)　　(m20132908)

0.102 関数 $y = e^x$ が微分方程式 $xy' + p(x)y = x$ の 1 つの解である．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $p(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 境界条件：$x = \ln 2$ のとき，$y(x) = 0$ を満たす微分方程式の特殊解を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132909)

0.103 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142901)

0.104 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xye^{x+y}dxdy\ , \quad D = \left\{(x,y)\,\middle|\, x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x+y \leqq\ 1\right\}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142902)

0.105 a, b を定数とし，$f(x,y) = x^3 + axy^2 + x^2 + by^2$ とする．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

がつねに成り立っているとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b の値を定めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2014)　　(m20142903)

0.106 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(|\lambda_1| \leqq\ |\lambda_2| \leqq\ |\lambda_3|)$ とするとき，次をみたす正則行列 P をひとつ求めよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142904)

0.107 a を定数とするとき，次の連立一次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x - \ y + az = \ 1 \\ x + ay - \ z = \ a \\ ax + \ y + \ z = a+1 \end{cases}$$

(名古屋工業大 2014)　　(m20142905)

0.108 $\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ.（収束する範囲は求めなくてよい.）

(名古屋工業大 2015) (m20152901)

0.109 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{-x+2}{x^3+1} dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152902)

0.110 $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152903)

0.111 重積分 $I = \displaystyle\iint_D x dx dy\ , \quad D = \Big\{(x,y) \ \Big|\ x^2 + y^2 \leqq 2x,\ y \geqq x - 1\Big\}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152904)

0.112 空間内の直線 $x - 6 = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ を含み，点 $(7, 8, 10)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152905)

0.113 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152906)

0.114 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は対角化可能か否か判定せよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152907)

0.115 平面内で $ax^2 + 2xy + y^2 = 1$ を表す曲線が双曲線となるような実数 a の範囲を求めよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152908)

0.116 関数 $f(x,y) = 3x^2y$ について，条件 $2x^4 + y^4 = 48$ の下での $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2016) (m20162901)

0.117 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\, dx$

(名古屋工業大 2016) (m20162902)

0.118 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx dy\ , \qquad D = \big\{(x,y)\,|\,(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 2\big\}$$

(名古屋工業大 2016) (m20162903)

0.119 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，A の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(名古屋工業大 2016) (m20162904)

0.120 空間ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ からグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を含む R^3 の正規直交基底を 1 組求めよ.

(名古屋工業大 2016)　　(m20162905)

0.121 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - y$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $P\big(-1, 1, f(-1,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(名古屋工業大 2017)　　(m20172901)

0.122 次の定積分と 2 重積分を求めよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\sin^2 x}\,dxdy, \qquad D\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$

(名古屋工業大 2017)　　(m20172902)

0.123 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A を直交行列によって対角化せよ.

(2) $A = B^2$ を満たす対称行列 B を一つ求めよ.

(名古屋工業大 2017)　　(m20172903)

0.124 a, b を定数とするとき，R^4 の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{array}{c} x + 3y + 5z - w = a \\ x - y - 3z + 3w = b \\ 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) W が R^4 の部分空間となるように a, b の値を定めよ.

(2) a, b が (1) で定めた値のとき，W の次元と基底を求めよ.

(名古屋工業大 2017)　　(m20172904)

0.125 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ を $|x-1| < 1$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n (x-1)^n + R(x), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{(x-1)^4} = 0$$

と表すとき，係数 a_n $(0 \leqq n \leqq 4)$ をすべて求めよ.

(名古屋工業大 2018)　　(m20182901)

0.126 (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くとき，t を用いて $\cos x$ を表せ．また $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換して定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{5+4\cos x}dx$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182902)

0.127 関数 $f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ について，３点

(i) $(x,y)=(0,0)$,　　(ii) $(x,y)=\left(\dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{2\pi}{3}\right)$,　　(iii) $(x,y)=(\pi,0)$

は，$f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$ を満たす．このとき各点で $f(x,y)$ が極値を取るかどうかを判定せよ．また，極値を取る場合には極値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182903)

0.128 重積分 $I=\displaystyle\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0\right\}$ の値を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182904)

0.129 (1) 次の x,y,z に関する連立一次方程式が，解を持たないための定数 k の条件を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} & & -&3y&+&z&=&-3\\ &3x& & &-&2z&=&k\\ -&x&+&2y& & &=&1\end{array}\right.$$

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&0&-2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b\\c\\d\end{pmatrix}$ について，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．$\boldsymbol{b}$ として $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を選ぶとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のそれぞれの解 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182905)

0.130 対称行列 $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182906)

0.131 関数 $y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ に対して，その逆関数をそれぞれ $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$ と書く．そのとき次の方程式を解け．

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}=\mathrm{Cos}^{-1}x$$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192901)

0.132 次の関数の不定積分を求めよ．　$f(x)=\dfrac{3x^2-2}{2x^3-x^2+2x-1}$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192902)

0.133　次の関数の極値を求めよ．

$$f(x,y) = x^3 - 3xy - y^2 - y + 1$$

(名古屋工業大 2019)　　(m20192903)

0.134　次の行列 A の列を左から $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & -15 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ から一次独立なものを取り出すとき，その最大個数 r を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ から r 個の一次独立なものを, 前の方から順に取り出せ．

(3)　(2) で選ばなかったものを，(2) で選んだものの一次結合で表せ．

(名古屋工業大 2019)　　(m20192904)

0.135　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A を対角化せよ．

(2)　自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(名古屋工業大 2019)　　(m20192905)

0.136　関数 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ に対し，$f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項まででで打ち切って得られる高々4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2020)　　(m20202901)

0.137　(1)　次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2)　次の広義積分が収束するかどうか判定せよ．　$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.138　次の関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ が原点 $(0,0)$ において極値をとるかどうかを，それぞれ判定せよ．なお，極値をとる場合については極大・極小の区別を明示して判定すること．

$$f(x,y) = x^2y + 3x^2 - 5xy + 2y^2$$
$$g(x,y) = (1 + x^2 - y^2)\cos(3x - 2y)$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202903)

0.139　次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} \qquad \text{ただし}\quad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ 2x^2 - 1 \leqq y \leqq x^2\right\}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202904)

0.140　x, y, z についての次の連立 1 次方程式を解け．ただし a は定数である．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + az &= 5 \\ x + ay - 2z &= a \end{cases}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202905)

0.141 次の実対称行列 A に対し，実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202906)

0.142 関数 $f(x) = (x^3+1)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を n 回微分して得られる第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) 極限値

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3}$$

が存在するような定数 a_0，a_1，a_2 と，そのときの極限値 A を求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212901)

0.143 関数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1) + \dfrac{2}{3}(x + y)$ の極値を求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212902)

0.144 領域 $D = \left\{(x, y) \ \middle| \ x^2 + y^2 \leqq 3,\ x + y \geqq 0\right\}$ において，重積分

$$\iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} dxdy$$

の値を求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212903)

0.145 行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の逆行列 A^{-1} の行列式を求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212904)

0.146 k は定数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2k \\ -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) A が対角化可能であるような k の値をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2021) (m20212905)

0.147 関数 $f(x) = \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1} x\right)$ の増減を調べ，極値を求めよ．ただし，$y = \mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域は $0 \leqq y \leqq \pi$ である．

(名古屋工業大 2022) (m20222901)

0.148 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222902)

0.149 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-x^2-y^2+2xy$ の極値を調べよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222903)

0.150 xy 平面上で, $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸, 直線 $y=1$, 直線 $y=2$ で囲まれる領域を D とする. このとき, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022) (m20222904)

0.151 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は定数とする.

(1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ.

(2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222905)

0.152 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

(名古屋工業大 2022) (m20222906)

0.153 関数 $\log x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ. 収束に関しては調べなくてよい.

(名古屋工業大 2023) (m20232901)

0.154 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232902)

0.155 領域 $D=\Big\{(x,y)\ \Big|\ x^2+y^2 \leqq 1\Big\}$ とする.

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232903)

0.156 領域 $D=\Big\{(x,y)\ \Big|\ x^2+y^2 \leqq 1\Big\}$ とする.

関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x$ の D における最大値と最小値を求めよ,

(名古屋工業大 2023) (m20232904)

0.157 座標空間において 3 つの平面

$$x+3z=a, \qquad x+(a+1)y-z=-1, \qquad x+6y-9z=a-6$$

の共通部分が直線 l であるとき, 定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2023) (m20232905)

0.158 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) P の逆行列を求めよ．

(2) P の列ベクトルを左から順に $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ とおいたとき，

$$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, \qquad A\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2, \qquad A\boldsymbol{p}_3 = 2\boldsymbol{p}_3$$

をみたす 3 次正方行列 A およびその固有値を求めよ．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232906)