[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：奈良女子大

0.1 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y = \sinh^{-1}(x)$　（ただし，$\sinh(y) = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である）

(奈良女子大 2001)　(m20013201)

0.2 次の極限値は存在しますか．存在する場合はその極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

(奈良女子大 2001)　(m20013202)

0.3 次の関数のグラフの概形を描きなさい．

(1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 18x$　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$　(3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(奈良女子大 2001)　(m20013203)

0.4 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)dx$　（n は正の整数）　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$

(奈良女子大 2001)　(m20013204)

0.5 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ $(s > 0)$ に対して以下の等式を証明せよ．

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$　(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$　（n は正の整数）

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$　（必要ならば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$ を使ってもよい）

(奈良女子大 2001)　(m20013205)

0.6 次の定積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (5x+7x^3)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|dx$

(奈良女子大 2001)　(m20013206)

0.7 次の各数列は収束しますか，収束する場合はその極限値を求めなさい．

(1) $1 + (-1)^n$　(2) $\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+n}$

(奈良女子大 2001)　(m20013207)

0.8 式 (a) の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{dI(t)}{dt} + \lambda I(t) = v_0 \quad \cdots \quad (a)$$

ここで，$t \geq 0$，λ は正の定数，v_0 は正または 0 の定数である．

(1) $v_0 = 0$ の解は任意定数 C を用いて以下のように与えられることを示せ．

$$I(t) = C\exp(-\lambda t)$$

(2) $v_0 \neq 0$ の解は定数 C が時間に依存するものとして式 (a) に代入することによって得られる．初期条件 $I(0) = 0$ を満たすような解を求め，$I(t)$ を t の関数として図示せよ．

(奈良女子大 2001)　(m20013208)

0.9 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次のように定めます.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立ですか.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は一次独立ですか.

(3) x と y の間にどのような関係があれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ は一次従属ですか.

(奈良女子大 2001) (m20013209)

0.10 ２次行列 A, B を次のように定めます.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $AB = BA$ が成り立つことを確かめなさい.

(2) $AC = CA$ を満たすような行列 C をすべて求めなさい.

(奈良女子大 2001) (m20013210)

0.11 次の行列が逆行列を持つかどうか調べなさい. 持つ場合にはその逆行列を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001) (m20013211)

0.12 n 行 n 列の正方行列 A の転置をとり, さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 A のエルミート共役といい, $A^\dagger$ と書く. つまり,

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

また, $A^\dagger = A$ であるとき, 行列 A をエルミート行列と言う. エルミート行列に関して以下の問いに答えよ.

(1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ.

(2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ.

(3) 下に示す行列 A はエルミート行列である. 行列 A の固有値と固有ベクトルを求め, 上記 (1), (2) が成り立つことを確かめよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001) (m20013212)

0.13 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　(2) $y = \tan^{-1}(1+x)$

(奈良女子大 2002) (m20023201)

0.14 $f(x) = |x-1|$ とおく.

(1) 関数 $f(x)$ のグラフを描け.　　(2) $a \neq 1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 1$ で微分可能か.

(奈良女子大 2002) (m20023202)

0.15　次の定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x}\,dx$　　　　(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

(奈良女子大 2002)　　(m20023203)

0.16　$t>0$ に対して，$F(t)=\displaystyle\int_0^t (2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．

(1)　$F(1)$ を求めよ．　　　　(2)　導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(2)　$G(s)=\displaystyle\int_0^{e^{-s}} (2x^3-3x^2-x+1)dx$ とおく．導関数 $G'(s)$ を求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023204)

0.17　次の各数列は収束するか，収束する場合はその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{2n^2-n}{n^2+1}$　　(2) $\dfrac{(-1)^n}{n}$　　(3) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n}$　　(4) $\dfrac{2^n}{n!}$

(奈良女子大 2002)　　(m20023205)

0.18　次の微分方程式を解け．初期条件として，$t=0$ のとき位置は $x=x_0$，速度を v_0 とする．ここで，k は実数である．

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$　　　　(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$

(奈良女子大 2002)　　(m20023206)

0.19　2 次行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2)　零行列でない 2 次行列 B で $AB=O$ を満たすものを求めよ．

(3)　零行列でない 2 次行列 C で $AC=CA=O$ を満たすものを求めよ．

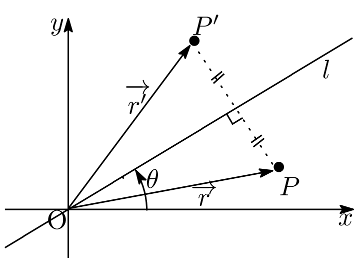
(奈良女子大 2002)　　(m20023207)

0.20　原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{r'}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=R_\theta\overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta=\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.21 次の行列について以下の問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) 得られた各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2002) (m20023209)

0.22 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a, b, c を次のように定める．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) a, b は一次独立であることを示せ．

(2) a, b, c は一次従属であることを示せ．

(3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f で

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(奈良女子大 2002) (m20023210)

0.23 次の関数の導関数を求めよ． $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(奈良女子大 2003) (m20033201)

0.24 次の関数 $y = e^x \sin x$ について以下の問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が $y^{(1)} = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ となることを示せ．

(2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(奈良女子大 2003) (m20033202)

0.25 以下では e は自然対数の底とする．

(1) $x \geq 1$ のとき，次の不等式が成立することを証明せよ． $e^x > x^2$

(2) 上の (1) における不等式の両辺を積分することによって，$x \geq 1$ のとき次の不等式が成立することを証明せよ． $e^x > \dfrac{x^3}{3} + 2$

(奈良女子大 2003) (m20033203)

0.26 次の各数列は収束するか．収束する場合はその極限値を求めよ．収束しない場合はそのことを証明せよ．

(1) $\dfrac{2n^3+n+2}{n^3-n^2+n+1}$, (2) $\dfrac{\sin n}{n}$, (3) $\dfrac{(-1)^n n+1}{n}$

(奈良女子大 2003) (m20033204)

0.27 x の関数 $f(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} - 2f(x) = e^x \qquad (*)$$

を考える．この方程式の一般解 $f(x)$ は，この方程式の任意の解（特解）$g(x)$ と，式 $(*)$ の右辺を 0 とおいた微分方程式

$$\frac{d^2h(x)}{dx^2}+\frac{dh(x)}{dx}-2h(x)=0$$

の一般解 $h(x)$ との和，

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

で与えられる．以下の手順で一般解を求めよ．

(1) $g(x)=Axe^x$ $(A$: 定数$)$ の形の特解を求めたい．A を決定せよ．

(2) $h(x)$ を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033205)

0.28 $\mathbf{R^3}$ のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}x\\x\\y\end{pmatrix}$$

(1) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は一次独立であることを示せ．また，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$ は一次従属であることを示せ．

(2) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}\}$ が一次独立になるための x,y についての条件を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033206)

0.29 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 を実数とするとき，次の不等式を証明せよ．

(1) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq a_1b_1+a_2b_2$

(2) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(奈良女子大 2003) (m20033207)

0.30 ２次行列 $A=\begin{pmatrix}0&1\\a&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b&0\\0&c\end{pmatrix}$

に対して，$AB\neq BA$ となるための a,b,c の条件を求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033208)

0.31 行列 $A=\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\\varepsilon&1\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，ε は実数で，$\varepsilon\neq\pm1$, $\varepsilon\neq0$ であるとする．

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033209)

0.32 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta(m-n)}d\theta=\delta_{m,n}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & (m=n)\\0 & (m\neq n)\end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いよ．

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.33 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, ただし, a は定数である.

(2) $y = \dfrac{x+3}{x^2-1}$

（奈良女子大 2004） (m20043201)

0.34 n を 2 以上の自然数とし, 多項式 $f(x) = (x+1)^n$ と $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ を考える.（ただし, c_k は定数）

(1) $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$ および $g''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(0) - g'(0)$ および $f''(0) - g''(0)$ を求めよ.

（奈良女子大 2004） (m20043202)

0.35 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^2 x dx$

（奈良女子大 2004） (m20043203)

0.36 $u(x)$ は微分可能な関数, a と b は定数とする. 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(e^{-ax}u(x)) = be^{-ax}$ ならば $\dfrac{d}{dx}u(x) - a\,u(x) = b$ が成り立ち, またその逆も成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{d}{dx}(e^{-ax}u(x)) = be^{-ax}$ の左辺および右辺をそれぞれ 0 から t まで積分せよ. とくに, $u(0) = 0$ として, $u(t)$ を表せ.

（奈良女子大 2004） (m20043204)

0.37 $y(\rho)$ に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2y(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dy(\rho)}{d\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\} y(\rho) = 0$$

を考える. ここで, 変数 ρ の範囲は, $0 \leq \rho < \infty$ であり, l は正の整数である.

(1) いま, $y(\rho)$ を

$$y(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho}$$

とおいて, この方程式に代入すると, $u(\rho)$ についての方程式

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + p(\rho)u(\rho) = 0 \qquad (a)$$

が得られる. このときの $p(\rho)$ を求めよ.

(2) つぎに, (1) で得られた方程式 (a) の $\rho \to \infty$ および $\rho \to 0$ の極限における $u(\rho)$ の漸近解を求めてみよう.

(a) $\rho \to \infty$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = e^{\lambda\rho}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

(b) $\rho \to 0$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = \rho^{\lambda}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

（奈良女子大 2004） (m20043205)

0.38 実ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ を次のように定める.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{d}$ および $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で示せ.

(2) どのような実ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ も $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表せることを示せ.

（奈良女子大 2004） (m20043206)

0.39 実ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ の長さを $|\boldsymbol{x}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ とする. 実ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して, $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ となるための条件を求めよ.

（奈良女子大 2004） (m20043207)

0.40 3次の正方行列 A, S を次のように定める.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(1) AS を求めよ. (2) AS^2 を求めよ.

（奈良女子大 2004） (m20043208)

0.41 3次元空間の 0 でないベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ があり, それらの間の内積（スカラー積）が

$$\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}=\begin{cases}|\overrightarrow{a_i}|^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

で与えられている. ただし, i, $j=1,2,3$ で, $|\overrightarrow{a_i}|$ はベクトル $\overrightarrow{a_i}$ の大きさである. 以下の問いに答えよ.

(1) λ_1, λ_2, λ_3 を係数とする方程式

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}=0$$

が, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ のときのみ成り立つ場合, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ は線形独立なベクトルであるという. 実際に, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ が線形独立であることを示せ.

(2) $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して,

$$\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{a_2}\times\overrightarrow{a_3})=\overrightarrow{a_2}\cdot(\overrightarrow{a_3}\times\overrightarrow{a_1})=\overrightarrow{a_3}\cdot(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2})$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\overrightarrow{a_i}\times\overrightarrow{a_j}$ は $\overrightarrow{a_i}$ と $\overrightarrow{a_j}$ のベクトル積である.

（奈良女子大 2004） (m20043209)

0.42 3次行列 $A=\begin{pmatrix}8&6&-9\\5&-4&6\\7&8&-12\end{pmatrix}$ と三つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}8\\5\\7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}6\\-4\\8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-9\\6\\-12\end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立か. (2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か. (3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立か.

(4) A の行列式の値を求めよ. (5) A は逆行列をもつか.

(奈良女子大 2005) (m20053201)

0.43 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限値を求めよ.

(1) $(-1)^n$ (2) $\dfrac{n}{n+1}$ (3) $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(奈良女子大 2005) (m20053202)

0.44 開区間 $(0,1)(=\{x\,|\,0<x<1\})$ 上の関数

$$f(x) = -x\log x$$

に対して次の問に答えよ.

(1) $0<a<1$ のとき微分係数 $f'(a)$ を求めよ.

(2) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $0<a<1$ のとき $f(a^2)=2af(a)$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{a\to+0} f(a^2)=0$ が成り立つことを示せ.

(5) $(0,1)$ における関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.

(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053203)

0.45 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1+\theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005) (m20053204)

0.46 3 次行列と $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 4 つのベクトル

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ に対して次の問に答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ. (2) A の逆行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ の一次結合として $\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ $(x, y, z$ は実数) の形で表せ.

(奈良女子大 2006)　　(m20063201)

0.47 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^2+1}$ および $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ を求めよ.

(2) 関数 e^{-x^2} を微分せよ.

(奈良女子大 2006)　　(m20063202)

0.48 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ.

(奈良女子大 2006)　　(m20063203)

0.49 実数 θ に対して $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく. また, 2 次の単位行列を E とおく. 次の問に答えよ.

(1) ${}^tA(\theta)A(\theta) = E$ となることを示せ. ただしここで, ${}^tA(\theta)$ は $A(\theta)$ の転置行列である.

(2) $A(-\theta)$ が $A(\theta)$ の逆行列であることを示せ.

(3) 実数 θ, θ' に対し, $A(\theta)A(\theta') = A(\theta + \theta')$ が成り立つことを示せ.

(奈良女子大 2006)　　(m20063204)

0.50 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c は実数) に対して次の問いに答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.　　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$, $A^3\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が二つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるときの c の値を求めよ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073201)

0.51 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ に関して次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073202)

0.52 a を正の定数とする. $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y = -\frac{x^2}{2} + a \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$C_2 \ : \ y = -\log x \quad (\ x > 0\ )$$

について考える. いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする. 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) 直線 $y = a$ と C_2 の交点の座標を求めよ.

(3) C_1 , C_2 と直線 $y = a$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2007)　　(m20073203)

0.53 次の行列の行列式を求めよ．また，この行列の逆行列が存在するか否か判定せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007)　　(m20073204)

0.54 次の行列の全ての固有値とそれに属する規格化された固有ベクトルを求めよ．　$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2007)　　(m20073205)

0.55 2 次元平面の直交座標を (x, y)，また，極座標を (r, θ) とする．このとき，

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

の関係が成り立つ．x, y および r, θ が時間 t の関数であるとき，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を $\dfrac{dr}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073206)

0.56 次の不定積分 I を求めよ．　$I = \displaystyle\int x\cos x\,dx$

(奈良女子大 2007)　　(m20073207)

0.57 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし，a は正の定数とする．　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$

(2) 次の微分方程式を考える．　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = Ae^{ibx}$

ここで，A, a, b は正の定数とし，i は虚数単位である．

(a) $y = Be^{ibx}$ の形の特解を求めよ．　(b) 一般解を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073208)

0.58 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ は，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$ とも書く．

(2) $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla\times\boldsymbol{v}$ は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007)　　(m20073209)

0.59 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

に対して次の問いに答えよ．ただし k は実数である．

(1) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ を求めよ．　(2) $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $A\boldsymbol{c}$ が $A\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b}$ の一次結合として表されるとき，k の値を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083201)

0.60 関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)} + \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$　$(x \neq 0, 1, 2)$ に関して次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083202)

0.61　$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 \ : \ y = \sin x \qquad (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$$

$$C_2 \ : \ y = \sin(x - a) \qquad (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$$

について考える．ただし，a は正の定数で，$0 < a \leqq \pi$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，C_1, C_2 のグラフの概形を描け．

(2) $0 < x \leqq \ 2\pi$ の範囲において，C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を，それぞれ t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ とする．t_1, t_2 を a で表わせ．

(3) $t_1 \leqq \ x \leqq \ t_2$ の範囲で，C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083203)

0.62　次の行列の逆行列を求めよ．ただし，a, b, c, d は実数であり，$ad - bc \neq 0$ である．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2008)　　(m20083204)

0.63　次の行列の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ．　$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2008)　　(m20083205)

0.64　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

(奈良女子大 2008)　　(m20083206)

0.65　変数 t の関数 $x(t)$ の満たす微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$　ここで，ω_0 は正の定数とする．

(2) 次の微分方程式を考える．　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$　ここで，ω_0 および λ は正の定数とする．$\lambda^2 - {\omega_0}^2 = -\omega^2 < 0$　（ω：正の定数）である場合の一般解を求めよ．

(3) (1) および (2) の微分方程式で記述できると思われる物理現象の例を一つずつあげよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083207)

0.66　3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\, r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla \times \ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla \times \ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.67 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と，ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えよ．ただし，a は実数である．

(1) 行列 A^2 および B^2 を求めよ．

(2) 2 つのベクトル $A^2\boldsymbol{v}$ と $B^2\boldsymbol{v}$ は一次独立であることを示せ．

(3) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}$ と $B\boldsymbol{v}$ が一次従属となるときの a の値を求めよ．

(奈良女子大 2009) (m20093201)

0.68 関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ に関して次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2009) (m20093202)

0.69 関数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ のグラフ G に関して次の問いに答えよ．

(1) 原点におけるグラフ G の接線 L の方程式を求めよ．

(2) 接線 L は，グラフ G と原点以外で交わらないことを示せ．

(3) グラフ G，接線 L および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2009) (m20093203)

0.70 次の微分を求めよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}\cos(bx)\right)$ （a, b は定数）

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(奈良女子大 2009) (m20093204)

0.71 次の不定積分と定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{-ax}dx$ （a は定数）

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-2a\cos\theta+a^2}}$ $(a > 0)$

(奈良女子大 2009) (m20093205)

0.72 F_n が次のように定義されているとする．

$$F_n \equiv \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は正の整数である．

(1) F_1 を求めよ．

(2) n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ.

$$F_n = \frac{n-1}{2}F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009)　　(m20093206)

0.73 次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(1) 積 AB を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 2 次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて，$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ を作った．このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ.

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.74 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ からベクトル積（外積）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \times \ \boldsymbol{\omega}$ を作った．このベクトル $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル A の成分 A_x , A_y , A_z を求めよ.

(2) $\mathrm{div}\, A = \nabla A$ を求めよ.

(3) $\mathrm{rot}\, A = \nabla \times \ A$ を求めよ.

ただし，$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

(奈良女子大 2009)　　(m20093208)

0.75 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ （k は実数）に対して次の問に答えよ.

(1) 行列 A^2, A^3 を求めよ.

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ が 2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$, $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合として表されるとき, k の値を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103201)

0.76 関数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$ $(x > 0)$ に関して次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103202)

0.77 a を負の定数とする. 点 $P(-1, 1)$ を通る傾きが a の直線 L と, xy平面上の曲線

$$C \ : \ y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

について考える. 次の問に答えよ.

(1) L と C がただ 1 つの共有点を持つような a の値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの a の値に対し, L と C の共有点の座標を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103203)

0.78　次の定積分 I に関する以下の問いに答えよ.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(1)　次の定積分を求めよ.

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

(2)　変数を変えることで, I^2 は次のように書けることを示せ.

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

(3)　この 2 次元積分は直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換することで求めることができる. 積分を実行して I^2 を求め, $I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.
ただし, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ であり, $dxdy = rdrd\theta$ である.

(奈良女子大 2010)　　(m20103204)

0.79　次の微分方程式について以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(1)　次の $x(t)$ はこの微分方程式の解であることを示せ.

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

ここで, $C_1,\ C_2$ は定数である.

(2)　この $x(t)$ は次のように表すこともできる.

$$x(t) = B_1 e^{+i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$$

このとき, $B_1,\ B_2$ と $C_1,\ C_2$ の関係を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103205)

0.80　次の微分を求めよ. ただし, a は正の定数であるとする.

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-ax^2}$$

(奈良女子大 2010)　　(m20103206)

0.81　次の定積分を求めよ. ただし, $a,\ b$ は正の定数であるとする.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx)\, dx$$

(奈良女子大 2010)　　(m20103207)

0.82　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，次の問に答えよ.

(1)　行列 A^2 を求めよ.

(2)　2 つのベクトル $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ は一次独立であることを示せ.

(3)　ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A\boldsymbol{a}$ と $A^2\boldsymbol{a}$ の一次結合で表せ.

(奈良女子大 2011)　　(m20113201)

0.83 関数 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\lim_{x \to 0} f(x)$ および $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2011)　　(m20113202)

0.84 xy平面上の曲線

$$C \ : \ y = \log x \ \ (x > 0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2011)　　(m20113203)

0.85 以下の関数を微分せよ．

(1) $y = \cosh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$　　(2) $y = \tan^{-1} x$

(奈良女子大 2011)　　(m20113204)

0.86 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-ax} dx \quad (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha} \log x \, dx \quad (\alpha > -1)$

(奈良女子大 2011)　　(m20113205)

0.87 以下の関数を微分せよ．ただし，a, b, c は実定数である．

(1) $y = \cos(ax^2 + bx + c)$

(2) $y = \dfrac{\exp(-ax)}{x^2}$

(奈良女子大 2012)　　(m20123201)

0.88 次の積分を求めよ．ただし，a は実定数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax) dx \qquad (a \neq 0)$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} \sin(mx)\sin(nx)\, dx \qquad$ (m, n は正の整数)

(奈良女子大 2012)　　(m20123202)

0.89 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = A\cos(\omega t) \qquad \cdots (\text{ア})$$

の一般解 $x(t)$ は，$A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される．以下の問いに答えよ．ただし，A, ω, ω_0 は実定数である．

(1) $x_0(t)$ を求めよ．

(2) $x_1(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し，未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ．ただし，$\omega \neq \omega_0$ とする．

(3) 初期条件が $x(0) = x_0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ の場合，式 (ア) の解を求めよ．また，$\omega \to \omega_0$ とした時，その解はどうなるか．

(奈良女子大 2012)　　(m20123203)

0.90 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, , \ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, , \ 0 \right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x-y$ 平面上に図示せよ.

ここで, ∇ は次のように定義された演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \, , \ \frac{\partial}{\partial y} \, , \ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2012)　　(m20123204)

0.91 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化すること.

(4) 行列 A は, 直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより, 対角行列 B に変換することができる.

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123205)

0.92 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

と, ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ. ただし, a は実数である.

(1) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_3$ が一次従属となるときの a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a の値に対し,

$$A^{2n-1} = (-2)^{n-1} A$$

が成り立つことを示せ. ただし, n は 1 以上の整数である.

(奈良女子大 2012)　　(m20123206)

0.93 関数 $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123207)

0.94 xy平面上の曲線

$$C : y = e^x + x$$

に対して，次の問に答えよ.

(1) 原点を通り曲線 C に接する直線 ℓ を求めよ.

(2) 曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2012)　　(m20123208)

0.95 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である.

(1) 行列 A^2 を求めよ.

(2) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{e}_1$，$A\boldsymbol{e}_2$，$A\boldsymbol{e}_1$ が一次従属となるときの a の値を求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133201)

0.96 関数 $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\ \ (x > -1)$ に対して，次の問に答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次および第 2 次導関数を求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133202)

0.97 xy平面上の曲線

$$C : y = e^x$$

と，点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である.

(1) 直線 ℓ を求めよ.

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2013)　　(m20133203)

0.98 次の関数を微分せよ．ただし，a は $a > 0$，かつ $a \neq 1$ の実定数である.

(1) $y = a^{-x}$　　(2) $y = \sin(\tan x)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133204)

0.99 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

(奈良女子大 2013)　　(m20133205)

0.100 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+2}{x+1}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(奈良女子大 2013) (m20133206)

0.101 A を連続微分可能なベクトル場, $f(x,y,z)$ を連続微分可能な関数とするとき, 以下の関係式を証明せよ. ただし, $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \nabla f(x,y,z)) = 0$

(2) $(A \cdot \nabla)A = \dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2) - A \times (\nabla \times A)$

(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{A \times \boldsymbol{r}}{r} \right) = \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times A)}{r}$

ここで,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

である. 必要なら, 以下の関係式を用いてよい.

(a) $\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f\nabla \cdot A$

(b) $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f\nabla \times A$

(c) $\nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B$

(d) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

(奈良女子大 2013) (m20133207)

0.102 次の行列 $A(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)A(\theta_2)$ であることを示せ.

(3) $A(\theta)A(-\theta) = I$ を示せ. ここで I は単位行列である.

(4) 行列 $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の固有値をすべて求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133208)

0.103 次の微分を求めよ. ただし, a は実定数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(ax)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 e^{-ax}\right)$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(奈良女子大 2014) (m20143201)

0.104 次の積分を求めよ. ただし, a は正の実定数である.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos x dx$

(奈良女子大 2014) (m20143202)

0.105 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(x^2+2x)$$

(2) 解の形として $x = ae^{i\omega t}$ を仮定し，以下に示す手順で微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$$

を解く．ここで，a は正の実定数で ω は複素定数とする．

(a) $\dfrac{dx}{dt}$ を計算し，それを x を用いて表せ．

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を計算し，それを x を用いて表せ．

(c) ω が満たすべき方程式を導け．

(d) 上で求めた方程式を解くことによって，ω を求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143203)

0.106　次のスカラー関数 $U(x, y, z)$ について以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実定数とする．

$$U(x, y, z) = \exp\left[-a(x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ．

(2) $\nabla \cdot F = 0$ となるとき，x, y, z が満たす条件をすべて求めよ．

(3) $\nabla \times\ F$ を求めよ．

ここで，演算子 ∇ は次のように定義する．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2014)　　(m20143204)

0.107　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$ と，ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．ただし，a は実数である．

(1) $A\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(2) 2 つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2$ は a の値にかかわらず一次独立となることを示せ．

(3) 3 つのベクトル $A\boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{v}_2$，$A\boldsymbol{v}_3$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143205)

0.108　以下の級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143206)

0.109　xy平面上の曲線

$C\ :\ y = xe^{-x}$

について次の問に答えよ．

(1) C 上の点 $(a,\ ae^{-a})$ における C の接線の方程式を求めよ．ただし a は実数とする．

(2) C 上の点 $(1,\ e^{-1})$ における C の接線を ℓ とする． C, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) y 軸上の点 $(0, b)$ を通る C の接線がちょうど 2 本存在するための，b のみたすべき条件を求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143207)

0.110 以下の関数を微分せよ．ただし，$m,\ \sigma$ は正の定数である．

(1) $y = \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$　　(2) $y = \tan^{-1} x^2$

(奈良女子大 2015)　　(m20153201)

0.111 次の積分を求めよ．ただし，a は正の定数，n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty r^3 \exp\bigl(-ar^2\bigr)\, dr\ 2$　　(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n x\, \cos x\, dx$

(奈良女子大 2015)　　(m20153202)

0.112 以下の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots（ア）$$

ただし，$\mu,\ \omega$ は正の定数である．以下の問に答えよ．

(1) $x(t) \propto \exp(-at)$ の形の解を考える．$x(t)$ が式（ア）の解となる a の値を，μ と ω を用いて表せ．

(2) $a = a_R \pm ia_I$ のとき，式（ア）の解は振動しながら減衰する．このとき μ と ω が満たす不等式を答えよ．ただし，a_R と a_I は実数で，$i = \sqrt{-1}$ である．

(3) 前問 (2) の場合に，初期条件が $x(0) = 0,\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$ であるときの 式（ア）の解を求め，a_R と a_I を用いて表せ.

(奈良女子大 2015)　　(m20153203)

0.113 $\boldsymbol{r} = (x, y, z),\ r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の時，以下の量を計算せよ．ただし，$r \neq 0$ とする．

(1) ∇r^n　　(2) $\nabla \times\ r^n \boldsymbol{r}$　　(3) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　　(4) $\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　　(5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで，∇ は以下で定義する微分演算子であり，

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数，$\boldsymbol{p}$ は定ベクトル，n は定数である．

(奈良女子大 2015)　　(m20153204)

0.114 次の行列 A に関する以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし，a および b は実数であり，$b \neq 0$ とする．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ，

(3) 前問で得られた固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること．

(4) 適切な直交行列を使って，行列 A を対角化せよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153205)

0.115　ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は一次独立となることを示せ．

(2) a を実数とするとき，3 つのベクトル $a\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ ，$-\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_3$ ，$a\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ が一次従属となるような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153206)

0.116　関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 1 次導関数を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153207)

0.117　$xy-$ 平面上の曲線

$$C : y = \log(1 + x^2) \ \ (x \geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.118　次の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ の値を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つような正則行列 P を求めよ．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163201)

0.119　(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{5x - 4}{2x^2 + x - 6} dx$$

(2) 自然数 m, n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

(奈良女子大 2016)　　(m20163202)

0.120 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.121 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ を求めよ．

(2) 関数 $y = \log \sqrt{1 - x^2}$ を微分せよ．ただし，x は実数で $|x| < 1$ とする．

(奈良女子大 2016)　　(m20163204)

0.122 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}$ を考える．ただし，x は正の実数とする．

(1) 最小点 $x = x_0$ を求めよ．

(2) $x = x_0$ の周りでテイラー展開をして $x - x_0$ の 2 乗の項までの近似式を求めよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163205)

0.123 正の実数 a に対して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ が成り立つことを利用して，

定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 e^{-a(x^2-2x)} dx$ を計算せよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163206)

0.124 微分方程式に関する以下の問題に答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -x + \sin t$ を解いて，$t = 0$ で $x = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 1 - \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ を考える．

(a) $v = \dfrac{dx}{dt}$ とおく．$t = 0$ で $v = 0$ となる解 $v(t)$ を求めよ．

(b) $t = 0$ で $x = 0$ かつ $v = 0$ となる解 $x(t)$ を求めよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163207)

0.125 xy 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える．

(1) この式は実数の定数 a, b, c を成分に持つ 2×2 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って，

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる．行列 A を求めよ．

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする). $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする. $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ.

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016)　　(m20163208)

0.126 ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交することを示せ.

(2) 3つのベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は一次独立でないことを示せ,

(3) 3次正方行列 A に対して $A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき, $A\boldsymbol{v}_3$ を求めよ. さらに $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき, A を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173201)

0.127 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 = 1\,, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1} \quad (n \geqq 2)$$

と定められている. 以下の問いに答えよ.

(1) $a_2,\ a_3$ を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ に対し $a_n - \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}-1}{a_{n-1}+1}(a_{n-1} - \sqrt{2})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173202)

0.128 $x \geqq 0$ 定義された関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ ついて, 以下の問いに答えよ.

(1) f の増減おいび凹凸を調べ, $y = f(x)$ のグラフの概形を書け.

(2) f の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ であることを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2017)　　(m20173203)

0.129 (1) 関数 $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{x}\right)$ を x で微分せよ．

(2) 関数 $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ を考える．ここで，ω_0，γ は正の実定数とする．以下の問いに答えよ;

(a) 極限値 $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty} f(\omega)$ を求めよ．

(b) $\omega > 0$ の範囲で，$f(\omega)$ が極大をもつために満たすべき ω_0 と γ に対する条件式を求めよ．またその時の ω を求めよ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173204)

0.130 次の 2 重積分

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

を求めよ．ここで a は正の実定数とする．

(奈良女子大 2017)　　(m20173205)

0.131 以下の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1x_2 - k_2(x_2-x_1) \end{cases}$$

ただし，m，k_1，k_2 は正の実定数である．以下の問いに答えよ．

(1) これら 2 つの方程式を $X_1 = x_1 + x_2$，$X_2 = x_1 - x_2$ で定義される X_1，X_2 に対する方程式に書き直せ．また，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$，　$\omega' = \sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}}$ とおいて，X_1，X_2 に対する一般解を求めよ．

(2) $t = 0$ で，$x_1 = 1$，$x_2 = 0$ かつ $v_1 = 0$，$v_2 = 0$ を満たす解 $x_1(t)$，$x_2(t)$ を求めよ．ここで，$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$，　$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ とする．

(奈良女子大 2017)　　(m20173206)

0.132 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.133 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として，$\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) 行列式 A を求めよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(奈良女子大 2017)　　(m20173208)

0.134 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに，$f_1 = A\mathbf{e}_1$, $f_2 = A\mathbf{e}_2$, $f_3 = A\mathbf{e}_3$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) f_1, f_2, f_3 が一次従属となる a, b の条件を求めよ．

(2) $Bf_1 = \boldsymbol{e}_1$, $Bf_2 = \boldsymbol{e}_2$, $Bf_3 = \boldsymbol{e}_3$ となる 3 次正方行列 B が存在するための a, b を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183201)

0.135 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.136 関数 $f(x) = x^2(1-x)^4$ と $g(x) = x^4(1-x)^2$ を，$0 \leqq x \leqq 1$ において考える．以下の問いに答えよ．

(1) f の増減を $0 \leqq x \leqq 1$ において調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．さらに，$y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq f(x)$ かつ $0 \leqq y \leqq g(x)$ の表す領域の面積を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183203)

0.137 与えられた条件の下で，以下の関数を微分せよ．

(1) $y = xe^x$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$,　(σおよび m は正の定数)

(3) $y = \sin^{-1} x$　(x のとりうる値は $\left[-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$ を満たす範囲のみとする)

(奈良女子大 2018)　　(m20183204)

0.138 a を正の定数として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

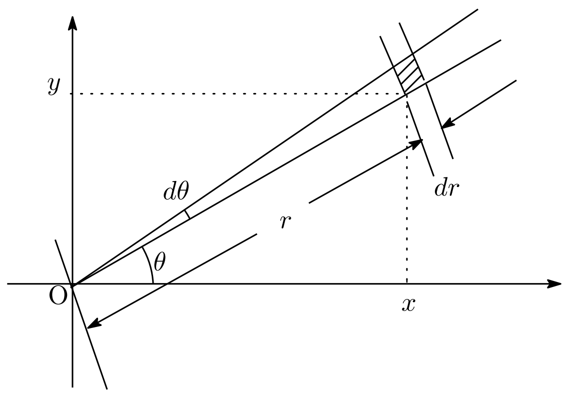
であるから，

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 (x, y) の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ として，$r = |\overrightarrow{r}|$, $\overrightarrow{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく．

(1) x および y を r と θ の式で表せ.

(2) 下図の斜線部の微小面積を, r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ.



(3) I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ.

(4) 前問の面積分を実行し, それにより I の値を求めよ.

(奈良女子大 2018) (m20183205)

0.139 時間 t ($t \geqq 0$) の関数 $N_1(t)$ および $N_2(t)$ に関する以下の連立微分方程式についての問いに答えよ. ただし, λ_1, λ_2 は時間に依存しない正の定数とする.

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \end{cases}$$

(1) $N_1(t)$ を求めよ. ただし, $N_1(t)$ の初期値は $N_1(0)$ とする.

(2) 時間 t を横軸にとり, $N_1(t)$ のグラフの概形を描け.

(3) $N_2(t) = e^{-\lambda_2 t}C(t)$ とおいて $C(t)$ についての微分方程式を導出せよ.

(4) $C(t)$ についての微分方程式を解き, $N_2(t)$ を求めよ. ただし, $N_2(t)$ の初期値はゼロとする.

(奈良女子大 2018) (m20183206)

0.140 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式を求めよ.

(2) 固有値を全て求めよ.

(3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ. ここで固有ベクトルの長さは任意でよく, また必ずしも互いに直交せずともかまわない.

(奈良女子大 2018) (m20183207)

0.141 a, b, c を定数とし, 3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに A の固有値の異なる値の個数が 2 個になるための a, b, c の条件を求めよ．

(2) A の一次独立な 3 つの固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193201)

0.142 r を $|r| < \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が，任意の自然数 n に対し以下の関係式をみたすとする．

$$a_{n+1} = r(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = r(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = r(a_n + b_n)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n) = 0$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを示せ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193202)

0.143 n を自然数，a を実数とし　$\displaystyle I_n = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+1)^n}$　とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$\displaystyle I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\int_0^a x\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

(2) 次の等式を示せ．　$\displaystyle I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left\{\frac{a}{(a^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right\}$

(3) 次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(奈良女子大 2019)　　(m20193203)

0.144 関数 $f(x) = \cos^{-1}(x^3)$ を微分せよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193204)

0.145 関数 $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$　$(-1 < x < 1)$ を $x = 0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ．

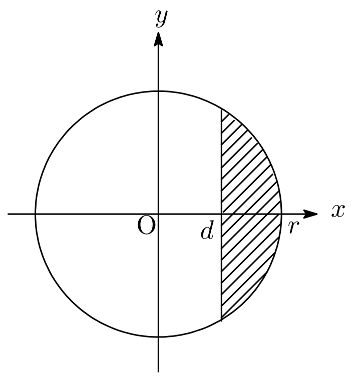
(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.146 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，一次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，および二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193206)

0.147 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax + b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする．

(2) 下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.148　t の関数 $I(t)$ に関する以下の微分方程式を考える．

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)$$

ただし，L, R は正の定数である．以下の問いに答えよ．

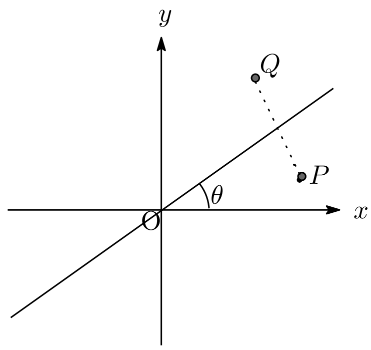
(1)　$V(t) = 0$ のとき，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(2)　$V(t) = V_0$（定数）のとき，$I(t) = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ とおいて微分方程式を解き，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(3)　$V(t) = V_0$（定数）のとき，初期条件 $I(0) = 0$ を満たす特解 $I(t)$ を求めよ．また，$I(t)$ の概形を図示せよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193208)

0.149　下図のように，点 P を直線 $y = (\tan\theta)x$ に関して対称な点 Q に移す変換行列を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193209)

0.150　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193210)

0.151　a を実数とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1)　ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が一次独立であることを示せ．

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4\}$ が一次独立とならないような a の値をすべて求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223201)

0.152 p を $0<p<1$ をみたす実数とする．行列 A および数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$A=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ \ a_1=1,\ \ b_1=0,\ \ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}\ \ (n \geqq 2)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $k \geqq 1$ に対し，A^k を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ であることを示せ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223202)

0.153 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$y=f(x)$ の接線で点 $A(a,0)$ を通るものがちょうど 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223203)

0.154 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223204)

0.155 関数 $f(x)=x-(x-a)^{2/3}$ の極値を求めよ．ただし，a は正の実数で，x は a より大きい実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223205)

0.156 3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の面上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式を求めよ．ただし，$a,\ b,\ c$ はいずれも正の実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223206)

0.157 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ．

ただし，$a>b>0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする．

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ．

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L=2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.158 時間 t $(t \geq 0)$ で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\left(f(t) - x(t)\right)$$

ここで a は正の実数で, $f(t)$ は与えられた実関数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $a = \log_e 2$ で, $t \geq 0$ で $f(t) = 0$ である場合に, $x(0) = 1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ.

(2) 一般に時間が十分に経った後の解は, $x(0)$ の値に関係なく

$$x(t) = a\int_0^t f(u)e^{a(u-t)}du$$

に近づくことを示せ.

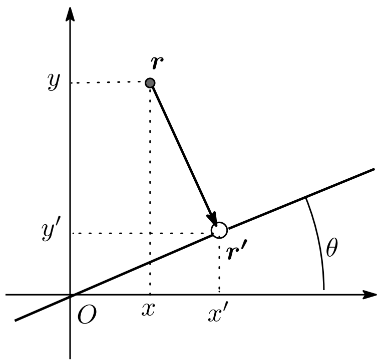
(3) 次に, $a = \log_e 2$ で, 関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2n \leq t < 2n+1) \\ 0 & (2n+1 \leq t < 2n+2) \end{cases}$$

であ場合を考える. 整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223208)

0.159 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を, x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える. 以下の問いに答えよ.



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って, ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる. 行列 A を求めよ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し, それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)