[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：岡山大

0.1　区間 I 上の関数 $f(x)$ が，$x<y<z$ なる I の任意の 3 点 x,y,z に対して不等式

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

を満たすとき，$f(x)$ は上に凸であるという．

(1)　$f(x)$ が I 上で 2 回微分可能であり，$f''(x) \leq 0$ が任意の x で成り立つならば，$f(x)$ は上に凸であることを示せ．

(2)　$f(x)$ が上に凸であれば，$x<y$ なる I の任意の 2 点 x,y と $0<a<1$ なる任意の実数 a に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(ax+(1-a)y) \geq af(x)+(1-a)f(y)$$

(3)　$\alpha, \beta>0, \alpha+\beta=1$ であれば，任意の $x,y>0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$x^{\alpha}y^{\beta} \leq \alpha x+\beta y$$

(岡山大 2001)　(m20014001)

0.2　点 (x,y) が原点を中心とする半径 1 の円周上を動きまわるとき，$x \geq 0,\ y \geq 0$ の範囲で以下の値の最大・最小を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　$x+y-rxy$　（ただし，r は正の実数）

(岡山大 2001)　(m20014002)

0.3　正の数 a,b,c が $a+b+c=1$ を満たすとき，行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

に対し，次の問に答えよ．

(1)　1 は A の固有値であることを示せ．

(2)　1 以外の A の固有値を求め，それらの絶対値は 1 より小さいことを示せ．

(3)　$\mathbf{x}$ を 3 次元のベクトルとするとき，n を限りなく大きくすれば，$A^n\mathbf{x}$ はある 3 次元ベクトルに限りなく近づくことを示せ．

(岡山大 2001)　(m20014003)

0.4　(1)　n を正の整数とする．このとき，

$$\sin^{2n+1}x \leqq \sin^{2n}x \leqq \sin^{2n-1}x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi/2)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$\sin^0 x=1$ $(0 \leqq x \leqq \pi/2)$ と定め，$n=0,1,2,\cdots$ に対して　$I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$　とおく．
このとき，　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n \geqq 2)$　が成り立つことを示せ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2$ を求めよ．

(岡山大 2003)　(m20034001)

0.5　実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ を求めよ．

(岡山大 2003)　(m20034002)

0.6 連立一次方程式

$$\begin{cases} \quad\quad y-2z &= 1 \\ 2x+2y+az &= b \\ 4x+3y &= b \\ 2x+y+z &= c \end{cases} \tag{$*$}$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，a,b,c は実数であるとする．

(1) 方程式 $(*)$ の解がただ一つ存在するとき，a,b,c の間に成り立つ関係を述べよ．また，その解を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ の解の全体が 3 次元ユークリッド空間内の直線になっているとき，a,b,c の間に成り立つ関係を述べよ．また，その直線のあらわす式を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034003)

0.7 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=3$, $b_1=1$, $c_1=-1$,

$$a_{n+1}=3a_n+b_n+c_n\ ,\ b_{n+1}=a_n+2b_n\ ,\ c_{n+1}=a_n+2c_n \qquad (n \geqq 1)$$

によって定義する．これらの数列の一般項を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034004)

0.8 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 10 & 7 & 10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $A^2-5A+6E$ を計算せよ. ただし E は単位行列を表す.

(2) 整式 $f(x)=x^8$ を 2 次式 $g(x)=x^2-5x+6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とおく. このとき $f(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ たちが満たす関係式を述べよ. また $Q(x)$ と $R(x)$ の次数はいくつか？

(3) (1) の行列 A に対して A^8 を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054001)

0.9 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$ を求めよ.

(2) 2 つの関数 $\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ と $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1} x}{x}$ は各々区間 $[1,\infty)$ で広義積分可能かどうかを答えよ.

(岡山大 2005)　　(m20054002)

0.10 曲線 $x^2-2xy+3y^2=1$ の上の点で, 原点から最も近い点と最も遠い点を求め, それぞれの点の原点からの距離を求めよ.

(岡山大 2005)　　(m20054003)

0.11 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつのは，a,b,c の間にどのような関係が成り立つときか答えよ．

(岡山大 2006)　　(m20064001)

0.12 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n=\cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ．

(2) 曲線 $C_2(0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ．

(岡山大 2006)　　(m20064002)

0.13 c_1, c_2 を定数とする．y を微分方程式　$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$　の解とする．

(1) 非負な整数 n に対して，$y^{(n)}(0)$ を求めよ．　(2) y を求めよ．

(岡山大 2006)　　(m20064003)

0.14 (1) 次の行列 A に対して，その階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $m \geqq 2,\ n \geqq 1$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行を取り除いた $(m-1) \times n$ 行列を A' と書くことにする．$\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A')$ は 0 または 1 であることを示せ．

(3) $m \geqq 2,\ n \geqq 2$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(m-1) \times (n-1)$ 行列を A'' と書くことにする．A をさまざまな行列を動かしたときの $\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A'')$ の最小値と最大値を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074001)

0.15 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$　で定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ．

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x) - F(x) \geqq 0$ であることを示せ．

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ．

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ は増加関数であることを示せ．

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.16 (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ．

(2) $p\dfrac{dp}{dy} = y - 2y^3\ (0 \leqq y < 1),\ p(0) = 0$ の解 $p \in C^1([0,1))$ をすべて求めよ．

(3) (1) と (2) を利用して　$\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0,\ 0 \leqq y < 1,\ x \in \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} y(x) = 1, \end{cases}$　の解を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074003)

0.17 (1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1+at}{1+bt}$ によって定義する（a, b は定数）．このとき，$f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)$ を計算せよ．

(2) 次の極限値が存在するように定数 a, b を定め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\left(\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right)$$

(岡山大 2008)　　(m20084001)

0.18 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$ が成り立つ理由を説明せよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}dx\right\}$ を示し，$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084002)

0.19 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ．

(2) 実数を成分とする $3\times\ 3$ 行列 X で，$X^3 = I\ \ (X \neq I)$ を満たすものをひとつ求めよ．ただし，I は単位行列を表す．

(岡山大 2008)　　(m20084003)

0.20 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の 3 つの列ベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつための a, b, c に関する条件を求めよ．

(3) 行列 A の固有値および固有空間をすべて求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084004)

0.21 数直線 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2\log(1+x^2)\ , \quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle g(x) = \int_0^x (tf'(t) - f(t))\,dt$ を求めよ．

(2) $\displaystyle f'(x) > \frac{f(x)}{x} > \frac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ．

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094001)

0.22 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s > 0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx = \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ．

(3) $s > 1$ のとき，

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.23 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$，$A \neq \alpha E$，$A \neq \beta E$ が成り立つことを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列とする．

(2) $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y}$ をそれぞれ満たす零でない列ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在することを示せ．また，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は一次独立であることを示せ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正則行列 P が存在することを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094003)

0.24 (1) 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を計算し，その逆行列を求めよ（答のみでよい）．

(2) (x_1, x_2, x_3, x_4) に関する次の連立一次方程式が $(0,0,0,0)$ 以外にも解をもつとき，a の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(岡山大 2009)　　(m20094004)

0.25 実数全体を定義域とする関数 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を考える.

(1) $f(x)^2 - f'(x)^2$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ は単調増加であることを示せ.

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を示せ.

(岡山大 2010)　　(m20104001)

0.26 (1) n を整数とするとき, $\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ の原始関数を求めよ.

(2) n が 2 以上の整数のとき, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \leqq \frac{\pi}{4}$$

(岡山大 2010)　　(m20104002)

0.27 1 から 9 までの数字を並べて 3 次正方行列 A を作る. ただし, すべての数字を一度ずつ使うこととする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式が 0 であるようなものと, 0 でないようなものの例を一つずつ作れ.

(2) 階数が 1 であるような行列 A は作れないことを証明せよ.

(岡山大 2010)　　(m20104003)

0.28 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える．
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010)　　(m20104004)

0.29 (1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフを描け.

(2) 3^π と π^3 はどちらが大きいか，理由を付けて答えよ.

(岡山大 2011)　　(m20114001)

0.30 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011)　　(m20114002)

0.31 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，すべての成分 a, b, c, d が正数のとき，次の問いに答えよ.

(1) A は異なる実数の固有値を持つことを示せ.

(2) 固有ベクトルとして少なくとも一つは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x > 0,\ y > 0)$ となるベクトルがとれることを示せ.

(岡山大 2011)　　(m20114003)

0.32 (1) $M_2(C)$ を複素数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体の集合とする，$M_2(C)$ は行列の足し算とスカラー倍により複素ベクトル空間になる．$M_2(C)$ の次元を求めよ.

(2) $A \in M_2(C)$ に対して写像 $f_A : M_2(C) \to M_2(C)$ を $f_A(X) = AX - XA$ で定める．このとき, f_A が線形写像になることを示せ.

(3) f_A の核の次元を求めよ.

(岡山大 2011)　　(m20114004)

0.33 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a, b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a, b]$ 上で連続とし,

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0$,

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.34 $|x| \neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(-x)$ を示せ．

(2) $f(x) + f(-x) = f(x^2)$ を示せ．

(3) $x \neq 0$ のとき，$f(x) = 2\pi \log |x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ．

(4) $|x| < 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(5) $|x| > 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124002)

0.35 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124003)

0.36 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ．

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は，V 上の線形変換であることを示せ．また，f の階数を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124004)

0.37 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を

$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$

とし，関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を

$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ．

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ．

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ．

(岡山大 2013)　　(m20134001)

0.38　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(1)$ の値を求めよ．

(2)　導関数 $f'(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ．

(3)　正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(岡山大 2013)　　(m20134002)

0.39　a を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$A-E$ は逆行列を持たないことを示せ．（ただし，E は単位行列とする.）

(2)　ある正の実数 b に対して，$A-bE$ も $A+bE$ も逆行列を持たないとする．このとき a の値を求めよ．

(3)　ある正則な行列 P により

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき a の値を求めよ．また，このような行列 P を一つ求めよ．

(岡山大 2013)　　(m20134003)

0.40　行列 X の階数を $\mathrm{rank}(X)$ と表すことにする．A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ．

(1)　不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(B)$$

を示せ．また，A が正則ならば等号が成立することを示せ．

(2)　$AB=O$（ゼロ行列）のとき，不等式

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) \leqq n$$

を示せ．

(3)　$n=3$ とし，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．B の階数を求めよ．さらに

$$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)-2$$

を満たす A は存在しないことを示せ．

(岡山大 2013)　　(m20134004)

0.41　ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ．

(1)　収束半径 r を求めよ．

(2) $|x| < r$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(3) $f(x) = (1-x)\log(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.42 (1) 整式 $x^4(1-x)^4$ を整式 $1+x^2$ で割った商と余りを求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ を求めよ．

(3) 不等式 $\pi < \dfrac{22}{7}$ を示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x(1-x) \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを用いて，不等式 $\pi > \dfrac{22}{7} \cdot \dfrac{1024}{1025}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144002)

0.43 3 次元実ベクトルが空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の固有多項式を求めよ．

(2) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}\}$ は : $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(3) W の次元を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ が，無限個の自然数 n に対して不等式

$$||f^n(\boldsymbol{x})|| < 2^n ||\boldsymbol{x}||$$

を満たすための実数 x, y, z の条件を求めよ．ただし f^n は合成変換 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ 個}}$ を表し，$|| \cdot ||$ はベクトルの長さを表すものとする．

(岡山大 2014)　　(m20144003)

0.44 正の実数 b, c が $bc = 1$ を満たすとして，空間の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(0,1,1)$, $B(b,0,b)$, $C(c,c,0)$ を考える．三角形 ABC を含む平面 α 上に点 H を，線分 OH が α と垂直になるようにとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 H の座標を b で表せ．

(2) 線分 OH の長さの最大値を求めよ．また，そのときの b の値を求めよ．

(3) 点 H が三角形 ABC の内部に存在するための b の条件を求めよ．

(岡山大 2014)　　(m20144004)

0.45 開区間 $(-1,1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x (x-t) f''(t)\,dt$ を示せ．

(2) $f(x)=(1+x)^{1/3}$ のとき，

$$\left|\int_0^x (x-t)f''(t)dt\right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $7^3=343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ．

(岡山大 2015)　　(m20154001)

0.46 (1) 不等式 $0 \leqq t-\log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2} \quad (t \geqq 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K=1$ のときに発散し，$k=2$ のとき収束することを示せ．

(3) 全ての $x>0$ に対して，級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ．

(4) 全ての $x \geqq 0$ に対して，級数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ．

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.47 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．ただし，A は次で与えられる行列とする．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ．

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ．

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.48 3 次正方行列 $A,\ B$ を

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B={}^tAA$$

により与えられる．ここで，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) A および B の行列式を計算せよ．

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ．

(3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ．

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ．

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.49 関数 $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$f_n(x) = c_n \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n$$

で定める．ただし，c_n は正の定数で

$$\int_0^\pi f_n(x)dx = 1$$

となるように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^n \sin x dx$$

を求めよ．

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n < \dfrac{n+1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 < x \leqq \pi$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164001)

0.50 関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を　$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$　により定める．a_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$　が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.51 実数を成分とする 3 次正方行列 A で次の条件を満たすものを考える．

$$(*) \qquad A^2 \neq O, \qquad A^3 = O$$

以下の問いに答えよ．

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，B は上記の条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(2) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ が存在することを示せ．

(3) 上記 (2) における $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{u}$, $A^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) ある正則行列 P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されることを示せ．

(岡山大 2016)　　(m20164003)

0.52　$t \in \mathbb{R}$ に対して，3 次正方行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し，かつ，$\det A = 0$ となる t を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(3) 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a} \rangle\, \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{c}\,, \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3,),\ \boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3,) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である．
$\mathrm{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164004)

0.53　(1) 関数 $g(x) = \sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ．

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ．

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.54　(1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^\lambda x e^{-nx^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017)　　(m20174002)

0.55 初期値 $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフイボナッチ数列という．例えば，$F_3 = F_2 + F_1 = 2,\ F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) F_6 を求めよ．また，行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $n \geqq 1$ に対して，3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき，$n \geqq 1$ に対して，$\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ．

(岡山大 2017)　　(m20174003)

0.56 (1) 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(2) $x,\ y,\ z$ を変数とする連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ & & 3y & + & 5z & = & c \end{array} \right.$$

が解をもつための $a,\ b,\ c$ の条件を答えよ．また，その一般解を求めよ．

(岡山大 2017)　　(m20174004)