[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：大分大

0.1 いま，２次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \leqq \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ が成り立つとき，この２点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) ２点間の関係 L について，下記の①〜③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この２点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，２次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．
このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．
[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①〜③のいずれかを入れよ．

関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．
さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．
以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　(m20025101)

0.2 半径 R の半球状のドームがある．
このドーム内に納めることの出来る，最大の体積を持つ円柱を求めたい．

(1) この円柱が半球に接しているとき，高さ h の円柱の体積 V を，R と h を用いて示せ．

(2) このとき h に対して円柱の体積 V はどの様に変化するか示せ．

(3) 円柱の体積が最大となる時，円柱の半径と高さを各々 R を用いて示せ．
また，最大となる円柱の体積と半球状のドームの体積との比はいくらか．

(大分大 2002)　(m20025102)

0.3 $y = x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$ と $y = -x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$ で示される二つの曲線がある．

(1) 二つの曲線の交点の座標を求めよ．

(2) 二つの曲線で囲まれた領域の面積を求めよ．

(大分大 2002)　(m20025103)

0.4 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ．

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ．

(大分大 2002)　(m20025104)

0.5 次の積分を求めなさい.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ , \qquad (a>0)$$

（大分大 2004） (m20045101)

0.6 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+m^2x(t)=0\ , \qquad (m>0)$$

(大分大 2004) (m20045102)

0.7 W を荷重, ρ を密度, g を重力の加速度, $A(x)$ を面積とするとき, ある工学の問題において次式を満足する $A(x)$ を求めることが必要になる. 次の問に答えなさい. ただし, W , ρ および g は一定とする.

$$\sigma_0 A(x)=W+\int_0^x \rho g A(t)dt\ ,\ \ A_0=A(0)>0\ ,\ \ \sigma_0=\frac{W}{A(0)}$$

(1) 上式の両辺を x で微分した式を求めなさい.

(2) (1) で得られた式を解いて, $A(x)$ を求めなさい.

(大分大 2004) (m20045103)

0.8 次の一階常微分方程式の解の公式を求めなさい.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ (2) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

(大分大 2005) (m20055101)

0.9 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x)dx$$

(大分大 2005) (m20055102)

0.10 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{x+6}{x^2-3x-4}dx$$

(大分大 2005) (m20055103)

0.11 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D xydxdy \qquad \text{ただし,}\quad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 4$$

(大分大 2005) (m20055104)

0.12 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする. a,b,c,d を求めなさい.

(2) この変換により, 直線 $x+y=0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい. ただし, a,b,c,d は (1) で求めた値とする.

(大分大 2007) (m20075101)

0.13 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

(大分大 2008) (m20085101)

0.14 1 周期が次のような周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = t \qquad (-1 \leqq t < 1)$$

(大分大 2008)　　(m20085102)

0.15 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1+2x} \quad \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1), (2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.16 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \log x \, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

(大分大 2009)　　(m20095101)

0.17 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x$$

(大分大 2009)　　(m20095102)

0.18 次の関数 $f(x)$ の $[-\pi, \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ -1 & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(大分大 2009)　　(m20095103)

0.19 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C \ : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009)　　(m20095104)

0.20 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t < +\infty)$$

で与えられている.

(1) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010)　　(m20105101)

0.21 次の不定積分を求めよ.

$$\int (2x-3)^{10}dx$$

(大分大 2011) (m20115101)

0.22 $\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2011) (m20115102)

0.23 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leqq 0) \\ 1 & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2011) (m20115103)

0.24 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (1) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

(大分大 2011) (m20115104)

0.25 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin(3x+5)$$

(大分大 2011) (m20115105)

0.26 次の行列に対して，固有値および固有ベクトルを求め，対角化しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(大分大 2011) (m20115106)

0.27 行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている．ただし，a は正の実数とする.

(1) A の行列式を求めなさい.

(2) A の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(i=1,2;\ j=1,2)$ を求めなさい.

(3) A の逆行列が存在するための条件と，そのときの逆行列を求めなさい.

(4) A の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(大分大 2011) (m20115107)

0.28 3 行 2 列行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

で定め，その転置行列を A^T で表す．さらに，行列 B と行列 P を

$$B = A^T A\,, \quad P = AB^{-1}A^T$$

により定める．ここで，B^{-1} は B の逆行列を表す．また，A の転置行列 A^T とはその i 行 j 列成分が A の j 行 i 列成分であるような 2 行 3 列行列のことである.

(1) B を求めなさい.

(2) P を求めなさい.

(3) 連立方程式

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解きなさい.

(大分大 2011) (m20115108)

0.29 次の不定積分を求めよ.

$$\int \sin(2x+1)dx$$

(大分大 2012) (m20125101)

0.30 $\cos^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2012) (m20125102)

0.31 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leqq t \leqq 0) \\ -1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125103)

0.32 次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{2x}dx$$

(大分大 2012) (m20125104)

0.33 $f(t) = \sin \omega t \quad (\omega \neq 0$ の実数) とするとき, $t \sin \omega t$ のラプラス変換を求めよ.

(大分大 2012) (m20125105)

0.34 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き, そのフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t \leqq 0) \\ 2t - \pi & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012) (m20125106)

0.35 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい.

(大分大 2012) (m20125107)

0.36 2 次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える. このとき, 行列 A と 2 次元のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, 2 次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}$ と定義する. ただし, 記号 T は, 行列やベクトルの転置を示し, $\boldsymbol{v}^T$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を示すものとする.

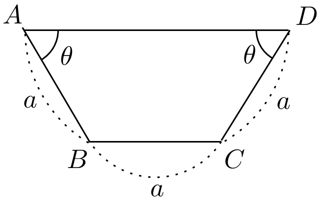
(1) 行列 A の固有値，固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい．

(2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し，$U^T AU = D$ と表現する．ただし，D は 2 次の対角行列とする．行列 U と D を求めなさい．

(3) (2) の結果を利用して，$f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい．

(大分大 2012)　　(m20125108)

0.37 図のような 3 辺 AB, BC, CD の長さが a の台形がある．この 3 辺の長さは変わらないとして，台形の面積が最大となるような角度 θ を求めなさい．



(大分大 2013)　　(m20135101)

0.38 次のように定義される周期関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

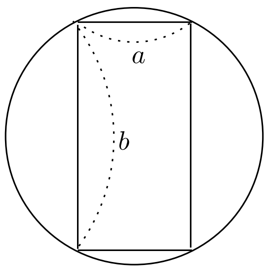
$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi), \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

(大分大 2013)　　(m20135102)

0.39 半径 r の円に内接する長方形がある．長方形の面積が最大となるような辺の長さ a, b を，円の半径 r を用いて表しなさい．



(大分大 2013)　　(m20135103)

0.40 周期関数 $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x < \pi)$,　$f(x + 2\pi) = f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる．

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ．

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.41 ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0\,,\ \ x(0) = 1$$

(大分大 2013)　　(m20135105)

0.42 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$， 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$， $(a \neq 0)$，行列 $B = P^{-1}AP$ とする．

ここで，P^{-1} は P の逆行列を表す．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 行列 P^{-1} を求めなさい．

(2) 行列 B を求めなさい．

(3) n を正の整数とするとき，$A^n = PB^nP^{-1}$ が成り立つことを証明しなさい．

(大分大 2014)　　(m20145101)

0.43 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ が，$x = 1$ で極大値をとり，$x = 2$ で極小値をとるように関数 $f(x)$ の係数 a と b を決定せよ．

(大分大 2014)　　(m20145102)

0.44 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x(x+1)}dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$　　(3) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(大分大 2014)　　(m20145103)