[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：大阪大

0.1 縦 $1(m)$，横 $n(m)$ の床がある．この床に，縦 $1(m)$，横 $k(m)$ のタイル T_k を何枚か使って敷き詰めたい．T_k は何枚でも使ってよいものとする．床が $n(m)$ のときのタイルの敷き詰め方を f_n 通り，また T_1 を使わずに敷き詰めるときの詰め方を g_n 通りとする時，次の問に答えよ．なお，n, k は整数とする．

例：

f_1 は $T_1\times\ 1$ の 1 通りだけなので，$f_1 = 1$

f_2 は $T_1\times\ 2$ および $T_2\times\ 1$ の 2 通りだけなので，$f_2 = 2$

(1) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_2 + f_1$ であることを示せ.

(2) f_n を求めよ.

(3) $g_n - g_{n-1} - g_{n-2} = 0$, $g_2 = 1$, $g_1 = 0$ であることを示せ.

(4) g_n を求めよ.

(大阪大 1995)　(m19953501)

0.2 次の不等式を証明せよ．(ただし, $x \geq 0$)　$e^x > \dfrac{x^2}{2}$

(大阪大 1995)　(m19953502)

0.3 次のことを証明せよ．$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log x = 0$　（ヒント：$\log x = -y$ とおき給え.）

(大阪大 1995)　(m19953503)

0.4 次の広義積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

(大阪大 1995)　(m19953504)

0.5 次の積分の積分値を求めよ．

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D: x^2+y^2 \leq 1 \text{ である.）}$$

(大阪大 1995)　(m19953505)

0.6 $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ について以下の各問いに答えよ.

(1) 2 次形式 F の表現行列 $\mathbf{A}$ を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有値 α, β およびそれに対応する単位固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求めよ.

(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交することを示せ.

(4) 一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ.

(5) $\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とした時，$\mathbf{P}$ は直交行列であることを示せ.

(6) $\mathbf{A}$ を対角化せよ.

(7) F の標準形を求めよ.

(大阪大 1995)　(m19953506)

0.7 2 つの 3 次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ に対して，外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は次のように定義される.

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ 1，互いに垂直）を，また，$|\ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2) 外積について $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) 3 つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ．($\cdot$ は，内積を表す.)

(大阪大 1996)　　(m19963501)

0.8 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0) \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 1996)　　(m19963502)

0.9 以下の問 (1)〜(6) に答えよ．

あるパーティで，n 人がひとつずつプレゼントを用意して，お互いに交換することになった．n 人には 1 番から n 番までの番号がついているものとし，すべてのプレゼントは区別できるものとする．本問では，集合 X の要素数を $|X|$ と表すことにする．

[集合 $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ の定義]

j 番（ただし，j は 1 以上 n 以下の任意の整数）の人に着目する．j 番の人にその人自身が用意したプレゼントがあたるような交換のしかたすべての集合を $S(j)$ と定義する．この記法は 1 パラメタに関するものであるが，これを任意の $k (1 \leqq k \leqq n)$ 個のパラメタに関する記法に拡張する．ある k 人 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ がそれぞれ自分のプレゼントに当たることが同時に起きるような交換のしかたすべての集合を $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ と表す．ただし，次の (a)〜(c) の条件を満たすものとする．

(a) k は 1 以上 n 以下の任意の整数である．

(b) $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n$

(c) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ に属する交換のしかたのなかには，$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 以外の人で自分のプレゼントに当たっている人がいる交換のしかたも含まれるものとする．

（定義終わり）

(1) プレゼントの交換のしかたは全部で何通りあるか． n を用いて表せ．

(2) 集合 $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ を $S(j_1), S(j_2), \cdots, S(j_k)$ を用いて表せ．

(3) $|\, S(j_1, j_2, \cdots, j_k)\,|$ の値を n および k を用いて表せ．

(4) $|\, S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)\,|$ の値を n を用いて表せ．

(5) だれも自分のプレゼントには当たらないような交換のしかたは何通りあるか． n を用いて表せ．また，そのように表すことができる理由を簡単に説明せよ．

(6) n 個のプレゼントをでたらめに n 人に配ったとする．このとき自分のプレゼントが自分に配られるような人の数の期待値を求めよ．また，その導出過程も簡単に示せ．

(大阪大 1996） (m19963503)

0.10 $y = ax^2$ と $y = x + k \quad (k > 0\ ,\ a > 0)$ があり，負の交点を A ，他方を B とする．原点 O と A と B を通る円がある． O 以外での x 軸と交わる円の交点を C とする．このとき CB は x 軸と垂直である．次の各問に答えよ．

(1) a と k の関係を求めよ．

(2) 円の方程式を a で表せ．

(3) 四角形 $OACB$ の面積は円の内接四角形の最大の面積の何倍か．

(大阪大 1997) (m19973501)

0.11 $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}}dx$ に対し，

(1) I_0 , I_1 を求めよ．

(2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(3) (1),(2) より， $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ．

(大阪大 1997) (m19973502)

0.12 x の関数 $y = y(x)$ に関する定数係数線形常微分方程式について以下の問に答えよ．

(1) $y'' - 2y' + 5y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x$ の解を一つ求めよ．

(3) $y'' - 2y' + 5y = 4xe^x$ の解を一つ求めよ．

(4) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x + 4xe^x$ の解で $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ となる解を求めよ．

(大阪大 1997） (m19973503)

0.13 平面上に２点 A , B がある．線分 AB を直径とする円を考え，その中心を C ，半径を R とする．

(1) ２点 A , B の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とし，円周上の任意の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(2) この点 P における接線を l とする．接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とし，円の中心点 C の位置ベクトルを $\overrightarrow{c}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{c}) = R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(3)　２点 A , B の座標をそれぞれ $(2,4)$, $(4,2)$ とする．接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973504)

0.14　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，

(1)　固有値と単位固有ベクトルを求めよ．

(2)　対角化するための直交行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3)　$B=A^9+3A$ を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973505)

0.15　次の各問いに答えよ．

(1)　サイコロ２つを一度に振る動作を N 回行う．このとき同じ目の出る確率が 0.5 以上になる最小の N を求めよ．

(2)　２つの目の差（絶対値）の期待値を求めよ．

(3)　２つの目の和の期待値を求めよ．ただし，ぞろ目の時はもう一度振り，この２回の和を値とし，たとえば，$(6,6)$, $(4,4)$, $(2,2)$, $(1,4)$ と出たら数字は 29 である．

(大阪大 1997)　　(m19973506)

0.16　以下の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1)　正６角形の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正６角形と辺を共有しない（すなわち，正６角形の対角線で構成される）３角形はいくつあるか求めよ．

(2)　正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数を n を用いて表せ．

(3)　正 n 角形（ n は６以上の整数）の頂点を結んで出きる３角形のうち，この正 n 角形と辺を共有しない３角形の数が，それ以外の３角形の数より大きくなるのはどのような場合か n を用いて表せ．

(4)　１から n （ n は６以上の整数）までの整数を１つずつ書いた n 枚のカードがある．もとに戻すことなくカードを３回引き，それらの番号を順に a , b , c とする．，このとき a , b , c が互いに２以上離れた整数となる確率を n を用いて表せ．

(大阪大 1997)　　(m19973507)

0.17　S は $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq a^2$ となる領域である．ただし，$a>0$ とする．

(1)　次の関係が成り立つことを示せ．

$$\iint_S f(x)\,dx\,dy=\iint_S f(y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_S \big(f(x)+f(y)\big)\,dx\,dy$$

(2)　$\displaystyle\iint_S x^4\,dx\,dy$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\iint_S x^6\,dx\,dy$ を求めよ．
(大阪大 1998)　　(m19983501)

0.18 実数値未知パラメタ α を含む次の連立一次方程式を考える．未知パラメタ α の値によって，この連立一次方程式の解の性質がどのようになるかを示せ．

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 2 \\ 2x + y + \alpha z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

(大阪大 1998)　　(m19983502)

0.19 二つの n 次正方行列 A , B に対して，それらの積 AB の固有値は積の順序を入れ換えた BA の固有値でもあることを示せ.

(大阪大 1998)　　(m19983503)

0.20 袋の中に赤球 x 個，白球 y 個，青球 z 個，合わせて $(x+y+z)$ 個の球が入っている．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x=3$, $y=2$, $z=1$ とする．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は袋に戻さないとする．

(2) $x=3$, $y=2$, $z=1$ とする．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤，白，青の順に出る確率を求めよ．ただし，とり出した球は 1 回ずつ袋に戻すとする．

(3) 3 球を同時にとり出すとき，赤，白，青の球が 1 個ずつである確率を x , y , z を使って表せ．

(4) 球の総数は 100 個である．1 個ずつ 3 回球をとり出すとき，赤球，赤球以外，赤球の順に球が出る確率を最大とする x , y , z を決定せよ．ただし，白球，青球はほぼ同程度の確率で現れ，白球の数は青球の数より少ないことはないとする．導出の過程を示すこと．

(大阪大 1998)　　(m19983504)

0.21 以下の問に答えよ．ただし，$C(m,r)$ は異なる m 個のものから r 個とる組み合わせの数を表す．ただし，$C(m,r)$ の値は，$m \geqq r$ の場合は通常の定義に従うものとし，$m < r$ の場合は $C(m,r)=0$ と定めることにする．

(1) 次の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．ただし，n は正の整数とする．

$$C(n,0)+2C(n,1)+3C(n,2)+\cdots+(n+1)C(n,n)$$

(2) 2 以上の整数 n に対して条件 [1] を満たす整数を x,y,z とする．

$$0 \leqq x < y < z \leqq n \cdots\cdots\cdots [1]$$

x,y,z の関数 $f(x,y,z)$ を次のように定義する．

$$f(x,y,z) = C(x,1)+C(y,2)+C(z,3)$$

条件 [1] を満たす組 (x,y,z) すべての集合を関数 f の定義域とするとき，異なる値 $f(x,y,z)$ の個数 $R(n)$ を考える．すなわち，$R(n)$ は関数 f の値域の要素数である．

$x_1 \neq x_2$ あるいは $y_1 \neq y_2$ あるいは $z_1 \neq z_2$ のいずれかが成り立つとき，

$f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2)$ となる場合は，値 $f(x_1,y_1,z_1)$ を重複して勘定しないことに注意せよ．

(a) 条件 [1] を満たす (x,y,z) の組の個数（すなわち，関数 f の定義域の要素数）を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(b) $n=6$ の場合，異なる $f(x,y,z)$ の値をすべて列挙せよ．また，$R(6)$ の値も書け．

(c) 一般の n に対して $R(n)$ の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(大阪大 1999)　　(m19993501)

0.22 実数値関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - 2x\cos y + x^2}}\,dy$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 積分を用いずに $f(x)$ を表せ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(大阪大 1999)　　(m19993502)

0.23 ２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．以下の問に順次答えよ．

(1) ２次形式 $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ の行列 A を求めよ．

(2) 対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より２次の正方行列 $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ を作成した場合， P が直交行列となっていることを示せ．

(4) P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5) (3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x, y) 座標系から (x', y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) ２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x', y') で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け．

(大阪大 1999)　　(m19993503)

0.24 行列に対する新たな演算子 $\otimes$ を考え，式の集合 $\mathcal{Z}$ を以下のように定義する．

(1) 各行列 $A_1,\ A_2, \ldots$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(2) $\mathcal{Z}$ に属する任意の式 $F,\ G$ に対し，式 $(F \otimes G)$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(3) $\mathcal{Z}$ は，上の２条件に該当する式だけを要素として含む．

このとき，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ に対し，それが $\mathcal{Z}$ の要素となるように「括弧づけ」を行うことを考える．例えば，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ に対しては

$$((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3))$$

の２通りの「括弧づけ」が存在する．また，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4$ に対しては

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4), \quad ((A_1 \otimes A_2) \otimes (A_3 \otimes A_4)) \quad ((A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)) \otimes A_4)$$

$$(A_1 \otimes ((A_2 \otimes A_3) \otimes A_4)), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes (A_3 \otimes A_4)))$$

の５通りの「括弧づけ」が存在する．以下では，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ (ただし $n \geq 2$) に対する「括弧づけ」の個数を T_n と表す．

(1) 式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4 \otimes A_5$ に対する「括弧づけ」を5通り示せ.

(2) $T_n \geq 2T_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(3) $T_n \geq 2T_{n-1}$ の結果および数学的帰納法を用いて, $T_n \geq 2^{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(4) 式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ には $\otimes$ が $n-1$ 個現れていることに注意して, $T_n \leq (n-1)!$ が成り立つことを示せ.

(大阪大 2001) (m20013501)

0.25 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ の解 $y = y(x)$ を

(1) $b = -2a^2$, (2) $b = \dfrac{a^2}{4}$, (3) $b = 2a^2$

の場合にそれぞれ求めよ. ただし, a は定数（実数）とする.

(大阪大 2001) (m20013502)

0.26 関数 $a(t)$, $b(t)$ はある区間 I で連続であり, 関数 $x_1(t) \neq 0$ は2階線形常微分方程式

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

の区間 I における解である. このとき

(1) 下の関数 $x_2(t)$ もまた区間 I における解であることを示せ.

$$x_2(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\{x_1(\tau)\}^2}\exp(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds)d\tau.$$

(2) 2つの解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は互いに独立であることを示せ.

(大阪大 2001) (m20013503)

0.27 区間 $(0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t) = \int_0^t \sin(2(t-u)) \cdot x(u)du + t$$

を満たすとする. このとき, $x(t)$ を求めよ.

(大阪大 2001) (m20013504)

0.28 行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 C, および, そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(大阪大 2001) (m20013505)

0.29 X_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ は3次の正方行列で, $X_{k+1} = AX_k + E$ が成り立つとする.

ここに, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

このとき, X_n を求めよ.

(大阪大 2001) (m20013506)

0.30 A を正則行列とする. A の固有値の一つが λ のとき, $\frac{1}{\lambda}$ が A の逆行列 A^{-1} の固有値になることを示せ.

(大阪大 2001) (m20013507)

0.31 C は複素数平面上の円 $|z-i|=1$ を表すとするとき，次の複素積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i}dz + \int_C \frac{1}{z+i}dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-i)^2}dz + \int_C \frac{i}{(z-i)(z+2i)}dz.$

(大阪大 2001)　　(m20013508)

0.32 X, Y は独立で，いずれも平均 0，分散 σ^2 を持つ確率変数であり，s, t, λ は実定数とする．2つの確率変数

$$S = X\cos\lambda s + Y\sin\lambda s, \quad T = X\cos\lambda(s+t) + Y\sin\lambda(s+t)$$

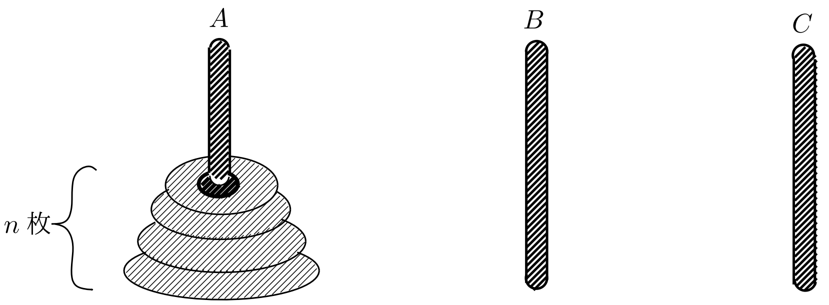
を考えるとき，次の問に答えよ．

(1) S, T の平均，分散，共分散を求めよ．

(2) S, T の相関係数を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013509)

0.33 以下の問題は，ハノイの塔と呼ばれる問題である．以下の設問 (1)-(3) に答えよ．



ハノイの塔の問題

図のように，n枚の円盤を積んだ塔がある．最初，３本の棒A,B,Cのうち，Aに全ての円盤を大きいものから小さいものへ順に積んである．このn枚の円盤全てを,Cの棒に移動したい．ただし，移動は，棒の最上の円盤１枚を別の棒の最上に動かすことしかできない（1回に２枚以上動かせない）．また，大きい円盤を小さい円盤の上に置いてはいけない．さらに，棒以外のところに円盤を置いてはいけない．

例えば n が 2 のとき，$A\to B$，$A\to C$，$B\to C$ と 3 回円盤を動かすことで，全てを移動できる．（$A\to B$ は，A の棒の最上の円盤を B の棒の最上に移動して置くことを意味する.）

(1) n が 3 のとき，全ての円盤を移動する最小の手順を $A\to B$，$\cdots$ のように記述せよ．

(2) 一般に n 枚 $(n\geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの，円盤の総移動回数を $X(n)$ とする．$X(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(3) ハノイの塔の問題に，$A\to C$ および $C\to A$ の移動を禁止する制約を追加する（他の制約は同じ）．この制約下で，n 枚 $(n\geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの円盤の総移動回数を $Y(n)$ とする．$Y(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023501)

0.34 (1) 関数 $f(x)$ は，任意の実数 x に対して 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．$x_1 < x_2$ として次の問いに答えよ．

(a) $x_1 < x_3 < x_2$ を満たす任意の x_3 に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

(b) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) \leqq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

(2) $f(x) = \log(1+\exp x)$ は任意の実数 x に対して，$f''(x) \geqq 0$ を満たすことを示せ．

(3) (1) と (2) の結果を用いて，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の α と任意の正数 y_1, y_2, z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ．（ヒント：$x_i = \log y_i - \log z_i$, $i = 1, 2$ とせよ.）

$${y_1}^{\alpha}{y_2}^{1-\alpha} + {z_1}^{\alpha}{z_2}^{1-\alpha} \leqq (y_1+z_1)^{\alpha}(y_2+z_2)^{1-\alpha}$$

(大阪大 2002)　　(m20023502)

0.35 $a, b > 0$, $a \neq b$ とし，常微分方程式の初期値問題，

$$\begin{cases} u'(t) + a\,u(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ v'(t) + b\,v(t) - a\,u(t) = 0 & (0 < t < \infty) \\ u(0) = 1 & \\ v(0) = 0 & \end{cases}$$

を考える．

(1) 解 $u(t)$, $v(t)$ を求めよ．

(2) $v(t)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け．

(3) $v(t)$ の最大値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023503)

0.36 行列 $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする．点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$，さらに円 $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ とし，円 C が f によって移される図形を C' とおく．次の問いに答えよ．

(1) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか．

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け．

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過しうる点 (x, y) の集合を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023504)

0.37 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2} dx$ を計算せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$ の値を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023505)

0.38 (1) 関数 $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

とフーリェ級数展開したとき，$a_n (n \geqq 0)$, $b_n (n \geqq 1)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ．

(大阪大 2002)　　(m20023506)

0.39 X, Y を平均 0，分散 1 の正規分布に従う独立な確率変数とする．

(1) $Z=|X|+|Y|$ とおく．Z の平均，分散を求めよ．

(2) $W=\max(|X|,|Y|)$ とおく．W の平均を求めよ．ただし，$\max(a,b)$ で a と b の大きい方の数を表す．

(大阪大 2002) (m20023507)

0.40 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を $g(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt$ で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x)=\cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0)>0$ のとき，$g(x)$ は $x=0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003) (m20033501)

0.41 次のような 4 つの未知変数 x_1，x_2，x_3，x_4 をもつ連立一次方程式を考える．

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 & = & 0 \\ 2x_1+5x_2-x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4 & = & 0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

次の (1), (2) に答えよ．

(1) 上述の連立一次方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルのうちで，なるべく少ない個数の列ベクトルを用いて，それらの一次結合（線形結合）によって，その他の列ベクトルを表現せよ．

(2) 上述の連立 1 次方程式の解 x_1, x_2, x_3, x_4 のうちで，

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$$

を最小にするものを求めよ．

(大阪大 2003) (m20033502)

0.42 赤い玉 3 個が一列に並んでいるとする．この列に対して次のような操作を繰り返し行う．

> 列の先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．選んだ玉が赤い玉なら，それをそのまま置いておき，列の先頭に白い玉を 1 つ付加する．選んだ玉が白い玉なら，それを取り去り，玉が抜けたために隙間ができれば，玉の順序が変わらないように玉を移動して隙間をなくす．

例として 1 回目の操作と 2 回目の操作について述べる．1 回目の操作で当然赤い玉を選ぶことになり，操作の結果として白い玉が 1 つ，列の先頭に付加され，3 つの赤い玉と合わせて 4 つの玉が並ぶことになる．2 回目の操作では，それらの 4 つの玉のうちの先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．このとき，確率 $\frac{2}{3}$ で赤い玉が選ばれ，確率 $\frac{1}{3}$ で白い玉が選ばれる．赤い玉が選ばれた場合には，白い玉が 1 つ先頭に付加され，結果として白い玉が 2 つ並び，その後に赤い玉が 3 つ続いた列ができる．また，白い玉が選ばれた場合には，白い玉は取り去られ，結果として列に

は赤い玉が 3 つ残ることになる．

n 回目の操作の終了時に列にある白い玉の個数を $w(n)$ と書くことにする．明らかに $w(n)$ は $0,1,2,3$ のいずれかの値を（それぞれある確率を持って）とる．特に $n=0$ の場合には確率は 1 で $w(0)=0$ であると定義しておく．

$i=0,1,2,3$ について，$w(n)$ が i である確率を $p_i(n)$ で表す．上で述べたことにより，$p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$, $p_0(0)=1$ である．

次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $p_1(2m)=p_3(2m)=0$ であることを示せ．ただし，m は非負整数とする．

(3) m を 1 以上の整数とするとき，$p_0(2m)$ と $p_2(2m)$ を $p_0(2m-2)$ と $p_2(2m-2)$ を用いて表せ．

(4) 非負整数 m について，$p_0(2m)$ を求めよ．

(大阪大 2003)　　(m20033503)

0.43 以下の設問に答えよ.

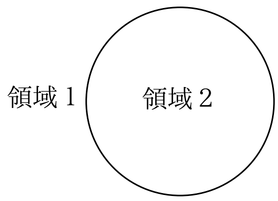
(1) 平面上に半径 $\dfrac{2}{3}$ の円 C および円 C 上に相異なる n 個の点 $P_1, \cdots, P_n$ がある. 各 P_i を中心とした半径 1 の円 C_i が描かれているとする $(1 \leqq i \leqq n)$. このとき, $P_1, \cdots, P_n$ と異なる C 上の点 P_{n+1} を適当にとり, P_{n+1} を中心とした半径 1 の円 C_{n+1} を描くと C_{n+1} は円 $C_1, \cdots, C_n$ と相異なる $2n$ 個の交点をもつようにできることを示せ.

(2) 平面を半径 1 の円でできるだけ多くの領域に分割することを考える. 円が 1 個,2 個のとき, 下の図のように 2 個,4 個の領域に分かれる. n 個の半径 1 の円での平面の最大の分割数を D_n と書くことにする $(n \geqq 1)$.

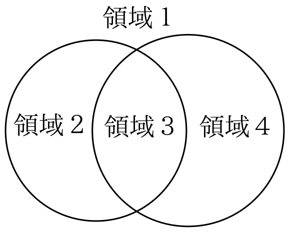
(a) $n=3,4$ のとき, 最大の分割数を与える図を書き, D_3 , D_4 を求めよ.

(b) $D_{n+1}=D_n+2n$ を示せ.

(c) D_n を n の式で示せ.



$D_1=2$



$D_2=4$

(大阪大 2004)　　(m20043501)

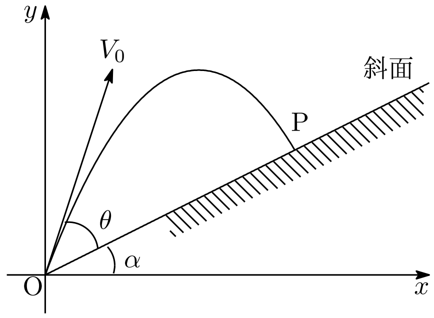
0.44 $a>0,\ 0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin 2x+2a(\sin x+\cos x)+2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおいて，y を t の関数として表せ．

(2) y の最大値および最小値を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043502)

0.45 右図のように水平面と $\alpha\ (0<\alpha<\pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して $\theta\ (\theta>0,\ 0<\alpha+\theta<\pi/2)$ の方向に物体を投



げる．以下の問いに答えよ．

(1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t\cos(\alpha+\theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\sin(\alpha+\theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043503)

0.46 曲線 $y = \dfrac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$ $(a>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線上の 2 点，$\mathrm{A}(0, \dfrac{1}{a})$，$\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の間の弧の長さ ℓ を a と q で表せ．

(2) $\ell = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$ のとき，点 $\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の座標を求めよ．

（大阪大 2004）　　(m20043504)

0.47 以下の設問に答えよ.

(1) $x>0$ の範囲で 3 つの関数 $f(x)=x-1$, $g(x)=\log x$, $h(x)=-\dfrac{1}{ex}$ を考える. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底である. すべての $x>0$ について, $f(x) \geqq g(x) \geqq h(x)$ を示せ.
また, $f(x) \geqq g(x)$, $g(x) \geqq h(x)$ の二つの不等式それぞれについて, 等式の成立する x の値を求めよ.

(2) $a_i > -1$ $(i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) > -\frac{1}{e}$$

を示せ. ただし, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ は n 個の実数 $1+a_1, \cdots, 1+a_n$ をかけた数を表す.

(3) $a_i = t$ $(i=1,\cdots,n,\ t>-1)$ のとき, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)$ を最小にする t の値と最小値を n を用いて表せ.

(4) 設問 (2) の不等式で, 右辺の $-\dfrac{1}{e}$ をより大きな数（n によらない）に変えても, $a_i > -1$ $(i=1,2,3,\cdots)$ をみたす任意の数列 $\{a_i\}$ と任意の n に対して, この不等式が成立するか. 理由を付けて答えよ.

（大阪大 2004）　　(m20043505)

0.48 s を実数, v を実数を成分とする 3 次元ベクトルとして,

$$A_s = E - sv\,{}^t v$$

と定義する. E は単位行列, ${}^t v$ は v の転置ベクトルを表す. ただし, v は零ベクトルではないとする. 以下の問に答えよ.

(1) A_s が直交行列となる s をすべて求めよ.

(2) 必要があれば, A_s が対称行列であることを用いて, A_s の固有値をすべて求めよ.

(3) 実数を成分とする 3 次元列ベクトル x_0 に対して

$$x_{i+1} = A_s x_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

と定める. このとき, すべてのベクトル x_0 に対して, x_i が収束するための s の範囲を求めよ. また, その時の極限 x_∞ を x_0 と v を用いて表せ. ただし, x_i が x_∞ に収束するとは, x_i の各成分が x_∞ の各成分に収束することである.

(大阪大 2004) (m20043506)

0.49 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)

$$(A^8 + 3A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

を満足する点 (x, y, z) の集合はどのような図形となるか．図形の方程式を導出せよ．ただし，I は 3 次の単位行列である．

（大阪大 2004） (m20043507)

0.50 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) λ を実数とするとき, 行列式 $|\lambda A - B|$ を極大ないし極小とする λ の値をすべて求めよ.

(2) 方程式 $\lambda A\vec{x} = B\vec{x}$ が $\vec{x} = \vec{o}$ 以外のベクトルを解に持つときの λ の値と対応する解 $\vec{x}$ をすべて求めよ. ただし, $\vec{o}$ は零ベクトルである.

(大阪大 2005) (m20053501)

0.51 xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$

で表される．ただし, $a > 0$ とする．

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概略図を示せ. (2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ.

(大阪大 2005) (m20053502)

0.52 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = r^2$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\vec{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{a}})\cdot(\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{a}})=r^2$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\vec{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q, $\overrightarrow{OQ}=t\vec{\boldsymbol{b}}$ とする. $\vec{\boldsymbol{a}}$, $t\vec{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053503)

0.53 ある変数 x (ただし $x \geqq 0$) の確率密度関数が $p(x)=\dfrac{\pi}{2}x\cdot e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$ で表されるとき, 以下の問に答えよ.

(1) 1 以下の x が出現する確率を求めよ.

(2) 確率密度が最も大きくなる x の値はいくらか？　また, $y=p(x)$ のグラフを図示せよ.

(3) 実験によりこの変数 x を発生させ, 十分な数の測定を行った. データを整理するにあたり, 測定された x を大きいものから順に並べて上位 1/3 だけを用い, x の小さい値はカットした. このとき, データ整理に用いた上位 1/3 の x がとり得る範囲の下限はいくらか？

(大阪大 2005)　　(m20053504)

0.54 以下の設問に答えよ, ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする.

(1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式 :

$$y''+2y'+y=0$$

の一般解を求めよ.

(2) 関数 $z(x)$ $(x>0)$ に関する微分方程式

$$x^2z''+3xz'+z=0 \qquad (*)$$

を考える. $x=e^t$, すなわち $t=\log x$ と変数変換したとき $z(e^t)=w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(4) $(*)$ の解で更に条件 :

$$z(1)=0\,, \quad \int_1^e z(x)dx=1$$

を満たすものを求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053505)

0.55 行列 $A=\begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし a, b は実数である.

(1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. また, 2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, A^n を求めよ. ただし n は正の整数である.

(4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル x に対して

$${}^t xAx>0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ. ここで ${}^t x$ は x の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005)　　(m20053506)

0.56 n 枚のコインを 1 列に並べる．各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1)=2$ であり, $n=2$ のときは (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) の 4 通りの置き方があるので $f(2)=4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1)=2$ であり, $n=2$ のときは $(H,H),(H,T),(T,H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2)=3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005)　　(m20053507)

0.57 α および β を実数とするとき, 常微分方程式

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)=0 \qquad (*)$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(*)$ 式の一般解を求めよ.

(2) $\phi(x)$ をある実数 x_0 に対して $\phi(x_0)=\phi'(x_0)=0$ を満たす $(*)$ 式の解とする. このとき, $\phi(x)=0$ であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, ある実数 x_0, C_1, C_2 に対して $\phi(x_0)=C_1$ および $\phi'(x_0)=C_2$ を満たす $(*)$ 式の解は唯一であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053508)

0.58 関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ （$z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$, x と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z=z_0=x_0+iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053509)

0.59 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(P_N(x) - f(x)\right)^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,, \cdots\,,\ a_N\,,\ b_1\,, \cdots\,,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ．

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.60　3つの確率変数 X, Y, Z のとりうる値をそれぞれ $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$ とする．また，$(X, Y) = (x_i, y_j)$ である確率を $\mathrm{pr}(x_i, y_j)$ と記し，$\mathrm{pr}(x_i, y_j) > 0\ (i, j = 1, 2)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{pr}(x_1, y_1)\ \mathrm{pr}(x_2, y_2)}{\mathrm{pr}(x_2, y_1)\ \mathrm{pr}(x_1, y_2)} = 1$　ならば，X と Y は独立であることを示せ．

(2) $(X, Y) = (x_i, y_j)$ を与えたときの $Z = z_k$ の条件付き確率を $\mathrm{pr}(z_k|x_i, y_j)\ (i, j, k = 1, 2)$ と記し，他の条件付き確率についても同様に記す．

確率 $\mathrm{pr}(x_i, y_j)\ (i, j = 1, 2)$ が

$$\mathrm{pr}(x_1, y_1) = 1/2\,,\ \mathrm{pr}(x_1, y_2) = 1/4\,,\ \mathrm{pr}(x_2, y_1) = 1/6$$

で与えられ，条件付き確率 $\mathrm{pr}(z_k|x_i\,,\ y_j)\ (i, j, k = 1, 2)$ が

$$\mathrm{pr}(z_1|x_1\,,\ y_1) = 1/2\,,\quad \mathrm{pr}(z_1|x_1\,,\ y_2) = 1/2$$

$$\mathrm{pr}(z_1|x_2\,,\ y_1) = 1/2\,,\quad \mathrm{pr}(z_1|x_2\,,\ y_2) = 2/5$$

で与えられるとき，「X と Y は独立であるが，Z を与えたとき X と Y は条件付き独立ではない」ことを示せ．ここに，Z を与えたとき X と Y が条件付き独立であるとは，「X, Y, Z のとりうる任意の値 (x, y, z) に対して　$\mathrm{pr}(x, y|z) = \mathrm{pr}(x|z)\ \mathrm{pr}(y|z)$　が成り立つ」ことをいう．

(大阪大 2005)　　(m20053511)

0.61　行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値，単位固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 行列 A の表す 1 次変換によって，直線 $x = 3y = 3z$ が写される直線を示せ．

(3) 行列 A の表す 1 次変換によって自分自身に写される直線の中で，どの 2 組も平行でないものを 3 つ求めよ．

(大阪大 2006)　　(m20063501)

0.62　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ．

(1) 無限級数の第 N 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた第 N 部分和を用いて，S_N が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ．

必要があれば，$(1+a)^N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} {}_N C_j a^j \geq 1 + Na + \frac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，N は自然数，a は正の実数であるとする．

(大阪大 2006)　　(m20063502)

0.63 微分方程式

$$x^2y'' - xy' + y = f(x) \qquad (A)$$

について，以下の問に答えなさい．ただし $x > 0$ とする．

(1) $f(x) = 0$ のとき，$y_1 = x$ は微分方程式 (A) の特殊解であることを示しなさい．

(2) u を $y = uy_1$ を満足する関数，w を $w = u'$ を満足する関数とするとき，微分方程式 (A) を w の x に関する一階の微分方程式に変形しなさい．

(3) $f(x) = 0$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(4) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(大阪大 2006) (m20063503)

0.64 2 つの曲線 $(y-a)^2 = a(a+x)$, $(y-a)^2 = a(a-x)$ がある．ただし，$a > 0$ とする．
次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x - y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(大阪大 2006) (m20063504)

0.65 実軸上で定義された関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$xy'' - (x+1)y' + y = 2x^2e^{2x} \qquad (A)$$

の一般解を求めたい．

(1) (A) に対応する斉次方程式 $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ は $y = e^{px}$ (p は定数) の形の解をもつ．この解を求めよ．

(2) $y = e^{px}u$ (p は (1) で得られた値，u は x の関数) とおいて (A) に代入し，u が満たすべき微分方程式を求めよ．

(3) (2) で得られた微分方程式を解くことにより，(A) の一般解を求めよ．

(大阪大 2006) (m20063505)

0.66 点 $A(1,0)$ を点 $A'(a,0)$ に，点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1-a)$ に移す 1 次変換を f とする．ただし，a, b は実数とする．また，f を表す行列を F とする．

(1) 行列 F を a, b を用いて表せ．

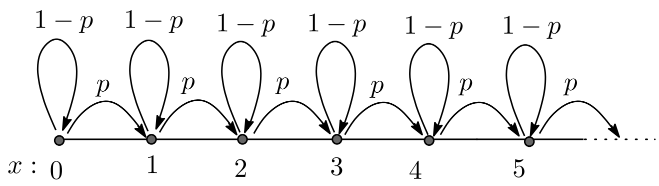
(2) 行列 F が対角化できるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．また，対角化できる場合は対角化せよ．

(3) 1 次変換 f の n 回の積を f^n とする．点 (x_0, y_0) が 1 次変換 f^n によって移される点 (x_n, y_n) を a, b, x_0, y_0 を用いて表せ．

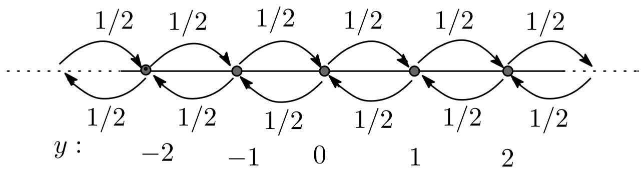
(大阪大 2006) (m20063506)

0.67 確率的な駒の移動について，以下の設問に答えよ．(必ず導出の過程を示すこと．)

(1) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 t における駒の位置を x とするとき，確率 p で 1 つ右 $x+1$ に移動し，確率 $1-p$ でその場に留まるものとし，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ の駒の位置を確率変数 X_t で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ および各 $x=0,1,2,\cdots$ に対し $P(X_t=x)$ を表す式を求めよ．



(2) 時刻 0 での駒の位置を 0 とする．時刻 t における駒の位置を y とするとき，確率 1/2 で 1 つ右 $y+1$ に移動し，確率 1/2 で 1 つ左 $y-1$ に移動するものとして，次の時刻 $t+1$ の駒の位置を定める．各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ の駒の位置を確率変数 Y_t で表し，各試行は互いに独立する．このとき各時刻 $t=0,1,2,\cdots$ および各 $y=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ に対し $P(Y_t=y)$ を表す式を求めよ．



(大阪大 2006)　　(m20063507)

0.68 次の 2 階線形常微分方程式を考える：

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0. \qquad (*)$$

ここで，$a(t), b(t)$ は実軸上で定義された有界な連続関数とする．このとき次の問に答えなさい．

(1) x_1, x_2 を $(*)$ の解とし，これらに対して関数 J を

$$J(t) := \det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1{}'(t) & x_2{}'(t) \end{bmatrix}$$

と定める．このとき J は次の 1 階常微分方程式を満足することを示しなさい:

$$J'(t) = -a(t)J(t).$$

(2) 上記 (1) と同様に，x_1, x_2 を $(*)$ の解として，さらに

$$J(0) = \det\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1{}'(0) & x_2{}'(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

と仮定する．このとき，任意の t において，2 つのベクトル $(x_1(t), x_1{}'(t))$, $(x_2(t), x_2{}'(t))$ は 1 次独立となることを示しなさい．

(3) x_1, x_2, x_3 を $(*)$ の 3 つの解とする．このとき，任意の t で

$$\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ x_1{}'(t) & x_2{}'(t) & x_3{}'(t) \\ x_1{}''(t) & x_2{}''(t) & x_3{}''(t) \end{bmatrix} = 0$$

であることを示しなさい．また，ある 3 つの実数の組 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ があって，任意の t で

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063508)

0.69 複素平面上の点 a を内部に含む領域で正則な関数 $f(z), g(z)$ が与えられ，$f(a) \neq 0$ とする．

(1) a が $g(z)$ の 1 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値とそれぞれの導関数の a における値を用いて表しなさい．

(2) a が $g(z)$ の 2 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値と，それぞれの 3 階までの導関数の a における値を用いて表しなさい．

(3) n を自然数とするとき，$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} dz$ の値を求めなさい。

(大阪大 2006)　　(m20063509)

0.70 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \; dt, \quad k = 1, 2, \cdots .$

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を示しなさい．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$ であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt \right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.71 X と Y は独立な確率変数で共に次の指数分布に従うものとする．すなわち，分布密度関数が
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ であるものとする．ただし，$\lambda > 0$.

(1) $X < Y$ となる確率 $P(X < Y)$ を求めなさい．

(2) $\min\{X, Y\}$ の分布密度関数を求めなさい．ただし，$\min\{x, y\}$ は x と y のうち，大きくない方を表す．

(3) $a < b < 0$ のとき，確率 $P(a < X - Y < b)$ を求めなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063511)

0.72 (1) xy 平面上において曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ により囲まれる領域の面積を求めよ．

(2) x, y が $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき，$x + y$ の最大値，最小値を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073501)

0.73 微分方程式 $y' = -2y + y^2$ について以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式を解け．

(2) $y(1) = 3$ を満たす特殊解を求め，そのグラフの概形を描け．軸との交点や漸近線を明示すること．

(大阪大 2007)　　(m20073502)

0.74　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 適当な変換行列（対角化するための正則行列）P を求め, 行列 A を対角化せよ.

(3) 行列 A の n 乗を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073503)

0.75　正六角形 $ABCDEF$ において, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$ とし, 辺 CD の中点を点 P, 辺 DE の中点を点 Q とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ.

(2) 線分 CQ と線分 FP の交点を R とするとき, $\overrightarrow{AR}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ.

(3) 線分 AR と対角線 CF の交点を点 S とするとき, $CS\ :\ SF$ を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073504)

0.76　次の無限級数の第 N 項までの部分和 $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}u_n$ を求めよ. また, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=S$ として無限級数の和 S を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)r^n=3r+4r^2+5r^3+6r^4+\cdots+(n+2)r^n+\cdots$

ただし, $|\,r\,|<1$ とする. 必要ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ なる関係を用いてもよい.

(大阪大 2007)　　(m20073505)

0.77　(1) 空間上の直交座標 (x,y,z) を極座標 (r,θ,φ) :

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta\quad(r>0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi)$

に変換するとき, そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分　$\displaystyle I(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$

について, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分　$\displaystyle J(\alpha,\ \beta)=\iiint_B\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\,|\,\log(x^2+y^2+z^2)\,|^{\beta}}dx\,dy\,dz$

が収束するような α, β の満たすべき条件を求めなさい.

ただし, $B=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2<\dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.78　行列 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a^2 & 1 & a\end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ. ただし, a は実数とする.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が 1 次独立となるときの a の条件を求めよ.

(3) A の固有値の一つが 0 であるとき, a の値を求めよ.
また, その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) A の固有値の一つが 1 であるとき, A^n を求めよ. ただし, $a < 0$ とする.

(大阪大 2007) (m20073507)

0.79 あるパーティで, n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り, 主催者がこれを集めて, 帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする. このとき, 自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1, n)$ とする. 参加者に 1 番から n 番までの番号をつける. i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする.

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ.

(2) $i_1, i_2, \cdots, i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする. 事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ.

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く. 2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1 \cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1 \cup A_2)$ と書く.
このとき $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ である. 一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} S_l \qquad \text{(i)}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \qquad \text{(ii)}$$

である. ただし, 式 (ii) の右辺の $\sum$ は, N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する. 特に $l = 1$ のときは $S_1 = \sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である. 式 (i) を数学的帰納法で示せ.

(4) $Q(1, n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$ を示せ.

(5) $\lim_{n \to \infty} Q(1, n)$ を求めよ.

(大阪大 2007) (m20073508)

0.80 微分方程式

$$x''(t) + ax(t) = \sin t \qquad (*)$$

に関する次の問いに答えよ. ただし, 定数 a は実数である.

(1) 微分方程式 $x''(t) + ax(t) = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ.

(3) $a > 0$ とする. $(*)$ の解 $x(t)$ で条件 $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$ をみたすものをすべて求めよ. ただし, α, β は実数である.

(大阪大 2007) (m20073509)

0.81 次の積分の値を留数定理を用いて求めよ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2} dx$

(大阪大 2007) (m20073510)

0.82 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とフーリエ級数に展開したとき，a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ．

(大阪大 2007) (m20073511)

0.83 X, Y を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち，$W = X + Y$，$Z = |W|$ である．$N(0,1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ．

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007) (m20073512)

0.84 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する． $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n - 1 - k < 0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ． $I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n - 1 - k < 0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して， $\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n - 1 - k \geq 0$ のとき，$I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L \to \infty} \int_0^{L} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008) (m20083501)

0.85 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ．

(2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n \boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008) (m20083502)

0.86 10 枚の赤いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．また，それらとは別の 10 枚の青いカードにそれぞれ 0 から 9 までの異なる数字（整数）が書かれているとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 赤いカードと青いカードを 1 枚ずつ引き，赤いカードの数字 a が 10 の位を，青いカードの数字 b が 1 の位を表すものとし，2 枚のカードで表される数を N とする．例えば，$a=5,\ b=3$ なら $N=53$ を表すものとする．ただし，$a=0$ なら N は 1 桁の整数を表すものとする．例えば，$a=0,\ b=6$ なら $N=6$ を表し，$a=0,\ b=0$ なら $N=0$ を表すものとする．このように，a,b の組で $0 \leq N \leq 99$ の数字を表すものとする．このとき，$N=(a+b)^2$ となるような a,b の組 (a,b) をすべて求めよ．

(2) いま，コインを k 枚所持しているものとする．赤いカードと青いカードから 1 枚ずつカードを引いて，もし赤いカードの数字 a が青いカードの数字 b より大きければコインが 1 枚増え，a が b より小さければコインが 1 枚減るものとする．a と b の値が等しい場合，コインの枚数は増減しないものとする．引いた赤いカードと青いカードは毎回元に戻すものとする．この操作をコインの枚数が 10 枚になるか 0 枚になるまで繰り返すゲームを考える．コインが 10 枚になればゲームを勝利したものとし，0 枚になればゲームに敗北したものと考える．コインを k 枚所持している時にゲームに勝利する確率を P_k $(0 \leq k \leq 10)$ とする．

(2-1) $P_{k-1},\ P_k,\ P_{k+1}$ $(1 \leq k \leq 9)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2-2) P_k を k の関数で表せ $(1 \leq k \leq 10)$．

(2-3) このゲームでは，最初コインを k 枚 $(1 \leq k \leq 9)$ 所持して勝利した場合に $(10-k)^2$ の得点が得られるとする．このとき，コインを何枚所持している状態からゲームを始めると，ゲームを終了した際の得点の期待値が最も大きくなるか，そのときの k の値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083503)

0.87 連立微分方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &=& y+a(x^3+xy^2) \\ \dfrac{dy}{dt} &=& -x+a(x^2y+y^3) \end{cases}$$
の解で，初期時刻 $t=0$ において $(0,0)$ でないものを考える．ただし a は定数とする．このような $(x(t),\ y(t))$ について以下が成り立つことを示せ．

(1) $a=0$ のとき，t の周期関数である．

(2) $a>0$ のとき，$t>0$ では有限時刻を越えて延長できない．

(3) $a<0$ のとき，すべての $t>0$ に対して存在し，$t \to \infty$ で $(0,0)$ に収束する．

(大阪大 2008)　　(m20083504)

0.88 次の値を留数定理を用いて計算し，四捨五入で小数点以下第 1 位まで求めよ．ただし，$e=2.718\cdots$ である．
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}d\theta$$

(大阪大 2008)　　(m20083505)

0.89 $|a|<1$ とする．以下の式を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a^n \cos nx + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = 2a\cos x \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$

ただし $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$ を用いよ．

(2) $\displaystyle 1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$

(3) $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}\,dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2}$

(大阪大 2008)　　(m20083506)

0.90 X, Y を確率変数，a, b を実数とし，各 a に対して期待値 $E[\{Y-(aX+b)\}^2]$ を最小にする b の値を $B(a)$，そのときの最小値を $\varphi(a)$ とする．ただし，X の分散 $V(X)$ は正であるとする．

(1) $B(a)$ を a，$E[X]$，$E[Y]$ を用いて表せ．

(2) $\varphi(a)$ を最小にする a の値 $\widehat{a}$，その時の最小値 $\varphi(\widehat{a})$，および $B(\widehat{a})$ を求めよ．

(3) $\widehat{Y} = \widehat{a}X + B(\widehat{a})$ とおくとき，Y の分散は $V(Y) = V(\widehat{Y}) + E[(Y-\widehat{Y})^2]$ となることを示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083507)

0.91 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a，b および c は実数であり，また，$b \neq 0$ である．

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ．

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(3) 行列 A は対称行列であるので，適当な直交行列 U によって対角化される．この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x \quad y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である．

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの λ_1 および λ_2 を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083508)

0.92 関数 $f(x) = e^{-x}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x は実数，e は自然対数の底とする．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．ただし，n は 0 または正の偶数とする．

(大阪大 2008)　　(m20083509)

0.93 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083510)

0.94 原点を $(0,0)$ として，$\overrightarrow{a} = (1,1)$，$\overrightarrow{b} = (-2,0)$，$\overrightarrow{c} = t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b}$ とする．ただし，t は実数である．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る角 θ を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{c}|$ が最小となるような t の値とその最小値を求めよ．また，そのとき $\overrightarrow{c}$ と $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ は互いに直交することを示せ.

(大阪大 2008)　　(m20083511)

0.95 (1) A および B を n 次実対称行列とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \cdots,\ \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である解をもつとする．$\lambda_i\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする．$\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}_i A\boldsymbol{x}_j = 0$ となることを示せ。 ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，上の方程式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるような解をもつ $\lambda_1,\ \lambda_2$ と，それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093501)

0.96 a, b, c, d, e, f, g, h はすべて実数で $d \neq 0$ とする．このとき，複素数 z についての方程式

$$\frac{a^2}{z-e} + \frac{b^2}{z-f} + \frac{c^2}{z-g} = d^2 z + h \qquad (*)$$

を考える．次の問いに答えよ.

(1) z を一つの複素数解とするとき，その共役複素数 $\overline{z}$ がみたす方程式を求めよ.

(2) 上の方程式 $(*)$ の解はすべて実数であることを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093502)

0.97 曲線 C 上の点を $P(x, y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093503)

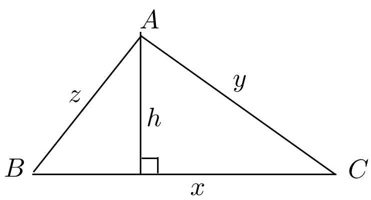
0.98 a を正定数とする． 3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える.

$BC = x$, $CA = y$, $AB = z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ.

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ.

(2) 体積 V を $x,\ y$ の関数として表せ．同時に，変数 $x,\ y$ の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい.

(3) $x,\ y$ が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの $x,\ y$ の値およびそのときの V の値を求めよ.



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.99 常微分方程式

$$4y''(x) + y(x)(4e^{2x} - 1) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

を考える.

(1) $t = e^x$ と変換することによって $z(t) = y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け.

(2) $z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}$ ($\rho \in \mathbb{R},\ c_0 \neq 0$) とおく．この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k ($k = 1, 2, \cdots$) の間に成立する関係式を導け．また，$\rho = \pm 1/2$ を導け.

(3) $c_1 = 0$ とする．(2) で得られた関係式から c_k を定め，基本解 $z_1(t),\ z_2(t)$ を求めよ.

(4) $(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x),\ y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2 + y_2(x)^2) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093505)

0.100 自然数 n に対して

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+{x_k}^2\right)}\,dx_1\cdots dx_n \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく.

(1) 留数定理を用いて $I_1(t)$ を求めよ.

(2) $I_n(t)$ を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093506)

0.101 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.102 正の値をとる確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}x^{-1}\exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとし，$Y = \log X$ とする.

(1) $n=1,2,\cdots$ に対して，Y^n の期待値を $g_n=E[Y^n]$ とする．このとき，

$$g_{n+2}=\mu g_{n+1}+(n+1)\sigma^2 g_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=1,2,\cdots$ のとき，$E[(Y-\mu)^n]$ を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093508)

0.103 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a,b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A)=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される．行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103501)

0.104 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ.

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ ($|r|<1$) を用いてもよい.

(1) $\displaystyle a_n=\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$　　(2) $\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010)　　(m20103502)

0.105 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+4y=0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+4y=\cos\omega t$ の特殊解を $y=P\cos\omega t+Q\sin\omega t$ と表すとき, 係数 P と Q 求めよ．ただし, ω は実数で $\omega>0$ である.

(大阪大 2010)　　(m20103503)

0.106 次の問いに答えよ. ただし, z, ω は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1) $|5z-i|=|3z-7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2) z に対し,

$$w=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z-1}{2z+2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2010)　　(m20103504)

0.107 $x = x(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2 + t^{-2}\ . \quad t > 0$$

を考える.

(1) $v(t) = \{x(t) - t^{-1}\}^{-1}$ とおき $v(t)$ に関する微分方程式を作れ. ただし, $\dfrac{dv}{dt}$ を t と v で表せ.

(2) (1) で求めた微分方程式は非斉次微分方程式であるが, その定数項を無視した斉次微分方程式の解 $\bar{v}(t)$ を求めよ.

(3) $C(t)\bar{v}(t)$ が (1) で導いた微分方程式を満たすように $C(t)$ を定めよ.

(4) $x(t)$ を求めよ.

(5) $x(1) = 1$ となる解を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103505)

0.108 2 次元平面上の点 $A(1,0)$ を点 $A'(a, 1-b)$ に, 点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a, b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P , 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0,0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0,0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 2010)　　(m20103506)

0.109 部品 A および部品 B 一つずつで構成される製品を製造する工場がある. 部品 A は確率 p $(0 < p < 1)$ で不良品であり, 部品 B は確率 q $(0 < q < 1)$ で不良品である. 部品 A および部品 B が不良品であるかどうかは独立である. また, 不良品は工場から出荷できないものとする. 工場で n 個の製品を製造したとする. 以下の設問に答えよ. なお, 必ず導出の過程を示すこと.

(1) n 個すべての製品を出荷できる確率を求めよ.

(2) n 個のうち m 個の製品を出荷できる確率 $P(m)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} P(m)$ を求めよ.

(4) 出荷できる製品の個数の期待値 E を求めよ.

(5) $n = 1000$, $p = 0.01$, $q = 0.02$ として, 確率 $P(m)$ を最大化する m を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103507)

0.110 実数値関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ は次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \quad -2xy \\ \dfrac{dy}{dt} &= \quad x^2 - y^2 \end{cases}$$

に解で, $t = 0$ において $(x(0),\ y(0)) = (a,\ b)$ である. ただし, $a \neq 0$ とする.

(1) 解 $(x(t),\ y(t))$ に対してある定数 C があり, つねに $x^2 + y^2 = Cx$ が成り立つことを示せ.

(2) t が実数全体を動くとき $|x(t)|$ の最大値があることを示し, それを $a,\ b$ で表せ.

(大阪大 2010)　　(m20103508)

0.111 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0, 1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0, 1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.112 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.

すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\, ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.113 実数を成分に持つ, 対称かつ正定値な n 次正方行列を B とする. その (i,j) 成分を B_{ij} と書くことにする. n 次元実ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ と表し, その内積を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ と定める（ ^{t} は転置を表す）. 行列 B の行列式を $\det B$, 逆行列を B^{-1} と表すことにする.

(1) 任意の実数 s と $b > 0$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} e^{-\frac{t^2}{2b}}\, dt = e^{\frac{bs^2}{2}}$$

(2) 任意の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ \ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = e^{\frac{1}{2}(B\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$$

(3) $1 \leqq\ j,k \leqq\ n$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ \ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = B_{jk}$$

(4) n 次正方行列 A に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\ \ dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n = \mathrm{Tr}(AB)$$

ここで, $\mathrm{Tr}(AB)$ は行列 AB の対角成分の和を表す.

(大阪大 2010)　　(m20103511)

0.114 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す.

$$a_1 = 2\ ,\quad a_2 = 6\ ,\quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ.

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.115 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - 3y(t) + F(t) \\[2ex] \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2x(t) \end{cases}$$

(1) $F(t) = 0$ の場合，一般解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ.

(2) $F(t) = e^{2t}$ の場合，$y(t)$ の特殊解を $y_1(t) = Ae^{2t}$ と表す．このとき，定数 A を求めよ.

(3) $F(t) = e^{2t}$ の場合，一般解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ.

(4) $F(t) = e^{2t}$ の場合，初期条件 $x(0) = 2,\ y(0) = 0$ の下で解 $x(t),\ y(t)$ を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113502)

0.116 複素数 z に関する方程式

$$z^4+(1-a^2)|z|^4-a^2\overline{z}^4=0 \quad (*)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$|z|$ は z の絶対値，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．また，a は ±1 以外の実数とする．

(1) 恒等式 $|z|^2=z\overline{z}$ が成り立つことを示せ.

(2) 方程式 $(*)$ の解を $z=x+iy$（ i は虚数単位，x,y は実数 ）と表すとき，x と y が満たす関係式を求めよ．

(3) 方程式 $(*)$ の $z=0$ 以外の解のうち，任意の 2 つの解を z_1，z_2 とするとき，$\arg(z_2)-\arg(z_1)$ が取りうる値を $-\pi\leq\arg(z_2)-\arg(z_1)<\pi$ の範囲ですべて求めよ．ただし，$\arg(z_1)$, $\arg(z_2)$ はそれぞれ z_1，z_2 の偏角を表す.

(4) $\dfrac{z_2}{z_1}$ は実数または純虚数となることを示せ.

(大阪大 2011)　　(m20113503)

0.117 行列 A は 3 行 2 列の行列であり，その列ベクトルは $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ である．$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は線形独立であり，これらが張る部分空間を V とする．また，ベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ はいずれも 3 次元ベクトルであるが，$\boldsymbol{b}$ は大きさと向きが一定で V に含まれていないベクトル，$\boldsymbol{p}$ は V に含まれる任意のベクトル，$\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{p}$ の差を表すベクトル ($\boldsymbol{q}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$) である．行列とベクトルの成分はすべて実数であるとして，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{p}$ は A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いて $\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{x}$ と表せることを示せ.

(2) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるとき，${}^tA\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ という関係が成り立つことを示せ．なお，${}^tA$ は A の転置，また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

(3) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるときの問い (1) の $\boldsymbol{x}$，およびこのときの $\boldsymbol{p}$ をそれぞれ A と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(大阪大 2011)　　(m20113504)

0.118 曲線 $y=f(x)$，x 軸，直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x},\overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a,b]$ で $f(x)\geq0$ とする．

(1) 上記の領域を D とするとき，$\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}$$

で定義される.

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

となることを証明せよ.

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ.

(3) $f(x)=\exp(-x/3)$ で区間が $[0,1]$ となるときの重心 $(\overline{x},\overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする.

(大阪大 2011)　　(m20113505)

0.119 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合，a の値を求めよ．

(2) $a = -1$ の場合について，A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ．

(3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ を，$\boldsymbol{x}$ の A による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする．
$a = -1$ の場合について，$\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．また，そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ．

(大阪大 2011)　　(m20113506)

0.120 n を自然数，k を n 以下の自然数とする，n 人の学生が k 個のグループに分かれ，各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す．ただし，各グループは 1 名以上の学生を含むものとする．

(1) $S(4,2) = 11$ であることを，すべての並び方を列挙することで示せ．ただし，学生を A, B, C, D で表し，A で 1 つのグループ，B, C, D でもう 1 つのグループを構成し，B, C, D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A], [B, C, D]\}$ と表すものとする．
なお，$\{[A], [B, C, D]\}$ と $\{[B, C, D], [A]\}$ や $\{[C, D, B], [A]\}$ は同じ並び方を表すが，解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい．

(2) $S(n,k) = (n-1)S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ．ただし，$S(0,0) = 1$，各 $i (i \geq 1)$ に対して $S(i,0) = 0$ とし，任意の $i, j\ (i < j)$ に対して $S(i,j) = 0$ とする．

(3) H_n を
$$H_n = \frac{S(n+1,2)}{n!}$$
とする．H_n を，n を用いて表せ．

(4) 設問 (3) の H_n が，任意の自然数 $n (n \geq 1)$ に対して，
$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$
を満たすことを示せ．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は，x 以下の最大の整数を表すものとする¿

(大阪大 2011)　　(m20113507)

0.121 $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, $q_3 = q_3(t)$ についての連立微分方程式
$$\begin{aligned} {q_1}'' &= q_2 + q_3 - 2q_1 \\ {q_2}'' &= q_3 + q_1 - 2q_2 \\ {q_3}'' &= q_1 + q_2 - 2q_3 \end{aligned}$$
を初期値
$$\begin{aligned} q_1(0) &= f, \qquad {q_1}'(0) = 0 \\ q_2(0) &= f, \qquad {q_2}'(0) = 0 \\ q_3(0) &= f, \qquad {q_3}'(0) = 0 \end{aligned}$$
のもとで解け，ただし，f は定数である．

(大阪大 2011)　　(m20113508)

0.122 次の複素積分を考える．
$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-a)(z-b)^2}\, dz$$
ただし，積分路 C は単位円 $\{|z| = 1\}$（反時計まわり）を表し，複素数 a, b は C 上にないものとする．
以下の場合について I の値を求めよ．

(1) $a \neq b$ のとき.

(2) $a = b$ のとき.

(大阪大 2011)　　(m20113509)

0.123 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin mx\,dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\ .\quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p_n(mx)dx = a_0\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m\to-\infty}\int_0^{2\pi} g(x)p(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)dx\cdot\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.124 確率変数 X は 0 または 1 の値をとり $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p\ (0 < p < 1)$ であるとする．また，$X = x\ (x = 0, 1)$ が与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布がそれぞれ以下の二項分布であるとする（m は正の整数，$0 < q_0 < q_1 < 1$）.

$$P(Y = y\,|\,X = 0) = {}_mC_y {q_0}^n(1 - q_0)^{m-y}\quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

$$P(Y = y\,|\,X = 1) = {}_mC_y {q_1}^n(1 - q_1)^{m-y}\quad (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

ここで ${}_mC_y = \dfrac{m!}{y!(m-y)!}$ は二項係数である.

(1) $Y = y\ (y = 0, 1, 2, \cdots, m)$ が与えられたとき，$X = 1$ となる条件付き確率 $P(X = 1\,|\,Y = y)$ を求めよ.

(2) $P(X = 1\,|\,Y = y) > p$ となるような y の範囲は p によらないことを示せ.

(3) $m = 10,\ q_0 = \dfrac{1}{2},\ q_1 = \dfrac{3}{4}$ のとき，$P(X = 1\,|\,Y = y) > p$ となるような y の値をすべて求めよ．ただし，$\dfrac{\log 2}{\log 3} = 0.631$ とする.

(大阪大 2011)　　(m20113511)

0.125 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が，行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$,　$A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される．ここで n は自然数とする．以下の問いに答えよ.

(1) PAP^{-1} を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123501)

0.126 次の微分方程式に関する以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=0$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=x^2+3x+1$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=x^2+3x+1$ の解 $y=y(x)$ を
初期条件「$x=0$ の時に，$y=10$ かつ $\dfrac{dy}{dx}=-6$」のもとで求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123502)

0.127 以下の問に答えよ．ただし，u,v,w は複素数である．

(1) 方程式 $|u+2|=2|u-1|$ を満たす u が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(2) 方程式 $|u|=2$ を満たす複素数 u を

$$v=u+\frac{1}{4u}$$

により変数変換する．このとき，複素数 v が描く図形を複素平面上に図示せよ．

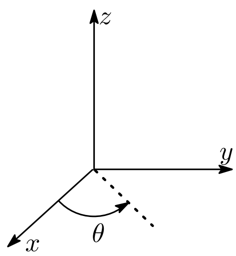
(3) 方程式 $|u+2|=2|u-1|$ を満たす複素数 u を

$$w=i\left(\frac{4u^2-16u+17}{4u-8}\right)$$

により変数変換する．ただし，i は虚数単位とする．このとき，複素数 w が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(大阪大 2012)　　(m20123503)

0.128 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0\leq\theta\leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す xy平面に平行な移動　$x'=x+az$，$y'=y+bz$，$z'=z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ.

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ.

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ.

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.129 以下の設問に答えよ.

(1) 次式を証明せよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3} = 0 \qquad (a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0 \qquad (b)$$

(2) 次式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 0$$

(3) 問 (1)，問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} = 0$$

(大阪大 2012)　　(m20123505)

0.130 以下の設問に答えよ.

(1) 実数を要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ．また，そのとき，異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ.

(2) 2 次曲線 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$ の概形を描け.

(3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき，関数 $f(x, y) = 2x^2 + dxy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．ただし，d は実数の定数とする.

(大阪大 2012)　　(m20123506)

0.131 正八面体のサイコロがある．各面には 0 から 7 までの整数のうち 1 つが書かれており，各面の数字は互いに異なる．また，このサイコロを振った時に，各面は等確率で出るものとする．このサイコロを n 回振り，出た目を順に小数点以下に並べた数を x_n とする．ただし，x_n の整数部分は 0 とする．例えば，$n = 4$ で，出た目が順に $5, 0, 7, 3$ であるなら，$x_4 = 0.5073$ となる．n が 2 以上の偶数であるとき，$x_n < \dfrac{8}{33}$ となる確率を p_n とする．以下の設問に答えよ.

(1) p_2 を求めよ.

(2) n が 4 以上の偶数であるとき，p_n を p_{n-2} と n を用いて表せ.

(3) p_n を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123507)

0.132 (1) 常微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + ax\frac{df(x)}{dx} + bf(x) = 0\ , \quad (x > 0)$$

を考える．$t = \log x$ と変数変換したとき $g(t) = f(e^t)$ の常微分方程式を導け．なお a, b は実定数であり，$\log$ は自然対数である.

(2) 常微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+3x\frac{df(x)}{dx}-3f(x)=0\ , \quad (x>0)$$

を解け.

(3) 常微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+3x\frac{df(x)}{dx}-3f(x)=\log x\ , \quad (x>0)$$

を解け.

(大阪大 2012) (m20123508)

0.133 C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z|=4\}$, D は $\{z\,;\,|z|<4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D}=C\cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z\sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

(大阪大 2012) (m20123509)

0.134 (1)

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{\pi}-\cos(x)\right)\ , \quad (0\le x<2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n=0,1,2,\cdots)\,,\ b_n,\ (n=1,2,\cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123510)

0.135 X と Y を平均を 0 とする確率変数とし，その線形結合を $Z=aX+bY$ とおく．ただし，a と b は $a^2+b^2=1$ を満たす定数である．X^2, Y^2, XY の期待値を $E[X^2]=1$, $E[Y^2]=1$, $E[XY]=\rho$ とおく．ただし $\rho>0$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) Z^2 の期待値 $E[Z^2]$ を最大にする (a,b) の組み合わせ (a_1,b_1) と最小にする (a,b) の組み合わせ (a_2,b_2) を求めよ.

(2) 問 (1) で求めた (a_1,b_1) と (a_2,b_2) に対して期待値 $E\left[(a_1X+b_1Y)^2\right]$ と $E\left[(a_1X+b_1Y)(a_2X+b_2Y)\right]$ を求めよ.

(大阪大 2012) (m20123511)

0.136 $\{a_n\}$ は数直線上の点 A_n の座標に対応する数列であり，自然数 n に対して $A_n(a_n)$ は次のように帰納的に定められる．

線分 A_nA_{n+1} を $2:1$ に内分する点を $A_{n+2}(a_{n+2})$ とする．ただし，$a_1=0$，$a_2=1$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 の各項が，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{7}{9}$，$\dfrac{20}{27}$ で与えられることを示せ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} および a_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，$n\to\infty$ のときの a_n の値を示せ．

(大阪大 2013)　　(m20133501)

0.137 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ を $x=e^t$ と変数変換することで，一般解 $y(x)$ を求めよ．ただし，$x>0$ とする．

(2) 微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=6x^4$ の特殊解を $y=Ax^4$ と表すとき，A の値を求めよ．

(3) (2) の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．ただし，$x=1$ のとき，$y=4$ かつ $\dfrac{dy}{dx}=9$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133502)

0.138 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

ただし，a,b,c は実数である．

(2) 行列 A を対角化する直交行列の中で，対称行列となる P を一つ求めよ．

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数を表す．

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と1次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2+\lambda_3w^2$ と表せることを示せ．また，定数 λ_1，λ_2，λ_3 の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133503)

0.139 (1) 2つの複素数 a_1 と a_2 について，各々の和，積がいずれも実数であるとき，a_1 と a_2 が満たすべき条件をすべて示せ．

(2) 複素数 b について，$b+\dfrac{2}{b}$ の値が有限の実数であるとき，b が複素平面上で描く図形を示せ．

(3) 2つの複素数 c_1 と c_2 について，各々の和，積がいずれも純虚数であり，かつ $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right|=k$ であるとき，$\dfrac{c_1}{c_2}$ を k を用いて表せ，ただし $k\neq 0$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133504)

0.140 実数値関数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ は，連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(x^2+y^2)y+kx \\ \dfrac{dy}{dt}=-(x^2+y^2)x+ky \end{cases}$$

の解であり，初期時刻 $t=0$ において

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

を満たしている．ただし，${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$ であるとする．

(1) $X(t) = x^2(t) + y^2(t)$ とする．$X(t)$ の満たす微分方程式を導き，その解を求めよ．

(2) $x(t)$, $y(t)$ を t, k, x_0, y_0 を用いて表せ．

(大阪大 2013)　　(m20133505)

0.141 (1) 以下を示せ．

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2+1} e^{iz} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^2-1} e^{iz} dz = 0$$

ただし，正の実数 R に対し

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta} \,\big|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

であり，積分の向きは反時計回りにとるものとする．

(2) 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ．

(3) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-1} \sin x \, dx$$

の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133506)

0.142 自然数 m, k に対して，

$$A_{m,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m x \, \cos kx \, dx \,, \quad A_{0,0} = 2\pi$$

とおく．

(1) 任意の自然数 m, k に対して，以下の等式を示せ．

$$A_{m,k} = \frac{1}{1+\frac{k}{m}} A_{m-1,k-1}$$

ただし，$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x$ を用いてもよい．

(2) 自然数 m が与えられたとき，$\cos^{2m-1} x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} \cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し，フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ．
ただし，$\cos^{2m-1} x = (\cos x)^{2m-1}$ とする．

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.143 確率変数 X は確率密度関数

$$p(x) = C_k x^{k-1} e^{-x} \,, \quad (x \geq 0)$$

を持つとする．ただし，k は自然数で，C_k は $\displaystyle\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$ で定まる正の数とする．

(1) 正の数 C_k，および $E[e^{-tX}]$, $(t \geq 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一分布に従うとし，その確率密度関数を $p(x)$ とする，このとき，

$$q_n(t) = E[e^{-t(X_1+\cdots+X_n)}]\,, \quad (t \geq 0)$$

を求めよ．

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133508)

0.144 曲線 C が媒介変数表示 $x = f(s),\ y = g(s),\ s \geq 0$ で表される．ただし，$\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$ ，$\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 $b > 0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x = f(s),\ y = g(s),\ 0 \leq s \leq b$ で表される．$C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ．

(2) 点 P は時刻 0 で $x = f(0),\ y = g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する．時刻 $t > 0$ までに移動した経路の長さを t とする．時刻 t における P の位置を $x = f(\varphi(t))$, $y = g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.145 次の 2 次曲線 (a) について以下の設問に答えよ．

$5x^2 + 2xy + 5y^2 + c = 0 \cdots\cdots$ (a)

(1) $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ として，式 (a) を $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + c = 0$ の形で表すときの対称行列 A を示せ．ただし，T は転置を表す．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P とそのときの対角行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ．ただし，正則行列の列ベクトルの大きさは 1 とする．

(4) $\boldsymbol{x}' = (x', y')^T$ として設問 (3) の正則行列 P を用いて $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ で式 (a) を座標変換して得られる $\boldsymbol{x}'^T B\boldsymbol{x}' + c = 0$ の概形を x' 軸，y' 軸と共に描け．ただし，$c = -12$ とする．

(大阪大 2014)　　(m20143502)

0.146 1 から 6 の目が等確率で出るさいころに関する以下の設問に答えよ．

(1) 1 つのさいころを 5 回振るとき，ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

(2) 区別のできない 5 つのさいころを同時に振るとき，ちょうど 3 種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

(3) さいころを振って 3 以上の目が出たら 4 点を，2 以下の目が出たら 1 点を得る．さいころを n 回振った時までに得た点数の合計が偶数である確率を P_n とする（ただし，n は 0 以上の整数とし，$P_0 = 1$ とする）．このとき，以下の (a)〜(c) に答えよ．

(a) $P_1,\ P_3$ を求めよ．

(b) P_{n+1} を P_n で表せ．

(c) P_n を求めよ．

(大阪大 2014)　　(m20143503)

0.147 m を自然数，k を 2 以上の自然数とする．x_0 を正の実数とし，関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-t^m x(t)^k=0 \quad (t>0)\ , \\ x(0)=x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y(t)=x(t)^{1-k}$ とおくとき，$y(t)$ が満たす常微分方程式を導け．

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty t^m e^{-(k-1)t}dt$$

を求めよ．

(3) 初期値問題 $(*)$ の解 $x(t)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to t_0-0}|x(t)|=\infty$ となる正の実数 t_0 が存在するとき解 $x(t)$ は爆発するということにする．解 $x(t)$ が爆発するような正の実数 x_0 の範囲を求めよ．

(大阪大 2014)　　(m20143504)

0.148 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ．

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha|<R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R}\frac{z^2}{z-\alpha}dz$$

を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z)=h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z)=&\,h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z)+h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ &+\cdots+h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ &+\cdots+h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z)=0$ の n 個の複素数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ とし，R は $|\alpha_j|<R\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}dz$$

を b_{n-2}，b_{n-1} を用いて表せ．

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.149 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset\mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

条件 1 ： $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\Big|f_k(x)\Big|<\infty, \qquad x\in I$

条件 2 ： $\displaystyle\max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^m f_k(x)-\sum_{k=1}^n f_k(x)\right|\to 0 \qquad (m,n\to\infty)$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.150 N を自然数とする．ボタンを押下すると 1 から N までの整数の中から一つの数字をランダムに表示する機械がある．ボタンを離すと表示された数字は消える．それぞれの数字は等確率で表示される．ボタンの押下を n 回行い表示された数字を $X_1, \cdots, X_n$ とし，これらは互いに独立な確率変数とする．$T = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ とおき，T を用いて N を推定したい．事象 A の生起確率を $P(A)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $P(T \leq t) = \left\{P(X_1 \leq t)\right\}^n \quad (t = 1, \cdots, N)$ を示せ．

(2) $P(T = t) \quad (t = 1, \cdots, N)$ を求めよ．

(3) 期待値 $E(T)$ が次式で与えられることを示せ．

$$E(T) = N - \sum_{t=1}^{N}\left(\frac{t-1}{N}\right)^n$$

(4) 次式を示せ．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{E(T)}{N} = \frac{n}{n+1}$$

(大阪大 2014)　　(m20143507)

0.151 関数 $f(x, y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 + 2y^2 + 1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面全体において $f(x, y)$ が極大になる点と極大値，極小になる点と極小値を求めよ．

(2) 領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ y \geqq -x$ において $f(x, y)$ が最小になる点と最小値を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153501)

0.152 曲線 $C : y = u(x)$ 上の点 (x, y) における接線が y 切片 $2xy^2$ をもち，かつ，曲線 C が点 $\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，関数 $u(x)$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153502)

0.153 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$，$\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$，$\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A\cdot(B\times\ C) = B\cdot(C\times\ A) = C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 3, 5)$，$\boldsymbol{b} = (3, 1, 4)$，$\boldsymbol{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u \, \cos v \, \boldsymbol{i} + \sin u \, \cos v \, \boldsymbol{j} + \sin v \, \boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r, \ \ 0 \leqq \ u \leqq \ 2\pi, \ \ -\frac{\pi}{2} \leqq \ v \leqq \ \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.154 以下のの問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a > b > 0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C : z = z(t) = a \, \cos t + i \, b \, \sin t \qquad (0 \leqq \ t \leqq \ 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z} dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.155 実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ．そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について　$S(a) = \frac{1}{a} \int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x) dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a \to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153505)

0.156 行列の対角化に関する以下の設問に答えよ．

(1) 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ．ただし，a は実定数である．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ．また，対角化出来る場合は対角化せよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015)　　(m20153506)

0.157 コンピュータがウイルスに感染し，ウイルス対策ソフトがウイルスを駆除する確率について，次のようなモデルを用いて考える．

- 初期状態でコンピュータはどのウイルスにも感染していない．
- コンピュータは毎朝，確率 $p(0 < p < 1)$ で新たなウイルスに感染する．
- コンピュータが感染している場合，ウイルス対策ソフトが毎夕に駆除を試みる．駆除が成功すると，その時点で感染しているすべてのウイルスが駆除される．ただし，駆除は確率 $q(0 \leq q \leq 1)$ で失敗する．

なお，コンピュータがウイルスに感染した場合やウイルスの駆除に成功あるいは失敗した場合でも，以降の感染確率 p と駆除失敗確率 q に一切影響を与えないものとする．

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) コンピュータが $n(n \geq 1)$ 日目の終わりにウイルスに感染している確率を $p(n)$ とする．

(a) $P(1)$ を求めよ．

(b) $P(2)$ を求めよ．

(c) $P(n)$ を求めよ．

(2) n 日目の終わりまでに一度も感染しない確率を求めよ．

(3) 1 日目に感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(4) $i(1 \leq i \leq n)$ 日目に初めて感染し，n 日目の終わりまでに一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(大阪大 2015) (m20153507)

0.158 $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数列ベクトルの集合とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\boldsymbol{x}|$ とし，実数を成分とする 2 次の正方行列 B に対して

$$||B|| = \max_{|\boldsymbol{x}|=1} |B\boldsymbol{x}|$$

と定める．$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$||B||$ の値を求めよ．また，その値を与える $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(大阪大 2016) (m20163501)

0.159 (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A, B は対称行列とし，A は相異なる固有値を持つとする．このとき，$AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ．

(大阪大 2016) (m20163502)

0.160 m を 6 以上の偶数，n を $3 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす自然数とする．正 m 角形の m 個の頂点に， 時計回りに $1, 2, 3, \cdots, m$ と番号をふる．この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る．ただし，頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $m = 8$ のとき，辺上，または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ．

(2) n 角形が，辺上，または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする．$P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} P_{n,m}$ を求めよ．

(大阪大 2016) (m20163503)

0.161 実定数 a, b, c は $b^2 - ac > 0$, $b > 0$ を満たしている．$D = b^2 - ac$ と記す．以下の設問に答えよ．

(1) 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + bx + cy = 0,\ t \geq 0$$
$$\frac{dy}{dt} - ax - by = 0,\ t \geq 0$$

の解 $x = x(t),\ y = y(t)$ で初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ を満たすものを求め $b,\ c,\ D$ と t を用いて表せ.

(2) (1) の解 $y = y(t)$ に対して，$y(t) > 0$ が任意の $t \geq 0$ に対して成立することを示せ.

(3) (1) の解を用いて

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0$$

と置くと

$$\frac{dz}{dt} + az^2 + 2bz + c = 0, \quad z(0) = 0$$

を満たすことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} z(t)$ と $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{dz(t)}{dt}$ の値を求め $b,\ c,\ D$ を用いて表せ.

(大阪大 2016)　　(m20163504)

0.162 (1) 複素変数 z の関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする.

(2) $a > b > 0$ となる実定数 a, b において，積分　$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t}$　の値を求めよ.

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha) = C - \{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z) = 1/(z - \alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ.

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.163 (1) α は整数でない実数とする．$\cos(\alpha x)$ $(-\pi < x < \pi)$ をフーリエ級数展開せよ．すなわち

$$\cos(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

を満たす

$$a_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y \neq 0$ を満たす実数とする．(1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{y + n\pi} + \frac{1}{y - n\pi} \right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.164 2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2}, 0),\ (0, \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, 0),\ (0, -\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ.

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ.
また，$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ.

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.165 曲面 $S : x^2 + y^2 - z^2 + x + y + 2 = 0 \ (z > 0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S と平面 $z = 2$ の交線の長さを求めよ.

(2) 曲面 S と平面 $z = 2$ に囲まれた領域の体積を求めよ.

(3) 点 (x, y, z) が曲面 S 上にあるとき, $x + y - 2z$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163508)

0.166 関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する次の連立微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し, その時の A, ω, θ の値を求めよ. ただし, A, ω, θ は実数であり, $A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. また, θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.167 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ.

(3) A の逆行列を, 問い (1), (2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ.

(4) 問い (3) の結果を用いて, 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ.

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^T P = I$ を用いて, 正の整数 n に対する連立方程式 $A^n \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}_{(n)}$ を P, n および A の固有値を用いて表せ. , $n \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{x}_{(n)}$ の極限を示せ. ただし, P^T は P の転置行列を, I は単位行列を表す.

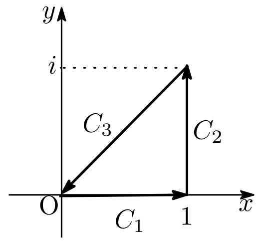
(大阪大 2016)　　(m20163510)

0.168 以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) $\dfrac{(1 - \sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3} - i)^3}$ を $x + iy$ の形で表せ.

(2) 複素関数 $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$ は正則であることを示し,
導関数 $f'(z)$ を求めよ. また, $f'(z)$ も正則であることを示せ.

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1, C_2, C_3 に沿って，問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．
また，積分経路 $C = C_1 + C_2 + C_3$ に沿って $f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.169 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x = 2\cos\theta$,　$y = 2\sin 2\theta$ で表される点 (x, y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．$y = f(x)$ の 1 点 (a, b) における接線の方程式が $y = -2(x - c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x - c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.170 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} - \frac{1}{2x^2} \qquad (x \neq 0) \qquad\qquad (*)$$

(1) $u(x) = xy$ とおくとき，関数 $u(x)$ が満たすべき微分方程式を示せ．

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の解 $y = y(x)$ を，初期条件「$x = 1$ のときに $y = 2$」のもとで求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173502)

0.171 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) すべての固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 関数 $f(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$，関数 $g(x, y, z)$ の x, y, z についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x, y, z)$, $g_y(x, y, z)$, $g_z(x, y, z)$ とする．関数 $f(x, y, z)$ が条件 $g(x, y, z) = 0$ のもとで点 (a, b, c) において極値をとり，$g_x(a, b, c) \neq 0$ または $g_y(a, b, c) \neq 0$ または $g_z(a, b, c) \neq 0$ ならば，次の式を満たす実数 λ が存在する．

$$f_x(a, b, c) - \lambda g_x(a, b, c) = 0$$

$$f_y(a, b, c) - \lambda g_y(a, b, c) = 0$$

$$f_z(a, b, c) - \lambda g_z(a, b, c) = 0$$

条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，次の関数 $f(x, y, z)$ が最小値をとる (x, y, z) を求めよ．

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

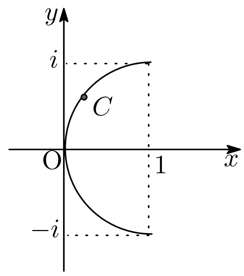
(大阪大 2017)　　(m20173503)

0.172 複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{e^{2\pi z} - 1}{z - i}$

(2) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1| < \sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z = 1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z = 1 - i$ から $z = 1 + i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2z - 3} dz$ を求めよ．



(大阪大 2017) (m20173504)

0.173 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，c は実定数である．

(1) 行列 A の固有多項式 $f(\lambda) = |\,\lambda I - A\,|$ を変数 λ の関数とみなし， その極値を求めよ．ただし，I は単位行列を表すものとする．さらに，$c = 0$ のときの f のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 A のすべての固有値が実数となる，c に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c = 0$ のときの行列 A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018) (m20183501)

0.174 以下の微分方程式の解を求めよ．ただし，y は x の関数，y' および y'' はそれぞれ 1 階および 2 階微分を示している．

(1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ ただし，$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ とする．

(2) $\dfrac{x}{y}y' + \log(xy) + 1 = 0$ ただし，$y(1) = 1$ とする．なお，対数の底は e とする．

(大阪大 2018) (m20183502)

0.175 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする． このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018) (m20183503)

0.176 以下の問題に対して全て有効数字 3 桁で答えよ．

(1) 次の問いに答えよ．

(1-1) 区間 [1, 6] 上の一様分布の平均を求めよ．

(1-2) ある企業の工場 A, B, C が不良液晶ディスプレイを製造する確率はそれぞれ 5%, 4%, 2% である．その企業で生産される全液晶ディスプレイの 40% が工場 A で，40% が工場 B で，20% が工場 C で製造されている．もしその企業の液晶ディスプレイの中から取り出した一台が不良品だったとき，その不良液晶ディスプレイが工場 A で製造されたものである確率を求めよ．

(2) 200 人が受験した試験において無作為に 5 名の受験生を抽出した所，以下の標本を得た．次の問いに答えよ．

	学生 A	学生 B	学生 C	学生 D	学生 E
数学の得点	50	50	50	50	60
電磁気学の得点	90	60	70	75	80

(2-1) 数学の得点の標本平均 $\overline{x}$，標本分散 s_x^2，不偏分散 u_x^2 を求めよ．

(2-2) 数学の得点の母分散が $\sigma_x^2 = 45$ の場合，母平均 μ_x の 95% 信頼区間を求めよ．数値計算に際して，必要ならば標準正規分布表を用いよ．

(2-3) 数学と電磁気学の得点の相関係数 ρ を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183504)

0.177 α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_2^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^\alpha dt + 1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1) $f(1) = A$ を満たす実数 A を求めよ．

(2) $y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^\alpha \qquad ②$$

が成り立つことを示せ．

(3) 初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$ （ただし A は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183505)

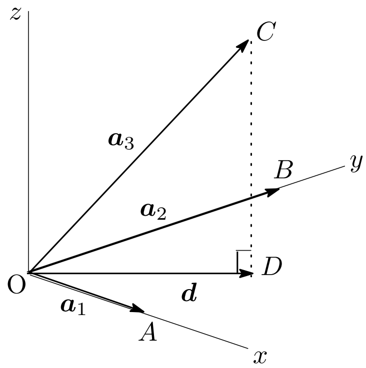
0.178 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2, λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1, λ_2, λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 $O - xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点 A に対し $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}$，$y$ 軸上の点 B に対し $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OB}$，空間内の点 C に対し $\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OC}$ とする．点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．



(大阪大 2018)　　(m20183506)

0.179　1 から N まで異なる番号が振られた N 個の地点があるとする．最初に無作為にスタート地点を選ぶ．その後，無作為に選んだ現在とは異なる地点へと移動を繰り返す．このとき，以下の設問に答えよ．なお，k は N 未満の自然数とする．

(1) 異なる k 個の地点を回った状態から，m 回目の移動ではじめて今までに移動したことのない新たな地点へ移動する確率を求めよ．

(2) 異なる k 個の地点を回った状態から，今までに移動したことのない新たな地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．

(3) N 個すべての地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．ただし，スタート地点の選択も 1 回と数える．

(大阪大 2018)　　(m20183507)

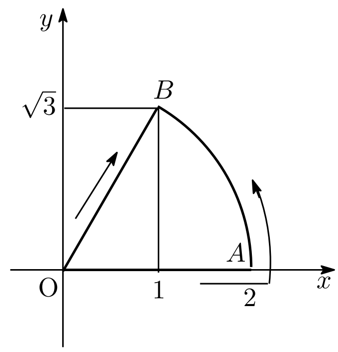
0.180　複素数 $z = x + iy$ に対して，$f(z) = \overline{z}$ で表される関数を考える．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ は複素平面の全域で正則であるか，調べよ．

(2) 右下の複素平面図を参考にして，以下の二種類の経路で，$f(z)$ を原点 O から点 B まで積分せよ．ただし，図中において，AB は原点を中心とする半径 2 の円弧である．

(a) 原点 O から線分 OA，円弧 AB に沿って点 B に至る経路

(b) 原点 O から線分 OB に沿って点 B に至る経路



(大阪大 2019)　　(m20193501)

0.181　以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^3 + y^3)dx + (3xy^2)dy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 8e^{3x}$

(大阪大 2019)　　(m20193502)

0.182　次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ.

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと.

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ.

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること.

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.183 (1) ある病気の検査をすると，この病気の罹患者が陽性（その病気である）と判定される確率は 2/3 である．一方，非罹患者が誤って陽性と判定される確率は 1/3 である．また，母集団に対してこの病気に罹患している割合は 1/10 とする.

(a) この母集団から無作為に選ばれた A さんが，検査により陽性と判定された．このとき，A さんがこの病気に罹患している確率を求めよ.

(b) A さんが同じ検査を何度も受ける．このとき，最低何回連続して陽性と判定されると，A さんの罹患確率が 9/10 以上となるか求めよ．ただし，この検査により陽性と判定されるかどうかは，検査ごとに互いに独立であるとする.

(2) 農作物 A, B の収穫量は，その年の夏の暑さのみに依存して変動する．A の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 20 トン，平年並みの場合は 8 トン，冷夏の場合 0 トンとなる．B の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 0 トン，平年並みの場合は 10 トン，冷夏の場合 38 トンとなる．来年の夏が猛暑，平年並み，冷夏となる確率がそれぞれ 1/2, 1/4, 1/4 と予想されている.

(a) 来年の A と B の単位面積あたりの収穫量の期待値と分散をそれぞれ求めよ.

(b) 暑さに左右されず，安定した収穫量が得られるように A と B の作付面積の比を決定したい．いま，総作付面積のうち，A を作付ける割合を x，B を作付ける割合を $1-x$ とするとき，単位面積あたりの A と B をあわせた収穫量の期待値と分散を求めよ．また，分散が最も小さくなる割合 x を求めよ.

(大阪大 2019)　　(m20193504)

0.184 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ をそれぞれ

$$u(x, y) = f(x - y)\ , \quad v(x, y) = g(x - y)$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ.

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ.

(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1|<a$ であり，すべての x について $g(x)=a^2-1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)$$

を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193505)

0.185 $\boldsymbol{x}={}^t(x,y,z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} x & + & 3y & - & z \\ 2x & + & y & + & 3z \\ 3x & + & 2y & + & 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，^{t} は行列の転置を表すとする．

(1) ある行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 A を求めよ．

(2) k を実数とし，$\boldsymbol{b}={}^t(5,0,k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ が解を持つための，k についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ．

(3) $\boldsymbol{0}={}^t(0,0,0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(4) E を 3 次の単位行列とし，行列 B を $B=A-E$ で定める．行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193506)

0.186 外見や重さなどでは区別できない 2 枚のコイン A, B がある．コインを投げると必ず表か裏がでるものとし，コイン A を投げたときに表が出る確率は a $(0<a<1)$ であり，コイン B を投げたときに表が出る確率は $1-a$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 2 枚のコインを同時に投げたとき，2 枚とも表である確率を求めよ．

(2) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(3) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに 1 回投げてみたところ表が出た．このコインをもう 1 回投げたとき表が出る確率を求めよ．

(4) 無作為に 1 枚のコインを選び，試しに N 回投げてみたところ表が n 回出た．このコインがコイン A である確率を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193507)

0.187 以下 α を与えられた実数とする．1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=2x(t)+e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0)=\alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}=2y(t)$$

の，初期条件 $y(0)=1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2) $y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t)=\dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt}=e^{-3t}\,,\qquad C(0)=\alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.188 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x, y) = ye^x \cos y + (x+1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x, y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.189 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ．すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

をそれぞれ求めよ．

(1-1) $f(x) = \cos^2 x + \cos x$

(1-2) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$， $f(x + 2\pi) = f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を示せ．

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.190 以下 n を与えられた自然数とする．

(1) 変量 z のデータ $z_1, \cdots, z_n$ の平均が 1，分散が 1 であるとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {z_i}^2$ の値を求めよ．

(2) 2 つの変量 x, y のデータ $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ がある．これらのデータの平均はともに 0，分散はともに 1 であり，$\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ に対して $\gamma > 0$ が成り立つとする．

与えられた実数 α, β に対し， $d_i = \dfrac{|\alpha x_i + \beta - y_i|}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (i = 1, \cdots, n)$ とおく．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ を α, β, γ, n で表せ．

(b) α を固定し β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を $m(\alpha)$ とする．$m(\alpha)$ を与える β を求めよ．

(c) α, β を変化させるときの $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2$ の最小値を m とする．m を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193511)

0.191 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ．

(2) A の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(4) A を対角化する行列 P を一つ示し，A を対角化せよ．

(5) A^n を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための a, b の範囲を示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203501)

0.192 (1) 次の微分方程式を解け．ただし，$x = 0$ において $y(0) = 0$ とする．

$$\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) - 2e^x \sqrt{y(x)} = 0$$

(2) ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x(0) = -1$ とする．

$$\frac{x(t)}{dt} + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau)d\tau = t$$

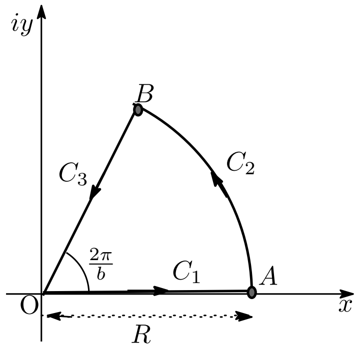
(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.193 積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^b + 1} dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R > 1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b + 1} dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b + 1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} \frac{1}{z^b + 1} dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.194 (1) 次の表に示すデータ x, y について，以下の問いに答えよ．

	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
x	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

(1-1) データ x, y の分散 S_{xx}, S_{yy} および共分散 S_{xy} をそれぞれ求めよ．

(1-2) データ x と y の相関係数を r とするとき．r^2 の値を求めよ．

(1-3) x を説明変数，y を目的変数とするとき，データ x, y の回帰直線の式を求めよ．

(2) テレビの視聴率について，以下の問いに答えよ．
ただし，$0 < \alpha < 1$ である値 α と標準正規分布に従う確率変数 Z について
$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる z_α を考える．このとき，
$z_{0.050} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.960$, $z_{0.010} = 2.326$, $z_{0.005} = 2.576$ とする．

(2-1) 無作為に抽出された 900 世帯について調査したところ，180 世帯がある番組を視聴していた．
この番組の視聴率 p を信頼係数 95% で推定せよ．
ただし，信頼限界は小数第三位まで求めよ．

(2-2) 95% の信頼区間の幅を 0.05 以下にするためには，何世帯以上調査すればよいか答えよ．

(大阪大 2020) (m20203504)

0.195 関数 $w(t)$ は初期条件「$t = 0$ のとき $w = 3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{3}{7} w(x + y) + \frac{1}{17} w(x - 2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy\,, \qquad D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 4\}$$

(大阪大 2020) (m20203505)

0.196 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の 3 つの固有値を，それぞれ λ_1, λ_2, λ_3 とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 B, C に対して， $\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$ が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 μ_1, μ_2, μ_3 を持つとする．
このとき， $\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020) (m20203506)

0.197 N を 6 以上の自然数とする．1, 2, $\cdots$, N から異なる 6 個の数を無作為に選ぶ．選んだ数を大きい順に X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 とする．以下の問に答えよ．

(1) $N=10$ のとき，$X_4=6$ となる確率を求めよ．

(2) $N \geqq 6$ に対して，$X_4=5$ となる確率 $p(N)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた確率 $p(N)$ を最大にする自然数 N を求めよ．また，そのときの $p(N)$ の値を求めよ．

(大阪大 2020)　　(m20203507)

0.198 xyz 座標系における 3 つのベクトルを $\boldsymbol{A}=\bigl(A_x,\ A_y,\ A_z\bigr)$，$\boldsymbol{B}=\bigl(B_x,\ B_y,\ B_z\bigr)$，$\boldsymbol{C}=\bigl(C_x,\ C_y,\ C_z\bigr)$ とする．

(1) $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x, y, z 成分をそれぞれ $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x$, $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y$, $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z$ とする．これらと A_y，および A_z の中から必要なものを用いて，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x 成分 $[A\times(B\times C)]_x$ を表せ．

(2) $[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x$ をベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ および B_x, C_x を用いて表せ．

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2021)　　(m20213501)

0.199 原点を中心とした半径 r $(r\neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\bigl(=\boldsymbol{r}(u,\ v)\bigr)=r\,\boldsymbol{i}_r=r\cos u\cos v\,\boldsymbol{i}_x+r\sin u\cos v\,\boldsymbol{i}_y+r\sin v\,\boldsymbol{i}_z$$
$$(0\leqq u\leqq 2\pi,\ -\pi/2\leqq v\leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u}\times\dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ．

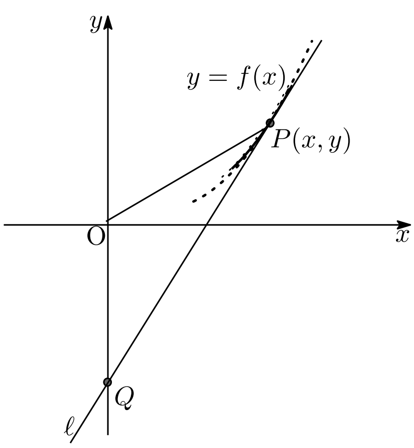
(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R}=\dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.200 xy 平面上の $x>0$ に微分可能な曲線 $y=f(x)$ がある．この曲線上の点 $P(x,y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり，その交点を Q とする．また，右図の O は原点を表す．



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x)>0$ であり，線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして，x と y の関係を微分方程式で表せ．

(2) $u=\dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて，曲線 $y=f(x)$ を求めよ．
ただし，曲線は点 $(2,0)$ を通るものとする．

(大阪大 2021)　　(m20213503)

0.201 複素数 z に関する以下の複素関数 $f(z)$ を考える.

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(3z^2 - 10z + 3)(2z^2 + 5z + 2)}$$

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求めよ.

(2) (1) で求めた孤立特異点のうち, $|z| < 1$ を満たすそれぞれの点における $f(z)$ の留数を求めよ.

(3) $|z| = 1$ のとき, 実数 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を用いて $z = e^{i\theta}$ とおける. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す. このとき, $\cos\theta$ を z を用いて表せ.

(4) 以下の積分を複素積分に置き換えることにより, その値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta + 1}{(5 - 3\cos\theta)(5 + 4\cos\theta)}\, d\theta$$

(大阪大 2021) (m20213504)

0.202 (1) ある感染症に対して一定の精度で陽性か否かを診断する検査法があるものとする. A を検査結果が陽性となる事象, B を被検査者が実際に感染症にかかっている事象とする. また, 確率 $P(B) = 0.1$ とする. B が起こったとき A が起こる条件付き確率を $P(A|B)$ と表す.

(a) $P(A|B) = 0.9$, $P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = 0.9$ であるとき, $P(B|A)$ を求めよ. ただし, $\overline{A}$ と $\overline{B}$ はそれぞれ A と B の余事象を表す.

(b) $P(A|B) = P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = t$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおく. $P(B|A) \geq 0.95$ となる t の範囲を求めよ. ただし, t は小数第三位まで答えるものとする.

(2) 正規分布に従う母集団から 10 個の標本を無作為に抽出したところ, その標本平均は 100.8, 標本分散は 8.56 であった さらに, これを A 群, B 群の二つの群に分けたところ, A 群の標本は $\{97, 103, 102, 106\}$ であった. 以下の問いに答えよ. ただし, 解答は有理数または小数第一位までの数値で答えるものとする.

(a) A 群の不偏分散を求めよ.

(b) B 群の不偏分散を求めよ.

(大阪大 2021) (m20213505)

0.203 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める. ここで, 関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は, 関数

$$s = \tan\theta \quad \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である. 2 変数関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)}$$

で定める. ここで, 関数 $h(r)$ は区間 $(0, \infty)$ を定義域とし, 区間 $(0, \infty)$ において 1 回微分可能とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 2 変数関数 $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x, y)$ を求めよ.

(2) 2 変数関数 $q(x, y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x, y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x, y)$ を求めよ.

(3) $g(x, y)$ の定義域において, 等式

$$-yg_x(x, y) + xg_y(x, y) - h'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする. ここで, $g_x(x, y)$ は $g(x, y)$ の x についての偏導関数, $g_y(x, y)$ は $g(x, y)$ の y についての偏導関数, $h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す. $h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ.

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.204 (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ．

(a) A の固有値をすべて求めよ．

(b) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 B が，3 つの相異なる固有値を持つとする．B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

(大阪大 2021)　　(m20213507)

0.205 赤玉 6 個，白玉 4 個の合計 10 個の玉が入っている袋がある．まず 1 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．取り出した玉は袋に戻さず，さらに 2 回目の試行として，袋から同時に 3 個の玉を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，各試行において同時に 3 個の玉を取り出す取り出し方は同様に確からしいものとする．

(1) 1 回目の試行で赤玉 3 個が取り出される確率を求めよ．

(2) 1 回目の試行で赤玉 2 個，白玉 1 個が取り出される確率を求めよ．

(3) 1 回目の試行で取り出された赤玉の数と 2 回目の試行で取り出された赤玉の数が同じになり，かつ 1 回目の試行で取り出された白玉の数と 2 回目の試行で取り出された白玉の数が同じになる確率を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213508)

0.206 以下の問いに答えよ．ただし，A_n は n 次の実正方行列を，${A_n}^T$ は A_n の転置行列を表す．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & p & 0 \end{pmatrix}$ が正則ではないとき，実数 p の値を求めよ;

(2) ${A_3}^T = -A_3$ である A_3 を任意の実数 a, b, c を用いて表し，正則かどうかを判定せよ．

(3) ${A_n}^T = -A_n$ である A_n が正則かどうかを判定せよ．ただし，n は 5 以上の奇数であるとする．

(大阪大 2022)　　(m20223501)

0.207 以下に示す連立微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．ただし，$t = 0$ のとき，$x = 1$, $y = 0$ とする．

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx(t)}{dt} - \dfrac{dy(t)}{dt} = 3x(t) + e^{2t} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} = y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

(大阪大 2022)　　(m20223502)

0.208 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 方程式 $e^{iz} = 1 - i$ を満たす複素数 z をすべて求め，$a + bi$（a, b は実数）の形で表せ．

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ が $z \neq 1$ において正則であることを示せ．

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

(3) 以下の複素関数 $g(z)$ の $z = 0$ のまわりでのローラン展開を求めよ．ただし，$1 < |z| < 2$ とする．

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

(大阪大 2022)　　(m20223503)

0.209 (1) 100 円玉 2 枚，10 円玉 4 枚，5 円玉 6 枚が入った財布から，同時に 3 枚の硬貨を取り出す．いずれの硬貨を取り出すのも同様に確からしいとする．

(1-1) 取り出した 3 枚の金額の合計が 115 円である確率を求めよ．

(1-2) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上である確率を求めよ．

(1-3) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上になる事象を A，取り出した 3 枚の中に 10 円玉が含まれる事象を B とした場合の条件付き確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 次の表は，ある試験の結果である．各教科の得点分布は，それぞれ正規分布に従うものとする．

教科	受験者数（人）	平均（点）	標準偏差（点）
数学	400	60.0	15.2
国語	500	119.7	30.1
英語	600	120.3	20.6
物理	200	50.8	8.0
歴史	100	65.8	11.5

(2-1) この試験を受験した S 君の得点は，数学 85 点，国語 151 点，英語 135 点，物理 67 点，歴史 81 点であった．数学，国語，英語，物理，歴史を S 君の偏差値が高い順に並べよ．

(2-2) S 君の数学の得点が 85 点である場合，数学における S 君の上からの順位に最も近いものを 10 位，20 位，50 位，100 位，150 位の中から 1 つ選択し，理由と共に示せ．必要ならば以下に示す標準正規分布表を用いよ．
（標準正規分布表 $P(0 \leq Z \leq z)$ は省略）

(大阪大 2022)　　(m20223504)

0.210 $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x_0 > 0$ として，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2,\ t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq x_0$ のとき，$x(t)$ が区間 $t \geqq 0$ において単調関数であることを示せ．

(大阪大 2022)　　(m20223505)

0.211 $0 \leqq \theta < 2\pi,\ 0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 $A,\ B$ を次式で定義し，$C = AB$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は $i\ (= \sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.212 コインを投げたとき，表が出る確率が $p\left(0 < p < 1,\ p \neq \dfrac{1}{2}\right)$ であるコイン A と，表が出る確率が $1-p$ であるコイン B が 1 枚ずつある．ただし，p は常に一定である．また，コイン A とコイン B は見た目や重さでは判別できない．以下の設問に答えよ．

(1) コイン A とコイン B を同時に投げたとき，2 枚とも表が出る確率を求めよ．

(2) ある競技において，2 名の競技者がいずれも公平に権利を得られるような抽選の仕組みを考えたい．コイン A またはコイン B，またはその両方を用いて，実現可能な方法を理由とともに一つ述べよ．

(3) N を正の整数とする．コイン A とコイン B を中身の見えない袋に入れる．その袋からコインを 1 枚無作為に取り出し表裏を確認後，コインを袋に戻す試行を N 回繰り返したところ，N 回とも表が出た．このとき，投げたコインが全て A であった条件付き確率を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223507)

0.213 定数 C は正の実数とし，確率変数 X は $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ を確率密度関数にもつとする．以下の設問に答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) 確率変数 Y を $Y = \cos X$ によって定める．このとき，Y の期待値と分散を留数定理を用いることによって求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223508)

0.214 (1) 関数 $y = y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy + (1+x^2)^2 + y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z = z(x)$ を

$$z = \frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x \to a+0} |y(x)| = \lim_{x \to b-0} |y(x)| = \infty$$

を満たしている．このような $a,\ b$ を求めよ．

(4) 関数 $u = u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx} = 2xu + (1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 + u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)