[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：お茶の水女子大

0.1 $y = x^2 \log x$ の増減・凹凸を調べてグラフを描け．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970601)

0.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^2-i^2}$ を定積分で表し，
極限値を求めよ．　(お茶の水女子大 1997)　(m19970602)

0.3 $\displaystyle\int e^x \cos x dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970603)

0.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ ならば収束し，$p \leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970604)

0.5 $D = \{(x,y)\ ;\ 0 \leq x+y \leq \pi, 0 \leq x-y \leq \pi\}$ としたとき，

$$\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy$$

を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970605)

0.6 (1) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \qquad \text{(i)}$$

を解け．ただし，λ は定数で，$y(0)=a$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = f(t) \qquad \text{(ii)}$$

を以下の手順によって解け．ただし，$f(t)$ は既知の関数で，$y(0)=a$ とする．まず，

$$y(t) = e^{-\lambda t}x(t) \qquad \text{(iii)}$$

とおいて，(ii) を $x(t)$ の方程式に変換し，$x(t)$ を解き，$y(t)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970606)

0.7 3 行 3 列の行列 A と B を以下のように与える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 A と B の和 $(A+B)$，差 $(A-B)$，積 $(A*B)$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 1997)　(m19970607)

0.8 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の成分について

$a^2+b^2+c^2 = a'^2+b'^2+c'^2 = a''^2+b''^2+c''^2 = 1$

$aa'+bb'+cc' = aa''+bb''+cc'' = a'a''+b'b''+c'c'' = 0$

が成り立っている．このとき

(1) M の行列式の値を求めよ．

(2) $a^2+a'^2+a''^2=b^2+b'^2+b''^2=c^2+c'^2+c''^2=1$

$ab+a'b'+a''b''=ac+a'c'+a''c''=bc+b'c'+b''c''=0$

が成り立っていることを示せ．

ヒント：M と，M の転置行列との積を考えよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970608)

0.9 2行2列の行列 C と D を以下のように与える．

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 C の特性方程式 $\det(C-xI)=0$ を書き下し，その根を求めよ．ただし，$\det(C-xI)$ は行列 $C-xI$ の行列式を表し，I は2行2列の単位行列である．すなわち $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

(2) D の n 乗 (D^n) を求め，そのトレース $\mathrm{tr}(D^n)$ を計算せよ．ただし，$\mathrm{tr}D$ とは行列 D の対角成分の和を表す記号である．

(3) C の n 乗 (C^n) のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を $n=1,2,3$ の場合に求めよ．

この結果を (2) と比較し，一般の n の場合のトレース $\mathrm{tr}(C^n)$ の値を予想せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970609)

0.10 3次対称行列 A を次で与える．　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970610)

0.11 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す．$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g\circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x\in\mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g=\{g(x)\in\mathbf{R}^4 \mid x\in\mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970611)

0.12 n 次元における半径 r の "球" の "体積" を考えましょう．３次元においては半径 r の球の体積は，原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です．３次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，１次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，２次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では４次元において,「半径 r の "球" の "体積"」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 n でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980601)

0.13 m と n を整数として以下の定積分を考えましょう．

$$I(m,n)=\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

$$J(m,n)=\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cdot\sin(nx)dx,$$

$$K(m,n)=\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cdot\cos(nx)dx,$$

(1) 任意の m,n に対して $I(m,n)$ を求めてください．

(2) m と n が異なるときに，$J(m,n),K(m,n)$ を求めてください．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)$ を三角関数で次のように展開します：

$$f(x)=c_0+c_1\cos(x)+c_2\cos(2x)+c_3\cos(3x)+\cdots+a_1\sin(x)+a_2\sin(2x)+\cdots$$

このとき，係数 c_1,a_2 を求めてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980602)

0.14 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\dfrac{d}{dx}\sin^2 x$　(2) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^3)$　(3) $\dfrac{d}{dx}\log(\sqrt{x^2+1}+x)$　(4) $\dfrac{d}{dx}2^x$　(5) $\dfrac{d}{dx}x^x$

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990601)

0.15 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^3\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+e^x)^{1/x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\sin x}{x}$

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990602)

0.16 関数 $f(x)=x^{1/x}$ $(x>0)$ の最大値をとる点を求めよ．

また，$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990603)

0.17 (1) $y^4=x^4(1-x^2)$ は x-y 平面で閉じた曲線になる．この曲線のおおよその形を描け．

(2) この曲線に囲まれた領域の面積を計算するには積分 $\displaystyle 4\int_0^1 f(x)dx$ が必要である．

関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 上の積分を実行せよ．

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990604)

0.18 次の計算をせよ．ただし，$\log x$ は自然対数であり，$\ln x$ と同じである．

(1) $\displaystyle\int \sin 3x dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos x dx$ (3) $\displaystyle\int \log x dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$ (5) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$

（お茶の水女子大 1999） (m19990605)

0.19 次の各問に答えよ．

(1) $\tan x \left(\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1} x(-\infty < x < \infty)$ で表す．$\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+13}dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ となることを示せ．

（お茶の水女子大 1999） (m19990606)

0.20 (1) 次の級数の収束・発散を言え．

(i) $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$ (ii) $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x=0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ．

(例）$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots(\rho=0)$

(i) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (ii) e^x (iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990607)

0.21 次の $\mathbf{R}^3$ の 3 つのベクトルについて以下の問に答えよ．

$$\begin{pmatrix}1\\x\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\y\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2\\z\\-1\end{pmatrix}$$

(1) これらが一次従属であるための x,y,z についての必要十分条件を求めよ．

(2) (1) の条件が満たされるとき，$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ が，この 3 つのベクトルの一次結合で表されるための x,y,z についての必要十分条件を求めよ．

（お茶の水女子大 1999） (m19990608)

0.22 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&-1\\-2&4&3\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような $3\times\ 3$ 行列 P を一つ求めよ．

（お茶の水女子大 1999） (m19990609)

0.23 図の様に，x,y 平面上の座標が (x,y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x',y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

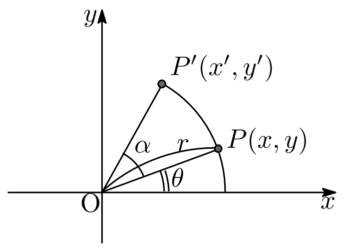
(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha,\quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha,\quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



（お茶の水女子大 1999） (m19990610)

0.24 次の計算をせよ．ただし，log は自然対数を，e はその底を表す．

(1) $\dfrac{d}{dx}e^{x^2}$ (2) $\dfrac{d}{dx}\log(\log x)$

（お茶の水女子大 2000） (m20000601)

0.25 $f(x)$ は有界な 3 階導関数を持つ関数とする．$h > 0$ が小さいとき, 差分商

$$\frac{af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h)}{h}$$

が一階導関数 $f'(x)$ を最も良く近似するように実定数 a, b, c を決定せよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000602)

0.26 平均値の定理は次のように書くことができる．

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

次の各関数に対して θ を x と h の関数として表せ．

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = x^3$ (3) $f(x) = e^x$ (4) $f(x) = \log x$ $(x > 0)$

$x \neq 0$ で固定したときに各関数について，$\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．
一般に $f(x)$ が C^2 級の関数で $f''(x) \neq 0$ のとき $\lim_{h\to 0}\theta$ の値は定まるかどうか調べよ．

（お茶の水女子大 2000） (m20000603)

0.27 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$

（お茶の水女子大 2000） (m20000604)

0.28 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s > 0$ とする．

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ．

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000605)

0.29 (1) 関数 $\sin x,\ \sin^2 x$ および $x^2 - \sin^2 x$ の原点における Taylor 展開を 4 次の項まで示せ．ただし，$\sin^2 x$ は $(\sin x)^2$ の意味である．

(2) 必要なら上の計算を利用して，不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000606)

0.30 (1) 次の展開式を簡単に示せ．

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots$$

(2) 次の無限級数の値を求めよ．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000607)

0.31 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq x\}$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000608)

0.32 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000609)

0.33 (1) 4 次元の実数ベクトル空間 R^4 のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の中に一次独立なものは何本あるか？

(2) 上のベクトルが張る R^4 の線形部分空間に対する直交補空間を示せ．ただし，内積は通常のユークリッド内積とする．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000610)

0.34 a を $0 \leq a \leq 1$ なる実定数とする．2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対して，A^n を計算し，その $n \to \infty$ における極限を示せ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000611)

0.35 実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列 A に対し，その転置行列 ${}^tA$ を右から掛けると，

$$A \cdot {}^tA$$

が単位行列になるという．

(1) A はどんな行列か．

(2) 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどんな点になるか，位置関係を図形的に説明せよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000612)

0.36 次の連立一次方程式の解空間を <u>実数の範囲で</u>求め，その次元を示せ．またその幾何学的意味を述べよ．

$$x + 2y + 3z = 0, \quad 3x + z = 0, \quad x - y - z = 0$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000613)

0.37 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 $B^T AB$ は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000614)

0.38 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ．

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか．

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ．

（お茶の水女子大 2000）　(m20000615)

0.39 半径 a の円が x 軸に接しながら滑らずに回転してゆくとき，円周上の一点の軌跡をサイクロイドと呼ぶ．

(1) 点の初期位置を原点として，この軌跡の方程式を回転の中心角に関するパラメータ表示で与えよ．ただし，円は常に x 軸の上側にあるものとする．

(2) この点が再び x 軸に戻るまでの一周期分の曲線の弧長を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010601)

0.40 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I = (a, b)$ で連続，関数 $g_1(t), g_2(t)$ は実数の開区間 $J = (c, d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} x \log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数を表す.})$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x \log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.})$$

(3) 次の関数の導関数を f, g_1, g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001）　(m20010602)

0.41 関数 f は実数の閉区間 $[a, b]$ で連続とし，

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt$$

とおくとき，

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

という式が成立することを，どういう事実を使ったか明確に説明しながら示せ．特に，

(1) $f(x) = c$（定数）　(2) $f(x) = e^x$

であるとき，$f_n(x)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010603)

0.42 変数変換 $t = \tan(\theta/2)$ を用いて三角関数の積分を計算してみよう．

(1) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は変数 t を用いて，以下のように表せることを示せ．

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2) 次の関数式を示せ．　$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

(3) 次の不定積分を求めよ．　$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

ただし，もし必要であれば以下の公式を用いて良い．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

（お茶の水女子大 2001）　(m20010604)

0.43 $\mathrm{Arctan}\, x$ は $\tan x$ の逆関数で，$x = 0$ のとき値が 0 となるものを表すとする．

(1) $\mathrm{Arctan}\, x$ の原点を中心とする Taylor 展開を 5 次の項まで記せ．

(2) $x\,\mathrm{Arctan}(x^2)$ の原点を中心とする Taylor 展開を 11 次の項まで記せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010605)

0.44 v_1, v_2, v_3 を 3 次元内積空間 $\mathbb{R}^3$ の長さ 1 のベクトルで，どの 2 つも互いに直交するものとする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル x は，

$$x = (x, v_1)v_1 + (x, v_2)v_2 + (x, v_3)v_3$$

と表されることを示せ．ただし，$(\ \ ,\ \ )$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を意味する．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル a, b を

$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$b = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

と表すとき，$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010606)

0.45 A を与えられた実係数 n 次正方行列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき，A は正則行列ではないことを示せ．

(2) $A^n \neq O$（n は行列 A の次数）かつ $x \neq o$ であるが，$A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ．

(3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする．

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき，k 個のベクトル $x, Ax, \cdots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ．

(4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば，$k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010607)

0.46 平面の単位正方形 $\{(x, y) | \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$ を，４点 $(0, 0), (1, 2), (0, 4), (-1, 2)$ を頂点とする菱形に写すような線型写像（2×2 型行列）を決定せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010608)

0.47 $P^T P = I$ を満たす行列 P を直交行列と呼ぶ．ここに P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

(1) ３次の実直交行列 P が３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ に線形変換として働くとき，P により位置を変えない直線が少なくとも一本存在することを示せ．

(2) 上の直線を z 軸に取ったとき，P はどのような形となるか？

(3) 上の形をもとに，P の空間への作用の仕方を説明せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010609)

0.48 以下に与えられる３行３列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010610)

0.49 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ の増減・凹凸を調べ，グラフの概形を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030601)

0.50 次の極限が存在するように定数 a, b, c を定め，そのときの極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x + a + bx + cx^2}{x^3}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030602)

0.51 次の計算をせよ．　$\dfrac{d}{dx} e^{\sqrt{\log x}}$　　$(x > 1)$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030603)

0.52 次の計算をせよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x} dx$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030604)

0.53 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，log は自然対数であり，ln とも書く．

(1) $\log(1-x)$　　(2) $\log \dfrac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030605)

0.54 指数関数 $f(x) = e^x$ を考える．

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} dt$$

となることを示せ．

(2) $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} dt$　　$(|x| < +\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a, b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030606)

0.55 (1) 2 変数関数 $g(x, y)$ が 2 回連続微分可能であるとき，それと $x = f_1(r, \theta) = r\cos\theta$, $y = f_2(r, \theta) = r\sin\theta$ の合成関数 $h(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r \neq 0, (x, y) \neq (0, 0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍 $V = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$ で 2 回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) > 0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a, b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a, b)\right)^2 > 0$$

を満たすとき，$f(x, y)$ は (a, b) で極小であることを示せ．すなわち，

$U = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r'\}$ $(r' \leq r)$ があって，$(x, y) \in U - \{(a, b)\}$ ならば

$f(x, y) > f(a, b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030607)

0.56 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030608)

0.57 実数関数 $x = x(t)$ は，次の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

ただし，係数 a と b は正の実数であり，$a^2 > 4b$ が成り立つものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この微分方程式の解を，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の２つ見つけたとしよう．このとき，実数 c_1, c_2 を用いて作られた $x_3(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ も，この微分方程式の解であることを示せ．

(2) α を定数としたとき $x(t) = e^{\alpha t}$ がこの微分方程式を満足すると考えることにより，上記の微分方程式のもっとも一般的な解を求めよ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030609)

0.58 次の正方行列 A, B, C を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) A, B, C の階数を求めよ．

(2) A, B, C に逆行列が存在すれば求めよ．

(3) n 次正方行列 A について，次の２つの命題を考える：

(a) A^{-1} が存在する．　　(b) A の階数が n である．

この２つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか？理由とともに答えよ．

1) 同値

2) 一方が他方の十分条件であるが，必要条件でない．

3) 1),2) のいずれでもない．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030610)

0.59 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030611)

0.60 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030612)

0.61 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030613)

0.62 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は，

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 H とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの H と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

0.63 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 $N,\ J_\lambda(n)$ を考える．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k = E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．
定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1, \ldots, n_m$ で $\sum_{i=1}^{m} n_i = l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix}$$ と書ける．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030615)

0.64 次のベクトルの張る空間の次元を求めよ．

$$(1,1,2)\,,\ (1,2,3)\,,\ (2,3,5)\,,\ (3,5,8)$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030616)

0.65 関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ を考える．

(1) $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めなさい．

(2) $f(x)$ の変曲点を求めなさい．　　(3) $y = f(x)$ の概形を描きなさい．

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070601)

0.66 次の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x \log x dx$　(ただし，$\log x$ は自然対数とする.)　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070602)

0.67 (1) 線形写像の定義を書きなさい．

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker$f$) と像 (Imf) を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$，　(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$

（注）ただし,線形空間 V から W への線形写像 $F: V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im}F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである．また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す．

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070603)

0.68 次の行列 A について，行列式，逆行列，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070604)

0.69 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2 級関数とする．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1 級関数とする．$h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.70 (1) 正方行列 A と B がともに上三角行列であるとき，積 AB もまた上三角行列となることを示せ．

(2) 次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A の固有値を求め，それぞれの固有値に対する A の固有空間の基底を一組求めよ．

(b) 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090602)

0.71 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，3 次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.72 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2}\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-2x+2}\,dx$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090604)

0.73 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} \text{に},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} \text{に},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} \text{に},$$

それぞれ写すとする.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい.

(2) 線形写像 f で $\begin{pmatrix}-1\\-3\\9\end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090605)

0.74 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求め対角化しなさい.

$$A = \begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\3 & 7 & 5\\0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090606)

0.75 行列

$$\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\i & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

の固有値, および, 独立な固有ベクトルをすべて求めよ

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090607)

0.76 関数

$$f(x) = |\cos x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090608)

0.77 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

の独立な 2 つの解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を用いて, 微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = f(x)$$

の特解を

$$z(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

とおく．$\dfrac{dc_1}{dx}y_1 + \dfrac{dc_2}{dx}y_2 = 0$ となるように $c_1(x)$, $c_2(x)$ を選ぶことにより，特解が

$$z(x) = -y_1(x)\int^x \frac{f(x')y_2(x')}{W(x')}\,dx' + y_2(x)\int^x \frac{f(x')y_1(x')}{W(x')}\,dx'$$

と与えられることを示せ．ここで，$W = y_1\dfrac{dy_2}{dx} - y_2\dfrac{dy_1}{dx}$ である．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090609)

0.78　2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y) = (A_x(x,y), A_y(x,y))$，に対して，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

で与えられる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を極座標 $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ であらわすと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

となることを示せ．ここで，A_r は $\boldsymbol{A}$ の r 方向（動径方向）成分，A_θ はそれに垂直な方向の成分である．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090610)

0.79　次の関数を微分せよ．

(1)　x^{x^x}

(2)　$\mathrm{arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　（主値でかんがえること）

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100601)

0.80　次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100602)

0.81　平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100603)

0.82　次の行列で定められる $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核と像を求めよ.

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -7 & -6 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100604)

0.83　(1)　n を自然数とする. 複素数を成分とする n 次正方行列が n 個の相異なる固有値を持てば, 対角化可能であることを示せ.

(2) a, b, c, d を複素数とする. 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が対角化できるための必要十分条件を a, b, c, d の関係を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100605)

0.84 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100606)

0.85 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2 x \qquad ③$$

の一般解を求めよ. ここで a は正の定数である.

(2) ③の一般解に対して $at \ll 1$ の場合を考えると, これが $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ の一般解に一致することを示せ.

(3) ③の微分方程式を $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ という初期条件の下で解き, その解が $t \to \infty$ で有限な値を持つための条件を求めよ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100607)

0.86 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad ④$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ ($r \neq 0$). ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 2010) (m20100608)

0.87 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x\cos x & x > 0 \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続か？

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能か？ 微分可能ならば導関数を記しなさい.

(3) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で何回まで微分可能か？

(お茶の水女子大 2010) (m20100609)

0.88 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(お茶の水女子大 2010) (m20100610)

0.89 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の基底と次元を答えなさい.

（注）ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは, $\mathrm{Ker}\, F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで, 像とは $\mathrm{Im}\, F = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2010) (m20100611)

0.90 次の実対称行列 B の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶に水女子大 2010) (m20100612)

0.91 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2+y^2 \le 1\right\}$ とするとき, D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f) = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ. また, f が任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) = -f(-x,-y)$ を満たすとき, $I(f) = 0$ であることを定義に従って示せ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110601)

0.92 $P(x) = x^2+ax+b$, $Q(x) = x^2+cx+d$ を実数係数の x の 2 次多項式とし, 次の 4 次正方行列を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & c & d & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 2 つの x の 2 次方程式 $P(x)=0$, $Q(x)=0$ が共通の実数解 α をもつとき

$$A \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = o$$

となることを示し, A の行列式 $|A|$ は 0 となることを示せ. ただしここで o は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の原点を表すものとする.

(3) $P(x)=(x-1)(x-2)$ とする．このとき $|A|=Q(1)Q(2)$ であることを示し，$\mathrm{rank}\,A \leqq 3$ ならば $P(x)=0$，$Q(x)=0$ は少なくとも一つの共通の実数解をもつことを示せ

(4) $P(x)=0$ が 2 つの実数解 $x=\alpha$, β $(\alpha \neq \beta)$ を持つとする．このとき $\mathrm{rank}\,A=2$ であれば，$P(x)=0$, $Q(x)=0$ は 2 つの共通の実数解をもつことを示せ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110602)

0.93 次式で決まる曲線で囲まれる面積について考察せよ．以下の (1) から (3) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．ただし，x と y は実数とする.

$$y^2-x^2(x+a)=0$$

(1) $a=1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(2) $a=-1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(3) $a=1$ のときの曲線によって囲まれた領域の面積を求める．積分の計算においては $t=\sqrt{x+a}$ とおいて置換積分を行ってよい.

(お茶の水女子大 2011) (m20110603)

0.94 任意の実 2× 2 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい.

(1) 上三角行列

$$T=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める.

(2) 行列 T の n 乗を計算する.

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha,\beta,\gamma,x_1,x_2$ はすべて実数であるとする.

(4) 2× 2 行列 M に対し

$$Me=\lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 a,b を用いて正則行列

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の 2× 2 行列が上三角行列に変換されることを示す． さらに．$T_0=P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n=P(T_0)^nP^{-1}$$

が成立することを示す.

(5) 行列 B の要素がすべて実数で，固有値の絶対値が 1 より小さいとする．このとき行列 B を無限回作用すると，実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.95 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110605)

0.96 極座標表示で表された曲線 : $r = 1 + \cos\theta \ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110606)

0.97 微分可能な関数 $f_{ij}(x) \ \ (i, j = 1, 2, 3)$ に対して

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とおく．このとき，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし，$|\quad|$ は行列式を表す．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110607)

0.98 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ．

(1) f の表現行列 A を求めよ．

(2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110608)

0.99 $\mathbb{R}^2$ 上の関数が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で（全）微分可能であることの定義を述べよ．また，$f(x, y) = |x||y|$ の微分可能性を $\mathbb{R}^2$ の各点について調べ，微分可能ならばその点での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110609)

0.100 すべての実数 x について，不等式

$$\cos x + \sin x \geq 1 + x - \frac{2}{\pi}x^2$$

が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110610)

0.101 以下の各問いに答えよ．

(1) 次の実数値関数の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が，異なる 2 点 a, b を含む区間で連続であれば

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

となるような点 ξ が 2 点 a, b の間に必ず存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120601)

0.102 以下の各問いに答えよ．

(1) t を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ．また，この行列が対角化可能となるような t の値を求め，そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ．

(2) n を自然数，A を n 次実正方行列とする． 以下では i は自然数，$r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする．

(a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ．

(b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき，$r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ．

(c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ．

(お茶に水女子大 2012)　　(m20120602)

0.103 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する．

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ , \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す．

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ．

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ．

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ．

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.104 質量 m の二個の質点がバネ定数 k のバネでつながれ，x 軸上を運動する．バネの自然長をゼロとし，二個の質点の位置をそれぞれ x_1, x_2 とする．

(1) 運動方程式は次式で与えられることを説明せよ．

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1-x_2)\ ,$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2-x_1)\ .$$

(2) 重心の座標 $X = (x_1 + x_2)/2$ と相対座標 $x = x_2 - x_1$ を用いて，運動方程式を書き直せ.

(3) 重心運動の運動方程式の一般解を求めよ.

(4) 相対運動の運動方程式の一般解を求めよ．全体の運動の一般解を求めよ.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120604)

0.105 $t > 0$ に対して,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$

とする. このとき以下の各問に答えよ.

(1) 右辺の広義積分は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ.

(3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120605)

0.106 極座標表示で

$$r^2 = \cos 2\theta \quad \text{ただし} \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

と表される曲線の概形を描け.

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120606)

0.107 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と, f の核 (Ker f) と像 (Im f) を求め，それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ -3x+2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120607)

0.108 次の行列 A, B, C について，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120608)

0.109 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx$　　ただし，arctan は正接 tan の逆関数の主値を表すものとする.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130601)

0.110 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ. また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.111 $f(x)$ を微分可能関数とし $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$ とする. このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

が収束することを示し, その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130603)

0.112 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. S の階数（ランク）$\mathrm{rank}S$ の定義を述べよ.

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. このとき, 不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし, S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする.　このとき,

$$\mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ. ただし, a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ. またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.113 行列に関する次の問に答えよ.

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて
$O^T BO$ とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1，c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1，c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(お茶の水女子大 2013) (m20130605)

0.114 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r}) = a\delta(\boldsymbol{r}), \qquad \text{(a)}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \text{(b)}$$

である.

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \qquad \text{(c)}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい.

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x, k_y, k_z) から極座標系 (k, θ, ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{k} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |J| \qquad \text{(d)}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k = |\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \qquad \text{(e)}$$

と書けることを示しなさい.

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(f)}$$

を用いてもよい.

(お茶の水女子大 2013) (m20130606)

0.115 (1) $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ.

(2) $\sin 1$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130607)

0.116 $n \geq 0$ なる整数 n に対して，

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) I_0 と I_1 を求めよ．

(2) I_{n+1} と I_n の関係を求めよ．

(3) I_n を求めよ．

(お茶の水女子大 2013) (m20130608)

0.117 ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ 上の一次変換 f を表現する行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2013) (m20130609)

0.118 三角形 ABC の三つの角について，以下を示せ．

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(お茶の水女子大 2013) (m20130610)

0.119 関数 $f(x)$ を $x=a$ のまわりで定義された関数とし，その定義域を D とする．D のなかに a を含むある開区間 $I \subset D$ があり，$x \in I$, $x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ となるとき f は $x=a$ で極小値をとるといい，同様に, $x \in I$, $x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ となるとき f は $x=a$ で極大値をとるという．極小値をとるとき，または極大値をとるとき， 極値をとるという．

以下の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数の定義を述べよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとする．f が $x=a$ で微分可能であるとき，$f'(a)=0$ となることを示せ．

(3) g は $(-\infty,\ \infty)$ で定義され C^2- 級関数であるとする．g が $x=0$ と $x=1$ で極値をとるとき，ある $0<c<1$ で $g''(c)=0$ となることを示せ．

(4) 上問 (3) において g が $x=0$ と $x=1$ で共に極大値をとるとき，$g''(x)=0$ となるような x は開区間 $(0,1)$ の中に少なくとも 2 つ存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2014) (m20140601)

0.120 (1) n 次正則行列 A の逆行列 A^{-1} を A の行列式 $|A|$ 及び A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いて表せ．

(2) A を成分が全て整数である n 次正則行列とする．さらに，A の行列式は 1 であると仮定する．このとき，A の逆行列 A^{-1} の成分も全て整数となることを示せ．

(3) 次の行列 B の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 3 & 6 & 7 \\ b_2 & c_2 & 0 & 4 & 6 \\ b_3 & c_3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140602)

0.121　5 次正方行列 A を次で与える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値は, -2 と 8 であることを示せ.

(2) A の固有値 -2, 8 の固有空間をそれぞれ $V(-2)$, $V(8)$ で表す. $\boldsymbol{a}$ を $V(-2)$ の 0 でないベクトルとし, $\boldsymbol{b}$ を $V(8)$ の 0 でないベクトルとする.　このとき, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ.

(3) 各固有空間 $V(-2)$, $V(8)$ の基底を求めよ.

(4) 行列 A が対角化可能であることを示し, $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140603)

0.122　(1) 座標系 $\{x, y\}$ から $\{x', y'\}$ への線形変換で, $x^2 - y^2$ を不変にするものを求めてください.

(2) 正方形はどのように変換されるか, 2 次元面に図示してください.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140604)

0.123　(1) 一定面密度 σ, 半径 r の球殻が作る重量ポテンシャルを求めてください. 理由や計算を詳しく示してください.

(2) 地球がそのような中空の球殻構造になっていない根拠を自由に考えて, できるだけ定量的に 3 つ以上書いてください.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140605)

0.124　(1) 正の実数 a と自然数 n に対して

$$I_n(a) := \int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく. 極限 $I_n = \lim_{a \to \infty} I_n(a)$ が存在することを確かめ, I_n を求めよ.

(2) 整数 k, n は $0 \leq k < n$ を満たすものとし, $a_0, \cdots, a_k$ は負の実数, $a_{k+1}, \cdots, a_n$ を正に実数とする. このとき x に関する方程式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

は正の実数解を一つだけ持つことを示せ.

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150601)

0.125　以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

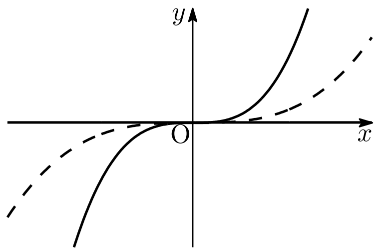
(2) 次の行列 A の固有値と, 各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

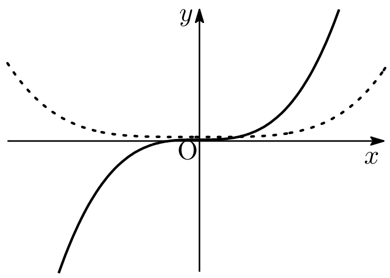
(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.126 以下の問いに答えよ.

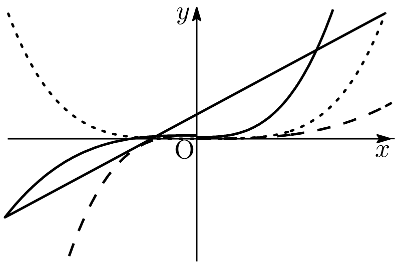
(1) 以下の図は $x = 0$ のまわりで $y = 20x^3 + 40x^4$ と $y = 1000x^5 + 2000x^7$ のグラフを同じ縮尺で重ね合わせて描いたものである（x 軸方向と y 軸方向の縮尺は異なることに注意せよ）. 実線のグラフと破線のグラフがそれぞれどちらの多項式に対応しているか答えよ.



(2) $P(x) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n \quad (k \leq n)$ という形の多項式について, $m(P) = k$ と定めることにする. 以下の図は $x = 0$ のまわりで 2 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたものである. 実線のグラフに対応する $P(x)$ と点線のグラフに対応する $Q(x)$ について, $m(P)$ と $m(Q)$ の偶奇および大小の関係について述べよ.



(3) $x=0$ のまわりで 3 つの実数係数多項式のグラフを重ね合わせて描いたとき，以下の図のような配置とはならないことを示せ．



(お茶の水女子大 2016) (m20160601)

0.127 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c を実数とし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cx = 0 \right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

となる自然数 i, j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f_A(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3$，で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．線形写像 $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_B(x) = Bx,\ x \in \mathbb{R}^4$，で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016) (m20160602)

0.128 次の行列 A について，A^2, A^3, A^4 を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160603)

0.129 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T F P$ へと変換された．ここで T は行列の転置を表す．以下の問に答えなさい．

(1) F のトレース（対角成分の和）はこの変換により不変であること，つまり $T_r\ F = T_r\ F'$ を証明しなさい．

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき，P と F' を求めなさい．

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160604)

0.130 常微分方程式 $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$（$\lambda$ は正の実数）を解きなさい．ただし初期条件を $t = 0$ で $N = N_0$ とすること．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160605)

0.131 常微分方程式　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$　を解き，解の振る舞いの概要を説明しなさい．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160606)

0.132 3 次元微分演算子 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ に対して ∇r を求めなさい．

ただし $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160607)

0.133 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^x$　　(2) $y = \sin\bigl(\cos(x^2)\bigr)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160608)

0.134 逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(a - x) = \dfrac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ.

(2) $\bigl(\tan^{-1} x\bigr)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ を示せ.

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$ を求めよ.

(4) $\tan^{-1} x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.135 次の連立 1 次方程式が

(1) 解を持たない

(2) 無数に多くの解をもつ

ように，それぞれ実数 a の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ a & -1 & 4 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160610)

0.136　次の行列 A, B について，それぞれ固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160611)

0.137　以下の関数の n 次導関数を求めよ．

$$y(x) = x^2 e^x$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160612)

0.138　以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x+3y)dx + (3x-y)dy = 0$　　(2) $y'' + 2y' - 3y = e^x$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160613)

0.139　以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160614)

0.140　以下の 2 次正方行列について，固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

ただし，$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とし，a, b は実数とする．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160615)

0.141　3 次元空間におけるデカルト座標系で表される，点 $O(0,0,0)$，点 $A(1,2,3)$，点 $B(-3,1,-2)$ について，以下を求めよ．

(1) $\angle AOB$ の大きさ　　(2) $\triangle AOB$ の面積

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160616)

0.142　$a \neq 0$ とし，$f(x)$ を $x = 0$ のまわりで定義された関数とする．

$$(*) \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x-a}$$

が存在するために $f(x)$ が満たすべき条件を求めよ．また $(*)$ が存在するための条件を $f(x)$ が満たす時，$(*)$ の値を求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170601)

0.143 $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で，かつ $f(x) \geq 0$ を満たすものとする．もし $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ であるならば，$[a, b]$ 上の各点 c で $f(c) = 0$ であることを示せ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170602)

0.144 $m \times n$ 型実行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ の各成分 $a_{ij}(t)$ が t に関して微分可能な関数であるとき，$a_{ij}(t)$ の導関数 $a'_{ij}(t)$ を成分にもつ $m \times n$ 型行列を $A'(t)$ で表す．

(1) 各成分が t に関して微分可能な関数である $m \times n$ 型，$n \times l$ 型実行列をそれぞれ $F(t) = (f_{ij}(t))$, $G(t) = (g_{jk}(t))$ で表す．このとき，行列の積 $F(t)G(t)$ の各成分も t に関して微分可能な関数となり，$(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$ が成り立つことを示せ．

(2) $F(t) = (f_{ij}(t))$ は，各成分が t に関して微分可能な関数である n 次実正方行列とする．$F(t)$ の行列式 $|F(t)|$ は t に関して微分可能な関数となることを示せ．すべての t について $F(t) = (f_{ij}(t))$ は正則であるとき，$F(t)$ の逆行列 $F^{-1}(t)$ の各成分も微分可能な関数で，$\left(F^{-1}\right)'(t) = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170603)

0.145 (1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ．

(2) t を実数とする．次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す．t が実数全体を動くとき，$V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ．また，そのときの $V(t)$ の基底を求めよ．

(4) t を実数とする．未知数 x, y, z に関する次の連立 1 次方程式が解をもつような t をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170604)

0.146 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ （ただし，$-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け．

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を x で微分せよ．

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(5) $y = f(x)$ として $y''(1 - x^2) = y'x$ がり立つことを示せ．

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.147 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \text{に，} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \text{に，} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{に，}$$

それぞれ写すとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 線形写像 f の核 (Ker f) と像 (Im f) の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170606)

0.148 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．変換に用いた直交行列も答えること．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170607)

0.149 以下の微分方程式を ( ) 内の条件のもとで解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -xy$　　$(x = 0,\ y = 2)$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 2x$　　$(x = 0,\ y = 5$ および $x = 1,\ y = 6)$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170608)

0.150 極限値を求めよ．　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x}$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170609)

0.151 $x = \sin x$ を満たす x の実数解はいくつあるか答えよ．またその根拠も示せ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170610)

0.152 以下の 2 次正方行列 A について答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170611)

0.153 ある道路で歩行者の歩行速度の調査を行ったところ，以下の表のような結果となった．調査対象者全体の，歩行速度の平均値 $\overline{z}$ および不偏分散 $\hat{\sigma}_z{}^2$ を求めよ．

	調査した人数	歩行速度の平均値	不偏分散
60 歳未満	9 人	$\overline{x} = 1.8$ (m/s)	$\hat{\sigma}_x{}^2 = 0.2$ $(m/s)^2$
60 歳以上	18 人	$\overline{y} = 0.8$ (m/s)	$\hat{\sigma}_y{}^2 = 0.1$ $(m/s)^2$
調査対象者全体	27 人	$\overline{z}$ (m/s)	$\hat{\sigma}_z{}^2$ $(m/s)^2$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170612)

0.154 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める．

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ． また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ．

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する． 適当な多項式 P_m, Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ． また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018) (m20180601)

0.155 (1) 上三角行列の積は上三角行列になることを示せ．

(2) 次の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列を対角化せよ． また，各固有値の固有空間の次元を求めよ．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2018) (m20180602)

0.156 (1) 以下の完全微分方程式を解け．

$$(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy = 0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2x + 3$$

(お茶の水女子大 2018) (m20180603)

0.157 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x - 7x^3}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\sin 4x)}{x}$

(お茶の水女子大 2018) (m20180604)

0.158 行列 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2018) (m20180605)

0.159 ある工場において製造される製品 A の含水率 (%) の平均は 56.0 であったが，製法を変えたところ，この製品 A の含水率が変わったのではないかと思われた．これを検証するため，新しい製法による製品 A から無作為に 10 個を取り出して計測したところ，次のようなデータが得られた.

54.5	57.3	57.9	57.7	58.5
55.8	55.6	57.3	58.2	56.6

(1) 計測した 10 個の含水率の平均値を求めよ.

(2) 含水率が変わったか有意水準 5% で検定せよ.
なお母分散は製法変更の前後で $\sigma^2 = 1.6$ で変わらないものとし，$z_{0.025} = 1.96$ とせよ.

(お茶の水女子大 2018) (m20180606)

0.160 以下の (1)〜(3) に答えよ.

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.
$$x^2\frac{dy}{dx} - xy - y^2 = 0$$
(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2x + 3$$
(3) 以下の微分方程式を ( ) 内の初期条件のもとで解け.
$$(a)\ \cos x\cos^2 y + \frac{dy}{dx}\sin^2 x\sin y = 0 \qquad \left(x = \frac{\pi}{2},\ y = 0\right)$$
$$(b)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \qquad \left(x = 0,\ y = 1\ \ and\ \ x = \frac{\pi}{4},\ y = 0\right)$$

(お茶の水女子大 2019) (m20190601)

0.161 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ について,

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2019) (m20190602)

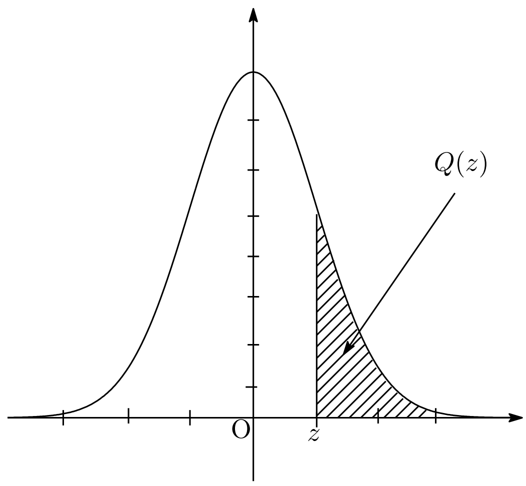
0.162 ある会社のペットボトル飲料水の容量表示が $500mL$ と印字されている．しかしながら，工場での注入の際に製品ごとに変動が生じる．含量は，平均 $\mu = 505.0mL$，標準偏差 $\sigma = 2.0mL$ の正規分布に従うことが分かっている．以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて付表 1 を利用せよ.

(1) 含量が表示である $500mL$ を下回る製品の割合を求めよ.

(2) $500mL$ を下回る製品の割合を 0.3% 以下にするためには注入機械の精度である標準偏差 σ をどれくらいにする必要があるか答えよ.

付表 1　正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 $(z \to Q(z))$

z	$Q(z)$
0.50	0.3875
0.75	0.2266
1.00	0.1587
1.25	0.1057
1.50	0.0668
1.75	0.0401
2.00	0.0228
2.25	0.0122
2.50	0.0062
2.75	0.0030
3.00	0.0013



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190603)

0.163　逆正接関数（$\tan x$ の逆関数）Arctan x の Taylor 展開をもとに，以下のようにして $\dfrac{\pi}{4}$ の近似を与えよ．ただし，Arctan $0 = 0$ とする．

(1)　$|x| < 1$ のとき
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$
となることをもとに，$x = 0$ における Arctan x の Taylor 展開を求めよ．

(2)　上で求めた Taylor 展開の部分和に $x = 1$ を代入することで Arctan $1 = \dfrac{\pi}{4}$ を近似することを考える．近似の誤差を 0.1 や 0.01 以下にするためには第何項までの和を考える必要があるかを論じよ．また，誤差を 0.1 以下とする場合にはどのような近似値が得られるかを実際に述べよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190604)

0.164　n 次行列式
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$
を計算し，x の整式の形で表せ,

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190605)

0.165　次の行列 A を考える．
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$T(x) = Ax$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 T の像と核それぞれについて，一組の基底と次元を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190606)

0.166　n 次正方行列 A, B, C について，A と B が正則ならば，ABC, BCA, および，CAB の固有多項式が一致することを示せ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190607)

0.167 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \ \boldsymbol{r}/2$ で定義する．このとき，$\bigtriangledown \times \ \boldsymbol{A}$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190608)

0.168 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

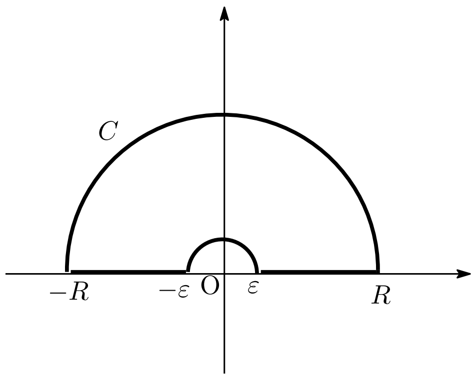
を計算することにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190609)

0.169

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより，$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ．



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.170 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で $f(x) = |x|$ の周期 2π の周期関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190611)

0.171 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．i は虚数単位である．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190612)

0.172 $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \cdots) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする．

(1) f が区間 $[0, 1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ．

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\sup_{\frac{k-1}{2^n}\le x\le\frac{k}{2^n}} g(x)$$
を求めよ.

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200601)

0.173 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ とする. A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(お茶の水女子大 2020) (m20200602)

0.174 次の行列の行列式を計算し, それが 0 となる x の値をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix}1 & \omega & 1 & x\\ \omega & 1 & 2 & x^2\\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3\\ 1 & \omega & 8 & x^4\end{pmatrix}$$

ただし, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である.

(お茶の水女子大 2020) (m20200603)

0.175 t を実数として, 4 つの $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ t\\ 1\\ 3\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad v_1'=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad v_2'=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

をとる. V を v_1, v_2 で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間, V' を v_1', v_2' で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間とする. さらに V と V' の和空間 $V+V'$ が $\mathbb{R}^4$ と異なるとする.

(i) t の値を求めよ.

(ii) $V+V'$ の基底を一組求めよ.

(iii) $V\cap V'$ の基底を一組求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200604)

0.176 次の式で定義される実対称行列 A を考える.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200605)

0.177 次の積分を計算せよ. (ただし, n は正の整数)

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$

(お茶の水女子大 2020) (m20200606)

0.178 関数 $y(x) = e^{-a^2x^2}$ が微分方程式 $d^2y(x)/dx^2 - x^2y(x) = by(x)$ の解になるように定数 a と b を定めよ。

(お茶の水女子大 2020) (m20200607)

0.179 連立微分方程式 $dy(x)/dx = cz(x)$, $dz(x)/dx = cy(x)$ の解を初期条件 $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ の下で求めよ．(ただし，c は定数)

(お茶の水女子大 2020) (m20200608)

0.180 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する．

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで，$f(x)$ は何回でも微分可能であるとする．このとき，$g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ．

(お茶の水女子大 2020) (m20200609)

0.181 以下の各問いに答えよ．ただし，log はすべて自然対数とする．

(1) $f(x) = \log(1-x)$ $(|x| < 1)$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，剰余項の評価はしなくてもよい．

(2) $0 < x < 1$ において $\dfrac{x}{x-1} < \log(1-x)$ であることを示せ．

(3) $\log 2019$ の値の 10 進小数第 2 位を四捨五入することにより小数第 1 位まで求めよ．ただし，必要ならば $\log 2 = 0.693147$ の近似値を用いてよい．

(お茶の水女子大 2020) (m20200610)

0.182 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ．

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020) (m20200611)

0.183 (1) $t = x + \sqrt{x^2-1}$ のとき，$\dfrac{dt}{dx}$ を求めよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を，上記 (1) のように $t = x + \sqrt{x^2-1}$ とおいて，t の関数の積分に置換せよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2020) (m20200612)

0.184 以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x - 2^x}{x}$

(お茶の水女子大 2020) (m20200613)

0.185 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

(お茶の水女子大 2020) (m20200614)

0.186 次の各問いに答えよ．

(1) V をベクトル和 $+$ とスカラー倍・を持つ係数体 F 上のベクトル空間とする． これを $(V,+,\cdot)$ と表す． $W\subset V$ である W に対して $(W,+,\cdot)$ が係数体 F 上の部分ベクトル空間となるための条件を述べよ．

(2) 以下の各集合が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の標準的な和とスカラー倍に関して部分ベクトル空間となるか否かについて，部分ベクトル空間になる場合にはなることを示し，またならない場合にはその理由を述べよ．

(a) $w_1=\left\{(x_1,x_2,0)\;\middle|\;x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$

(b) $w_2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R},\ x_1^2+x_2^2=x_3^2\right\}$

(c) $w_3=\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R},\ x_1+x_2=x_3\right\}$

(お茶の水女子大 2020) (m20200615)

0.187 行列 $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えよ．

(1) 行列式 $\det(M)$ を求めよ．

(2) 行列 M は可逆か否かを述べ，可逆ならばその逆行列 M^{-1} を求めよ．

(お茶の水女子大 2020) (m20200616)

0.188 行列 $\begin{pmatrix}1&-1&-3\\1&1&-1\\-1&1&5\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(お茶の水女子大 2020) (m20200617)

0.189 ある健康改善プログラムの参加者の最高血圧 (mmHg) は， 実施前の測定において平均値 $\mu=125.0$, 標準偏差 $\sigma=10.0$ の正規分布に従うことがわかっている． このプログラムでは，最高血圧の目標値を 130.0 (mmHg) と設定している． 以下の (a) と (b) に答えよ． 必要であれば付表 1 を利用せよ．（※付表 1 は標準正規分布表）

(a) 参加者のうち， 実施前に目標値を超過している人の割合を求めよ．

(b) プログラム実施後に最高血圧を測定したところ， 目標値を超過する人の割合が 5% 以下になった． このとき，最高血圧の平均値はいくら未満であるか求めよ． ただし，プログラム実施後の最高血圧も正規分布に従い， 標準偏差は変わらず $\sigma=10.0$ とする．

(お茶の水女子大 2020) (m20200618)

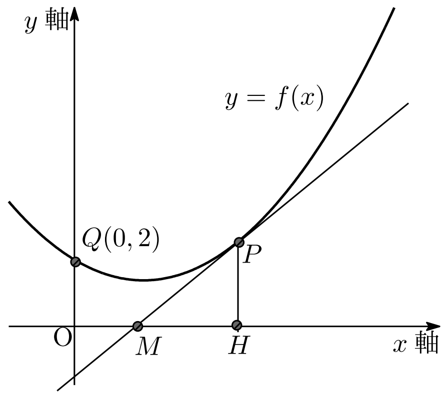
0.190 以下の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=2x-2$

(2) $xydy-(3x^2+y^2)dx=0$

(お茶の水女子大 2021) (m20210601)

0.191 ある曲線 $y=f(x)$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を点 M，点 P から x 軸に垂直に下した点を点 H とする．線分 MH の長さが一定に値 k となった．点 $Q(0,2)$ を通るこの曲線の式を求めよ．



(お茶の水女子大 2021)　(m20210602)

0.192 あるサイコロを振ったところ, 出た目は次の通りであった．カイ 2 乗検定を行い，有意水準 5 %でこのサイコロが公平なサイコロと言えるかどうかを確かめよ．なお，カイ 2 乗分布表より $\chi_5^2(0.05)$ 値は 11.070 である.

目	1	2	3	4	5	6
回数	20	12	9	16	11	22

(お茶の水女子大 2021)　(m20210603)

0.193 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ.

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　(m20210604)

0.194 次の行列 A について, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a, b, c, d の値を求めよ.

(2) a, b, c, d が (1) の値のときの $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f を a, b, c, d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし，g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で，像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする．このとき，g と f との合成写像 $f \circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え, その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ.

(お茶の水女子大 2021)　(m20210605)

0.195 関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し, 0 でない最初の 3 項を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　(m20210606)

0.196 極座標に関する以下の各問に答えよ.

(1) 極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

0.197 $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & 5 \\ -6 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ の三つの行列に対し，以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(C)$ を求めよ.

(2) A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} が存在するならばそれを求め，存在しないならばその理由を示せ.

(3) B^n を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210608)

0.198 $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - 2c + d \\ a - b - 5c - 2d \end{pmatrix}$ の核 ($\mathrm{Ker}f$) と像 ($\mathrm{Im}f$) の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210609)

0.199 $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき，次の不定積分を求めよ.

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210610)

0.200 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $ydx - x^4 dy = 0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^4 y^3$

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220601)

0.201 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 1$ はどのような図形に変換されるか，図形の方程式を示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220602)

0.202 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ.

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく.

$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ.

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して

$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし,

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} h(x)$ もみたすと仮定する.

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする．
このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい．）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.203　以下の問いに答えよ．ただし，行列はすべて複素行列とする．

(1) X をベクトル空間，U, V, W を X の部分ベクトル空間とする．W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき，W は U に含まれるか，V に含まれるかのどちらかであることを示せ．

(2) A を 3 次正方行列で，$A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする．ただし, O は零行列とする．A の階数を求めよ．

(3) 次の行列 A を考える．ただし，a は複素数とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(b) $a \neq 0$ のとき，A は対角化可能でないことを示せ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220604)

0.204　実変数 x, y の関数 $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^4 + y^4) - xy$ の最小値と最小値を与える点 (x_0, y_0) を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220605)

0.205　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220606)

0.206　実 3 次元空間の任意の点を (x, y, z) と表すとき，ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 $(\mathrm{div}\vec{V})$ と回転 $(\mathrm{rot}\vec{V})$，及び $|\vec{V}|$ の勾配 $(\mathrm{grad}|\vec{V}|)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220607)

0.207　任意の行列 A に対してそのエルミート共役を $A^\dagger$ と表す．

(1) 行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) の行列 A に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220608)

0.208　区間 $-a \leq x \leq a$ で定義される微分方程式 $d^2 f(x)/dx^2 + k^2 f(x) = 0 \quad (k > 0)$ を考える．ただし，$a > 0$ である．

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ．

(2) 解 $f(x)$ が境界条件 $f(-a) = f(a) = 0$ を満足するとき，k の最小値を求めよ

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220609)