[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：埼玉大

0.1 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.2 (1) n 次正方行列 A について，A の固有値，固有ベクトルの定義を述べよ．

(2) B は３行３列の行列で，次の (a)(b)(c) を満たしている．

(a) B の固有値は１と２である．

(b) B の１に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる．

(c) B の２に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる．

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 B を求めよ．

(埼玉大 1998)　　(m19981402)

0.3 次の極限を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\sqrt{-\log x}$

(埼玉大 1999)　　(m19991401)

0.4 $a,b,c>0$ とする．

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

をみたす (x,y,z) の組で

$$w=x+y+z$$

が極値をとる (x,y,z) を求めよ．

(埼玉大 1999)　　(m19991402)

0.5 a を正の実数とし，次の不等式で定義された領域を D であらわす．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}\,,\qquad x\ge 0\,,\ y\ge 0$$

このとき，次の値を求めよ．

$$\iint_D dxdy\ ,\qquad \iint_D x\,dxdy$$

(埼玉大 1999)　　(m19991403)

0.6 同じ係数を持つ３つの連立方程式

(1) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=3 \end{cases}$

において，(1) の解は $x=2,\ y=1,\ z=-2,$ (2) の解は $x=-1,\ y=2,\ z=4,$ (3) の解は $x=-3,\ y=0,\ z=5$ であるという．このとき，$a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3,\ c_3$ を定めよ．

(埼玉大 1999)　　(m19991404)

0.7 A を $m \times n$ の実行列とする． $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(i)}$$

を考える．

(1) 方程式 (i) の解全体は， $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間をなすことを示せ．

(2) (1) の線形部分空間の次元と，A の階数 (rank A) の関係式を記せ.（証明不要）

(3) B も $m \times n$ の実行列とし，一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(ii)}$$

を考える．rank$A$+rank$B < n$ が成り立つとき，方程式 (i) と方程式 (ii) に $\mathbf{o}$ 以外の共有解が存在することを示せ．

(埼玉大 1999） (m19991405)

0.8 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2a\cos x - 2b\sin x}$$

を考える．ただし，a, b は正の定数とする．

(1) $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(2) 関係式

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \\ \\ b = 1 + \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

があるとき，積 Mm の最大値を求めよ．

(埼玉大 2000) (m20001401)

0.9 $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ とする．

(1) 正数 R に対し，次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} f(x, y)dx \right) dy \leqq \int_0^R \left(\int_0^R f(x, y)dx \right) dy \leqq \int_0^{\sqrt{2}R} \left(\int_0^{\sqrt{2R^2 - y^2}} f(x, y)dx \right) dy$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^R f(x, y)dx \right) dy$ の値を求めよ．

(埼玉大 2000) (m20001402)

0.10 ３つの空間ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次従属（線形従属）であるような a を求めよ．

(埼玉大 2000) (m20001403)

0.11 実数を成分とする m 行 n 列の行列 A の第 i 行第 j 列成分を a_{ij} で表す．

(1) A の転置行列を ${}^tA$ とするとき，行列の積 ${}^tAA$ の第 i 行第 j 列成分を求めよ．

(2) ${}^tAA$ の対角成分のすべての和が 0 であるとき，もとの行列 A はどんな行列か決定せよ．

(埼玉大 2000)　　(m20001404)

0.12 次の関数の導関数を求めさない．

(1) $y = \sin^{-1} x$ ($y = \arcsin x$ を意味する)

(2) $y = x^{\sin x}$

（埼玉大 2001）　　(m20011401)

0.13 周の長さ l が一定の扇形のうちで，面積が最大になる場合の中心角 x を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011402)

0.14 $y = \tan^{-1} x^2$ について，次の問に答えよ．

(1) グラフの概形を描け．

(2) $x = 0$ における 2 次の微分係数 $y''(0)$ を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011403)

0.15 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

(2) $\displaystyle\int (2x + 1) \ln x dx$

（埼玉大 2001）　　(m20011404)

0.16 (1) 次の等式を満たす実数 a, b, c, d を求めよ．　$\displaystyle\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{ax + b}{x^2 - 2x + 2} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4}$ を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011405)

0.17 次のベクトルについて，以下の問に答えよ．

$$\overrightarrow{PA} = \boldsymbol{a} = (2, 1, 1), \quad \overrightarrow{PB} = \boldsymbol{b} = (1, 2, 1), \quad \overrightarrow{PC} = \boldsymbol{c} = (1, 1, 2)$$

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めなさい．　　(2) $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ を求めなさい．

(2) PA, PB, PC で張られた平行六面体の体積を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011406)

0.18 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rank}\ A = 3$ となる a の実数値を求めなさい．

(2) $a = 2$ のとき，A の行列式を求めなさい．

(3) $a = 1$ のとき，A の逆行列を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011407)

0.19 次の 4 つの行列 A, B, C, D を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A,\ B,\ AB$ の行列式を求めよ.

(2) 行列 $C + D$ の階数を求めよ.

（埼玉大 2001） (m20011408)

0.20 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考え，$a_i = f(e_i) \quad (1 \leq i \leq 3)$ とおく.

このとき，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ.

(1) ベクトル a_1, a_2, a_3 は一次独立である.

(2) f は逆写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をもつ.

（埼玉大 2001） (m20011409)

0.21 実数 θ に対して $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x| < 1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}: \sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.22 n は自然数とする．正の定数 a に対して

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\ ,\ y \geq 0\right\}$$

とおく．このとき $\displaystyle\iint_D x^n y\, dxdy$ を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021402)

0.23 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する.

次の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ が成り立つことを証明せよ.

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021403)

0.24 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする．ただし，$n \geq 2$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$A = LU$ となる下三角行列 L，上三角行列 U は存在しないことを証明せよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021404)

0.25 次の関数を微分しなさい．　$\mathrm{sech}^{-1} x$　　$(0 < x < 1)$

(埼玉大 2003)　　(m20031401)

0.26 実数 α に対し，　$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$　とおく．

(1)　$\alpha > 1$ のとき，$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ．

(2)　$\alpha \leq 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3)　$\alpha > 1$ のとき，$f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ．

(埼玉大 2003)　　(m20031402)

0.27 曲線　$y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$　$(0 \leqq x \leqq 1)$　の長さ L を求めなさい．

(埼玉大 2003)　　(m20031403)

0.28 $a > 0$ とするとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$ を求めよ．

(埼玉大 2003)　　(m20031404)

0.29 $\cos 46^\circ$ の近似値を有効数字 3 桁の範囲において求めなさい．ただし，$\dfrac{\pi}{180} = 0.01745\cdots$，$\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(埼玉大 2003)　　(m20031405)

0.30 以下の問いに答えなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$D = \dfrac{d}{dt}$ である．

(1)　次の 1 階微分方程式の一般解を求めなさい．　$2xyy' = x^2 + y^2$

(2)　次の 2 階微分方程式の一般解を求めなさい．　$y'' - 7y' + 10y = 6x + 8e^{2x}$

(3)　次の連立微分方程式の一般解を求めなさい．　$\begin{cases} Dx = 4x - y \\ Dy = x + 2y \end{cases}$

(埼玉大 2003)　　(m20031406)

0.31 E を 3 次単位行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく．整数 $n \geq 1$ に対し，$A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ．

(埼玉大 2003)　　(m20031407)

0.32 実数 a,b,c,d が

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

を満たすための必要十分条件は $a+2b+3c+4d=0$ であることを示せ.

(埼玉大 2003)　　(m20031408)

0.33 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(2) 次の連立 1 次方程式の解 x,y,z を (1) の結果を用いて求めなさい.

$$\begin{cases} -x-y-z=3 \\ 4x-3y-4z=2 \\ -4x+y+2z=2 \end{cases}$$

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(埼玉大 2003)　　(m20031409)

0.34 (1) 次の関数を微分せよ.

$$\left[\ \sin^{-1}(2x)\ \right]^3 \qquad \left(\ |x| < \frac{1}{2}\ \right)$$

ただし, $\sin^{-1}()$ は逆正弦関数の主値をとるものとする.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^{2x}}{(a+b)x} \qquad (a>0\,,\ b>0\,,\ a \neq b)$$

(埼玉大 2004)　　(m20041401)

0.35 $f(x) = \dfrac{3e^{2x}+4\sin x}{2e^{2x}+e^{-x}}$ とおく.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ を求めよ.

(埼玉大 2004)　　(m20041402)

0.36 次の積分を求めよ.

$$\int \frac{x+1}{(2x^2+4x-7)^n} dx$$

(埼玉大 2004)　　(m20041403)

0.37 $f(x,y)$ は何回でも偏微分できる関数で，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ とする．$f(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とするとき，$\dfrac{d\varphi}{dx}$, $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ を f の偏導関数を用いて表せ.

(埼玉大 2004)　　(m20041404)

0.38 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(1) $y''-y'-2y=2x^2-6x$

(2) $x^3yy' = y^2+1$

(3)　$(y + xy')xy = x^2 + 2$

(埼玉大 2004)　　(m20041405)

0.39　$\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　を考える.

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ.

(2)　ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合（線形結合）として表せ.

（埼玉大 2004）　　(m20041406)

0.40　a, b, c, d は実数とする.

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となるための a, b の条件を求めよ.

(2)　行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & c \\ d & 1 & d & 1 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための c, d の条件を求めよ.

（埼玉大 2004）　　(m20041407)

0.41　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　A の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2)　(1) で求めた固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3)　$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ としたとき, $AP = PB$ となる a, b を定めよ.

(4)　(3) の関係を用いて A^n を求めよ．ただし, n は自然数とする.

(埼玉大 2004)　　(m20041408)

0.42　次の数列 $\{a_n\}$ は, ある有限の値に収束することを示せ.

$$a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

(埼玉大 2005)　　(m20051401)

0.43　(1)　次の行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2)　行列 A を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 P を求めてから A を対角化せよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051402)

0.44　次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(1)　$2x^2y' = x^2 + y^2$

(2)　$y'' + 2\varepsilon y' + {\omega_0}^2 y = F \sin \omega x$　　　（ただし, $\varepsilon \neq 0$, ${\omega_0}^2 > \varepsilon^2$）

(埼玉大 2005)　　(m20051403)

0.45 行列 $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式が 0 となるような実数 a の値を求めよ.

(2) 行列 A が直交行列となるような実数 a の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051404)

0.46 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(2) 行列 A を対角化して得られる行列を書け（結果だけでよい）.

(3) 行列 A^3 のトレースを求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051405)

0.47 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする. ただし, $\tan^{-1}$ は正接関数 tan の定義域を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.
また, $D = \{(x,y) \in \Omega \mid 2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051406)

0.48 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

すべての自然数 n に対して $a_n \geqq 0$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ である.

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0,\infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005) (m20051407)

0.49 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$ (2) $y = \sqrt{1+\cos x}$

(3) $y = x^e e^x \quad (x > 0)$ (4) $y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(埼玉大 2006) (m20061401)

0.50 (1) $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x,\ \cos x$ および $\dfrac{dt}{dx}$ を t の式で表せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061402)

0.51 (1) 変数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2$ の間に，$x_1 = 3y_1 + y_2 + 2y_3$，$x_2 = -y_1 + 2y_3$, $y_1 = 3z_1 - 2z_2$，$y_2 = az_2$, $y_3 = z_1 + 4z_2$ の関係があるとき，x_1，x_2 を z_1，z_2 で表す式を求め，さらに，任意の z_1，z_2 において，$x_1 = kx_2$ となるための定数 a および k を求めよ．ただし，$k \neq 0$ とする．

(2) 次の行列式を求めよ． $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

(埼玉大 2006) (m20061403)

0.52 関数 $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ に関連した以下の問に答えよ．ただし，$\boldsymbol{M}^T$ は，行列 $\boldsymbol{M}$ の転置を表すものとする．

(1) f は，列行列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 及び，対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表す事が出来る．対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値，および固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．ただし，固有ベクトル（列ベクトル）は，大きさが 1 となるように規格化せよ．

(3) $(x_1, x_2, x_3)^T = y_1\boldsymbol{p}_1 + y_2\boldsymbol{p}_2 + y_3\boldsymbol{p}_3 = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)(y_1,\ y_2,\ y_3)^T$ の関係を用いて，関数 f を変数 y_1, y_2, y_3 で表せ．ただし，$(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ は $3\times\ 3$ の正方行列の各列が，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{p}_3$ で表される行列であることを表す．

(埼玉大 2006) (m20061404)

0.53 次の微分方程式を解け．

(1) $x(x-y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ (2) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2\sin x$

(埼玉大 2006) (m20061405)

0.54 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$ により定義する．

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1),\ T(\boldsymbol{a}_2),\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061406)

0.55 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ． (2) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061407)

0.56 n を自然数とし、$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく．

(1) I_2 を求めよ． (2) $n \geqq 3$ のとき，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ を示せ．

(埼玉大 2006) (m20061408)

0.57 $f(x, y) = x^2 - x\sin y - \cos^2 y$ とする．

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求めよ．

(2) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) をすべて求めよ．

(3) f の極値を求めよ．

(埼玉大 2006) (m20061409)

0.58 (1) 関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} {}_\alpha\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_\alpha\mathrm{C}_i$ は次式で表される. ${}_\alpha\mathrm{C}_i = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \quad (i \geq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007) (m20071401)

0.59 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(埼玉大 2007) (m20071402)

0.60 行列式 $f(x)$ について考える. $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 5 & 10 \\ -1 & x+4 & 10 \\ -5 & 6 & x-6 \end{vmatrix}$

(1) 行列式 $f(x)$ を求めよ. (2) 行列式 $f(x)$ が 0 となる時，x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071403)

0.61 行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる.

$A = R + S$, ただし，$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする．このとき，R および S を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071404)

0.62 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071405)

0.63 次の微分方程式を解け.

(1) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x + \cot^2 x = 0$

(埼玉大 2007) (m20071406)

0.64 次の連立微分方程式を解け.

$$\frac{dx}{dt} - x + 2y = e^t$$

$$3x + \frac{dy}{dt} - 2y = 1$$

(埼玉大 2007) (m20071407)

0.65 a, b を実数とし, 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 積 AB が単位行列になるような a, b の組をすべて求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071408)

0.66 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071409)

0.67 (1) 次の等式を示せ。

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t} \qquad (t \neq -1)$$

(2) 上式を利用して, 次の式を示せ.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) \qquad (x > -1)$$

ただし, $R_n(x) = (-1)^n\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ とする.

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(4) $-1 < x < 0$ のとき $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示せ.

(埼玉大 2007) (m20071410)

0.68 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする．

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ を計算せよ．

(埼玉大 2007) (m20071411)

0.69 以下の関数を微分せよ．

(1) $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ （a は 0 ではない定数） (2) $y=x^x$

(埼玉大 2008) (m20081401)

0.70 以下の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x(x-1)^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid y \leqq\ 2x,\ x\leqq\ 2y,\ x+y\leqq\ 6\}$

(埼玉大 2008) (m20081402)

0.71 (1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ． $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列を求めよ． $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式を求めよ．ただし，解答は因数分解した形で表せ． $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008) (m20081403)

0.72 以下の微分方程式を解け．

(1) $(x^2+2xy)dx+(x^2-y^2)dy=0$ (2) $2x\dfrac{dy}{dx}-y=-xy^3$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=10\cos x$ (4) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+4y=x$

(埼玉大 2008) (m20081404)

0.73 ベクトルの列 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\cdots$ を次のように定める．

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) n が奇数のとき $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_n \\ x_n \end{pmatrix}$

(3) n が偶数のとき $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_n+y_n \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

自然数 k に対して，$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(埼玉大 2008) (m20081405)

0.74 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである．

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.75 n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n \, dx$ の値を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081407)

0.76 関数 $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ を計算し，$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる (x, y) をすべて求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(埼玉大 2008)　　(m20081408)

0.77 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい．

(3) 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$，$x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.78 (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 f は，点 $(1, 2)$ を点 $(0, 3)$ に，点 $(2, 0)$ を点 $(4, 2)$ に移す．このとき，以下の問いに答えなさい．

(a) 一次変換 f を表す行列を求めなさい．

(b) 一次変換 f によって，$y = x - 1$ は，どのような図形に移されるか．

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，一次従属か一次独立か調べなさい．

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい.

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091402)

0.79 以下の微分方程式の解を求めなさい．ただし，c は実定数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2}$

(3) $e^y dx + xe^y dy = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + cy = 0$

(埼玉大 2009)　　(m20091403)

0.80 次の行列の行列式の値が 0 となるような x を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ -x & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2009)　　(m20091404)

0.81 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．ただし，θ は $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数とする.

次の条件 (a),(b),(c) をすべて満たすような α_1 , α_2 , $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ の組を 1 つ求めよ.

(a) α_1 , α_2 は相異なる複素数である.

(b) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルではなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(c) $A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{p}_1$ かつ $A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{p}_2$ を満たす.

(2) B を 2 次の実正方行列とし，B のどの固有値も実数でないと仮定する.

(i) 次の (d),(e),(f) をすべて満たすような β_1 , β_2 , $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の組が存在することを示せ.

(d) 正の実数 r と，$0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$ を満たす実数 θ を用いて，$\beta_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ と表される.

(e) $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ は複素数を成分とする 2 次元ベクトルで，どちらも零ベクトルでなく，さらに $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)$ と $\dfrac{i}{2}(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)$ はともに実数を成分とするベクトルになる.

(f) $B\boldsymbol{q}_1 = \beta_1 \boldsymbol{q}_1$ かつ $B\boldsymbol{q}_2 = \beta_2 \boldsymbol{q}_2$ を満たす.

(ii) 2 次の実正則行列 M が存在して,

$$M^{-1}BM = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091405)

0.82　$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ とする.

(1)　$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2)　非負整数 n に対し,

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(埼玉大 2009)　　(m20091406)

0.83　n を自然数とし，$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}\right\}$ とおく．α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．次を求めよ.

(1)　$\displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}$ を求めよ.

(2)　(1) の積分値を I_n とおいたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(埼玉大 2009)　　(m20091407)

0.84　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　A の固有値を求めよ.

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101401)

0.85　0 と 1 のみを成分とする 2×3 行列 A で,

$$A\,{}^t\!A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t\!A\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ. ここで, ${}^t\!A$ は A の転置行列を表す.

(埼玉大 2010)　　(m20101402)

0.86　$x > 0$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ を求めよ.

(2)　$F'(x)$ を求めよ. ただし, 等式

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right\}dt$$

が成り立つことを用いてよい.

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x)$ を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101403)

0.87 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^\infty |g(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\le x<\infty} |g(x)| = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 2010) (m20101404)

0.88 (1) つぎの関数を微分せよ.

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$$

(2) つぎの関数の第 n 次導関数を求めよ.

$$y = (x+1)^2 \log(x+1)$$

(埼玉大 2010) (m20101405)

0.89 つぎの積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{11} e^{x^4}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{(x-3)^2(x-2)}\,dx$

(埼玉大 2010) (m20101406)

0.90 (1) つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2) つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2010) (m20101407)

0.91 (1) 以下の微分方程式を解け.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x \dfrac{dy}{dx} - y \sin x = 2\cos x\,\sin x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.
$y''(t)+k^2y(t)=0 \quad (k>0$ の定数$)$

(b) 初期条件 $\quad y(0)=A_0\,,\ y'(0)=0\quad$ を満たす解を求めよ.

(埼玉大 2010) (m20101408)

0.92 (1) 次の関数を微分せよ.

$$y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$$

(2) 次の関数について $\dfrac{dz}{dt}$ を t の関数で表せ.

$$z=x^2+2y\ ,\quad x=\sin t\ ,\quad y=5\cos t$$

(埼玉大 2011) (m20111401)

0.93 次の不定積分を求めよ.

$$\int\left(2x^2\tan^{-1}2x\right)dx$$

(埼玉大 2011) (m20111402)

0.94 次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy\ ,\quad (\ D=\{\ (x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+3y\leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大 2011) (m20111403)

0.95 次の連立一次方程式について考える.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 0\\ 2x-y+5z &=& 3\\ x+5y-4z &=& -3\end{array}\right.$$

(1) 上の連立方程式の係数行列を $\boldsymbol{A}$ とするとき, $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=3$ となることを示せ.

(2) クラメールの公式を使って x,y,z を求めよ.

(埼玉大 2011) (m20111404)

0.96 次のベクトルについて考える.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}x\\5\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}$$

(1) 外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積が 50 のとき, z を求めよ.

(埼玉大 2011) (m20111405)

0.97 以下の微分方程式を解け.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-2x^2y=y$

(2) $4y^2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=4$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+8y=0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+9y=\sin 3x$

(埼玉大 2011) (m20111406)

0.98 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，行列 A^n を計算せよ.

(埼玉大 2011)　　(m20111407)

0.99 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \bigl(T(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\bigr)$ を考える.

(1) 写像 T の像 $\mathrm{Im}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(2) 写像 T の核 $\mathrm{Ker}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(埼玉大 2011)　　(m20111408)

0.100 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x, y)$ は，正値で 2 階微分可能であり，

$$f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x, y) = \log f(x, y)$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ.

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.101 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において} \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.102 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos(\sin x)$　　(2) $y = x^{\sin^{-1} x} \quad (0 < x < 1)$

(埼玉大 2012)　　(m20121401)

0.103 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx \qquad (m, n \text{ は自然数})$$

(埼玉大 2012)　　(m20121402)

0.104 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{x+y} dxdy$$

ただし，直線 $y = x$, $x = 1$, $y = 0$ で囲まれた領域を D とする．

(埼玉大 2012)　　(m20121403)

0.105 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 固有値 λ_1, λ_2 と，それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を一組求めよ．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を並べて作った行列を $P = [\, \boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \,]$ としたとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

(埼玉大 2012)　　(m20121404)

0.106 次の行列式を求めよ．ただし，解答は因数分解した形で表せ．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(埼玉大 2012)　　(m20121405)

0.107 (1) 以下の微分方程式を解け．

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 6e^{-x}$

(2) 室温が 20 ℃ の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は，時刻 t[分] におけるコーヒーの温度 $T(t)$[℃] と室温の差に比例する．

(a) このときの比例係数を $-k(k > 0)$ とし，時間 t と温度 $T(t)$ の関係を微分方程式を用いて表せ．

(b) $t = 0$ で 100 ℃ だったコーヒーが，3 分後に 60 ℃ になったとするとき，40 ℃ になるまでの時間を求めよ．

(埼玉大 2012)　　(m20121406)

0.108 次の関数を微分せよ．

$y = \tan(\log x) \quad (x > 0)$

(埼玉大 2013)　　(m20131401)

0.109 次の関数の偏導関数 $\partial f \,/\, \partial x$, $\partial f \,/\, \partial y$ を求めよ．

$f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$

(埼玉大 2013)　　(m20131402)

0.110 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

(埼玉大 2013)　　(m20131403)

0.111 次の 2 重積分を求めよ．ただし，$x \geq 0$，$\sqrt{x} \geq y \geq x$ で囲まれた領域を D とする．

$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy \qquad D : x \geq 0,\ \sqrt{x} \geq y \geq x$ 　(埼玉大 2013)　(m20131404)

0.112 行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ b & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $-1, 1, 3$ となる a と b の値を求めよ．ただし，$a > b > 0$ とする．

(2) 固有値が $-1, 1, 3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ は単位ベクトルとする．

(3) 固有ベクトルからなる行列 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{V}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(埼玉大 2013)　(m20131405)

0.113 原点を通る 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について以下の問いに答えよ．

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルを 1 つ求めよ．

(埼玉大 2013)　(m20131406)

0.114 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = 3y$

(2) $\dfrac{(x^2-y^2)}{2}\dfrac{dy}{dx} = xy$

(3) $\dfrac{dy}{dx}e^x - x + ye^x = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0$

(埼玉大 2013)　(m20131407)

0.115 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ．

(3) $A^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(埼玉大 2013)　(m20131408)

0.116 a, b は実数とし

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 3 & a+1 \\ a+3 & a+5 & 5 & a+3 \\ b & b+2 & a+1 & 7 \end{pmatrix}$$

とする．写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax \ (x \in \mathbb{R}^4)$ により定める．このとき，f が全射でないような組 (a, b) をすべて求めよ．

(埼玉大 2013)　(m20131409)

0.117 $-1 < x < 1$ に対し，$t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) x を t の式で表し，さらに，導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ．

(2) 不定積分

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を t の不定積分で表せ．

(3) 広義積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$$

を求めよ．

(埼玉大 2013) (m20131410)

0.118 a, b を正の定数とし，$f(x,y) = a(x^2+y^2) - b(x-y)^4$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を計算し，$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値とそれを与える点を求めよ．

(埼玉大 2013) (m20131411)

0.119 直交座標系の座標軸 O-xyz を，原点を固定して回転した座標軸を O-XYZ とする． 直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ，新座標系の正規直交形で

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ と表されたとき，以下の設問に答えよ．

(1) 旧座標系で表された点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ の新座標系での座標を求めよ．

(2) 新座標系で $(0,4,2)$ と表される点の旧座標系での座標を求めよ．

(埼玉大 2014) (m20141401)

0.120 3 つのベクトルが，$\boldsymbol{a} = (1,1,1)$，$\boldsymbol{b} = (3,2,1)$，$\boldsymbol{c} = (1,0,0)$ であるとき，

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(埼玉大 2014) (m20141402)

0.121 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$，$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$

を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$ とする．

(埼玉大 2014)　　(m20141403)

0.122　以下の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}=y-1$　　(2) $x+y\dfrac{dy}{dx}=2y$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=e^{3x}$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=\sin x$

(埼玉大 2014)　　(m20141404)

0.123　a,b を実数とし，次の連立 1 次方程式を考える．

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & az & = & 9 \\ -3x & - & 5y & + & 4z & = & b \end{array}\right.$$

(1)　連立 1 次方程式 $(*)$ が解を持つ条件を a,b を用いて述べよ．

(2)　連立 1 次方程式 $(*)$ が解を無限個持つような a,b に対して，その一般解を求めよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141405)

0.124　(1)　3 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め，さらに，それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

(2)　次の主張は正しいか，それとも誤りか，正しければ証明し，誤りならば反例を挙げよ．
(主張)「 2 次実正方行列 B が相異なる実数の固有値 α,β を持つならば，ある実正則行列 P が存在し，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる．」

(埼玉大 2014)　　(m20141406)

0.125　k を 2 以上の自然数とし，$\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y\in\mathbb{R}\big\}$ 上で定義された関数 $f(x,y)=x^x+xy^k$ を考える．

(1)　$f_x=f_y=0$ を満たす点を求めよ．

(2)　$k=2$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ．

(3)　$k=3$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141407)

0.126　$D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2\leqq\ x^2-y^2\ ,\ x\geqq\ 0\big\}$ とする．極座標を用いて，積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

を計算せよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141408)

0.127　次の関数を微分せよ．

$y=\log\Big(\cos e^x\Big)$

(埼玉大 2015)　　(m20151401)

0.128 次の関数の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

$f(x, y) = \cos(xy)\sin y$

(埼玉大 2015)　　(m20151402)

0.129 次の定積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$

(埼玉大 2015)　　(m20151403)

0.130 次の重積分を求めよ．ただし，$0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{x}$ で囲まれる領域を D とする.

$\displaystyle\iint_D (2x+y)\,dxdy$

(埼玉大 2015)　　(m20151404)

0.131 行列 A が次式であたえられるものとして以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151405)

0.132 原点 O と 2 点 $A(1,4,2),\ B(-2,2,3)$ において，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ として以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の成分を求めよ.

(2) 原点 O，点 A および点 B で作られる三角形の面積を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151406)

0.133 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

(2) $x\left(\dfrac{dy}{dx} + \sin x\right) + y = 0$

(3) $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y - x - 3 = 0$

(埼玉大 2015)　　(m20151407)

0.134 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = \tan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$　　(2) $y = x^{(e^{3x})}$

(埼玉大 2016)　　(m20161401)

0.135 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+3}dx$$

(埼玉大 2016)　　(m20161402)

0.136 次の 2 重積分を求めよ．ただし，3 つの直線 $x=0,\ y=2,\ -2x+y=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

(埼玉大 2016)　　(m20161403)

0.137 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(埼玉大 2016)　　(m20161404)

0.138 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする．

(埼玉大 2016)　　(m20161405)

0.139 xyz 空間上のスカラー場 $\varphi=x-\dfrac{2}{3}yz$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \varphi ds$ を求めよ．C は原点 O から $(3,3,3)$ に至る線分とする．

(埼玉大 2016)　　(m20161406)

0.140 以下の微分方程式を解け．

(1) $2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\tan x}$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3e^x$　　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$

(4) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-8\dfrac{d^2y}{dx^2}+16y=x^2$

(埼玉大 2016)　　(m20161407)

0.141 次の関数を x について微分せよ．

(1) $y=\dfrac{\sin 3x}{1+\cos 3x}$　　(2) $y=e^{\frac{x}{\tan x}}$

(埼玉大 2017)　　(m20171401)

0.142 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{-x^2+10}{(x+1)(x-2)^2}dx$

(埼玉大 2017)　　(m20171402)

0.143 次の 2 重積分を求めよ．ただし，放物線 $y=x^2$ と直線 $y-x-2=0$ で囲まれた領域を D とする．

$$\iint_D xydxdy$$

(埼玉大 2017)　　(m20171403)

0.144 以下のベクトルの各組は一次独立か，もしくは一次従属か答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(埼玉大 2017) (m20171404)

0.145 行列 A が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A は対角化可能かどうか判定せよ．可能であれば，対角化せよ.

(埼玉大 2017) (m20171405)

0.146 以下の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2y-x}$ (2) $2xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4x^2$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 4e^x$ (4) $\sin x\dfrac{dy}{dx} - 2y\cos x = 2x\sin^3 x$

(埼玉大 2017) (m20171406)

0.147 次の関数を積分せよ.

(1) $\displaystyle\int e^{kx}x^3 dx$ (ただし，k は，0 でない定数)

(埼玉大 2018) (m20181401)

0.148 次の関数を積分せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{1+y^2} dxdy$

(埼玉大 2018) (m20181402)

0.149 次の関数を微分せよ. $y = \dfrac{x+1}{(x+2)^2(x+3)^3}$

(埼玉大 2018) (m20181403)

0.150 (1) 関数 $x\cos x$，$\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ.

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\Rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$ を求めよ.

(埼玉大 2018) (m20181404)

0.151 行列 A が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $V = [\ \boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{v}_3\ ]$ の逆行列 V^{-1} を求めよ.

(4) $\hat{A} = V^{-1}AV$ を求めよ.

(5) $\hat{A}^n$ を求めよ．ただし，n は任意の自然数 $(1,\ 2,\ \cdots)$ とする.

(6) (5) の結果を利用して A^n を求めよ.

(埼玉大 2018)　　(m20181405)

0.152　以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $1-(\cos x)^2\dfrac{dy}{dx}=0$　　(2) $x\dfrac{dy}{dx}=x^2+y$

(3) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+5xy\dfrac{dy}{dx}+6y^2=0$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+4y=x^3+1$

(埼玉大 2018)　　(m20181406)

0.153　次の関数について以下の問いに答えよ.　$f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1) $f'(x)g(x)=1$ を満たす $g(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)g(x)=1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して，次の漸化式が成り立つことを示せ.

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0 \qquad (n \geqq 1)$$

(埼玉大 2019)　　(m20191401)

0.154　次の関数の x に関する偏導関数 z_x を求めよ.

$z=\log\sqrt{x^2+y^2}$

(埼玉大 2019)　　(m20191402)

0.155　次の不定積分を求めよ.　$I=\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$

(埼玉大 2019)　　(m20191403)

0.156　半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ.

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$ とする.

(埼玉大 2019)　　(m20191404)

0.157　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}x\\5\\3\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次従属となるように x を求めよ.

(埼玉大 2019)　　(m20191405)

0.158　2 つの数列 $x_n,\ y_n$ の間に

$$x_n=x_{n-1}+4y_{n-1}$$

$$y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$$

なる関係がある．ただし，n は自然数とし，$x_0=-2,\ y_0=2$ とする.

(1) $x_1,\ y_1$ を求めよ.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$ とするとき，$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ となることを示せ.

(3) $x_n,\ y_n$ を n を使って表せ.

(埼玉大 2019)　　(m20191406)

0.159 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (2y+1)^2 x e^{-x}$

(2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - 1 = 0$

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}\cos 2x = 0$

(埼玉大 2019)　　(m20191407)

0.160 次の連立方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

(埼玉大 2019)　　(m20191408)