[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：滋賀県立大

0.1 $y=\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ の逆関数 $y=\sinh^{-1}x$ について，次の式を示せ．

$$y=\sinh^{-1}x=\log\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr),\qquad y'=\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(滋賀県立大 2005)　(m20056001)

0.2 (1) 未知関数 $y=f(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y''-2\sqrt{3}y'+3y=0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y''-2\sqrt{3}y'+3y=\sin x$$

の特殊解を求めよ．その結果を使って，一般解を書き下せ．

(滋賀県立大 2005)　(m20056002)

0.3 次の行列が逆行列をもつかどうか判定し，もつ場合はそれを求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\1&0&1&0\\0&3&0&-1\\-2&5&-2&0\end{pmatrix}$$

(滋賀県立大 2005)　(m20056003)

0.4 領域 $D: x^2+y^2<4$ における関数 $z=x^2+2xy+2y^2+2y$ の極値を求めよ．

(滋賀県立大 2005)　(m20056004)

0.5 (1) $y=e^{x^x}\ (=\exp(x^x))$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x)=\tan x$ の逆関数 $f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$ の導関数を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　(m20076001)

0.6 (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式　$y''-2y'-8y=0$　の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式　$y''-2y'-8y=25\cos 3x$　の特殊解を求めよ，その結果をつかって，一般解を書け．

(滋賀県立大 2007)　(m20076002)

0.7 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&-5&4\\2&-5&3\end{pmatrix}$ が正則か否かを行列式の値を計算して判定し，正則であればその逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2007)　(m20076003)

0.8 (1) $x^2+y^2\leqq 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ の値を求めよ，

(滋賀県立大 2007)　(m20076004)

0.9 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ.

(滋賀県立大 2008)　　(m20086001)

0.10 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式　$y'' + y' - 6y = 0$　の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式　$y'' + y' - 6y = \sin x$　の特殊解を求めよ.
（特殊解を $y = A \sin x + B \cos x$ と仮定してよい．A, B は定数である.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

[注；(1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2008)　　(m20086002)

0.11 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.　(滋賀県立大 2008)　　(m20086003)

0.12 原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2008)　　(m20086004)

0.13 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる，$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，x の 7 次の項までを具体的に記述して，それ以上の高次の項は $\cdots$ で省略してよい.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096001)

0.14 次の形の微分方程式を同次形という.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(1) このような同次形の微分方程式は，$u = \dfrac{y}{x}$ とおくことによって，変数が x，未知関数が $u = u(x)$ の微分方程式としたとき，変数分離形になることを示せ.

(2) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$ の解のうち $(x, y) = (2, 3)$ を通るものを求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096002)

0.15 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096003)

0.16 原点を中心とする半径 R の円盤の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分を B とする.

このとき，$\iint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096004)

0.17 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\, y)$ と点 $(x+dx,\, y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.18 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(1) 関数 $f(x) = (1+x)\sin x - x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\sin x - x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010) (m20106002)

0.19 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ が正則行列となるための k に対する条件を求めよ．また, $k = 0$ としたときの A の逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106003)

0.20 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \right\} dx$ の値を計算したい.

(1) $I = \displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy$ となるような D を不等式で表し図示せよ.

(2) 積分の順序を交換して累次積分 I の値を求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106004)

0.21 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ について，次の各式を示せ.

(1)

$$y = \cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ について

$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大 2011) (m20116001)

0.22 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$

の特殊解を求めよ．その結果をつかって，一般解を書き下せ．

(滋賀県立大 2011) (m20116002)

0.23 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような k の値を求めよ．また，$k = 2$ のとき A の逆行列を求めよ．

(滋賀県立大 2011) (m20116003)

0.24 (1) $x^2 + y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(滋賀県立大 2011) (m20116004)

0.25 逆三角関数に関する次の方程式を解け．

$$\cos^{-1} x = 2\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

(滋賀県立大 2012) (m20126001)

0.26 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$

の特殊解を求めよ．

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書け．

[注: (1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2012) (m20126002)

0.27 次の 3 つの方程式を同時に満足する x, y, z が $x = y = z = 0$ 以外にあるように k の値を決めよ．

$$x + 3y - 2z = 0\,, \qquad x + y + (k+5)z = 0\,, \qquad 3x + (k+7)y + 4z = 0$$

(滋賀県立大 2012) (m20126003)

0.28 適当な変数変換を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy\ , \quad 但し，D : 0 \leqq\ x-y \leqq\ x+y \leqq\ 1$$

(滋賀県立大 2012) (m20126004)

0.29 曲線 $C : y = f(x)$ に沿って $0 \leqq\ x \leqq\ a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる．

$$L(C) = \int_0^a \sqrt{1+\Big(f'(x)\Big)^2}\,dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする．

$$C\ :\ y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0 \leqq\ x \leqq\ a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2013) (m20136001)

0.30 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' + y' - 12y = 2\cos x$$

の特殊解を求めよ．（特殊解を $y = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ．

(滋賀県立大 2013) (m20136002)

0.31 (1) 3 点 $A(3,2,1)$, $B(1,2,3)$, $C(5,5,5)$ を通る平面 T と直交するベクトルを求めよ．

(2) T と直交し点 $D(3,5,7)$ を通る直線を求めよ．

(滋賀県立大 2013) (m20136003)

0.32 関数 $z = x^2 + xy + y^2$ のグラフと xy 平面，および円筒 $x^2 + y^2 = R^2$ で囲まれた領域の体積を求めよ．ただし，R は正の実数である．

(滋賀県立大 2013) (m20136004)

0.33 パラメータ t で表された曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2)$$

の長さ $L(C)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2014) (m20146001)

0.34 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 2\cos x$$

の特殊解を求めよ．

（特殊解を $y(x) = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146002)

0.35 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + (a+3)z = 3 \\ x + 3y + a^2 z = -3 \end{cases}$$

を考える．

(1) これが解をもたないように a を定めよ．

(2) これが無限個の解をもつように a を定めよ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146003)

0.36 不等式 $x^2 + y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2014)　　(m20146004)

0.37 (1) $|x|$ が 1 と比べて非常に小さいときに $\sqrt{1+x}$ を最もよく近似する x の 1 次式 $p_1(x)$ を求めよ．

(2) 上の $p_1(x)$ に対して，$x \geqq 0$ のとき $\left|\sqrt{1+x} - p_1(x)\right| \leqq \dfrac{x^2}{8}$ が成り立つことを示せ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156001)

0.38 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + x(y^2 - 1) = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 上の微分方程式の解で $y(0) = -1$ を満たすものを求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156002)

0.39 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ただし，a, b, c, d は実数）に対して，A が正則になるための条件を求め，

A の余因子行列を用いて A^{-1} を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156003)

0.40 D を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ （a, b は正の実数）で与えられる領域とするとき，$x = ar\cos\theta$，$y = br\sin\theta$ とおくことにより，$\iint_D x^2 dxdy$ を求めよ．

(滋賀県立大 2015)　　(m20156004)

0.41 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}x$ について，次を求めよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ の値域は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(滋賀県立大 2016)　　(m20166001)

0.42 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ について　次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．ただし，重複がある場合は，その重複度も答えよ．

(2) A の固有ベクトルを求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166002)

0.43 $f(x,y)=x^3+8y^3+12xy$ の極値とそれを与える (x,y) を求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166003)

0.44 未知関数 $y=y(x)$ に対する微分方程式：$y''+4y=e^{3x}$ の一般解を求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166004)

0.45 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\tan^{-1}(3x)-\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．ただし，$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216001)

0.46 関数 $f(x,y)=\cos^{-1}\bigl(x^2+3y^3\bigr)$ について，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216002)

0.47 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx$ を求めよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216003)

0.48 行列 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ は対角化可能である．対角化のための正則行列 P を求めて，A を対角化せよ．

(滋賀県立大 2021)　　(m20216004)

0.49 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^{\tan x}$ を求めよ．

(滋賀県立大 2022)　　(m20226001)

0.50 $D=\bigl\{(x,y)\ \big|\ x^2+y^2\leqq 2x\bigr\}$ とするとき，次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D x^2dxdy$$

(滋賀県立大 2022)　　(m20226002)

0.51 1 次変換：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による直線 $y=3x-2$ の像の方程式を求めよ．

(滋賀県立大 2022)　　(m20226003)

0.52 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(滋賀県立大 2022)　　(m20226004)