[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：信州大

0.1 関数 $f(x) = e^x \sin(x+\alpha)$ の第 n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x+\alpha+\frac{n\pi}{4})$$

であることを証明せよ．

(信州大 1998)　(m19981901)

0.2 自然数 n に対して， $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$ とする．このとき， $n \neq m$ に対し，次が成立することを証明せよ．

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$$

(信州大 1998)　(m19981902)

0.3 円周 $x^2+y^2=1$ ，直線 $y=x$ 及び y 軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を D とする．次の 2 重積分を計算せよ．

$$\iint_D x^3 y\,dx\,dy$$

(信州大 1998)　(m19981903)

0.4 (1) 次の行列式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} {a_1}^2 & a_1 & 1 \\ {a_2}^2 & a_2 & 1 \\ {a_3}^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 1 直線上にない平面上の 3 点 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) の x 座標が相異なるとき，この 3 点を通る放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ は存在し，ただ 1 つであることを証明せよ．

(信州大 1998)　(m19981904)

0.5 次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x+y+3z+5w=3 \\ x+2y-9z-2w=6 \\ 3x+y+8z+9w=3 \\ 7x+5y \quad +13w=15 \end{cases}$$

(信州大 1998)　(m19981905)

0.6 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(信州大 1998)　(m19981906)

0.7 $\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数で区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に値をとるとする．このとき

(1) $(\tan^{-1}x)'$ を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\tan^{-1}(\cos t)$ を求めよ．

(3) $\tan^{-1}(\cos t)$ の導関数の $t = \dfrac{\pi}{2}$ における値を求めよ．

(信州大 1999)　(m19991901)

0.8 次の関数の極値を求めよ. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

(信州大 1999) (m19991902)

0.9 極座標に変換することによって，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_{x^2+y^2 \leqq 2y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

(信州大 1999) (m19991903)

0.10 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + z + 2w = -2 \\ x + 2y - z + w = 2 \\ 2x + 4y + z - w = 1 \end{cases}$$

(信州大 1999) (m19991904)

0.11 次の行列の固有値と固有空間を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 1999) (m19991905)

0.12 実数上の n 次元数ベクトル空間 V に自然な内積 $(\bigcirc, \bigcirc)$ が定義されているとする. V の n 個の数ベクトル $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ が

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

を満たすならば $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ は V の基底となることを証明せよ.

(信州大 1999) (m19991906)

0.13 次の x, y, z, u に関する連立一次方程式を解け.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & - & 4u & = & 11 \\ x & + & y & + & z & - & u & = & 6 \\ x & + & 3y & + & 5z & - & 7u & = & 16 \end{array} \right.$$

(信州大 2003) (m20031901)

0.14 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2003) (m20031902)

0.15 A を n 次正方行列とし $\boldsymbol{x}$ を n 次元列ベクトルとする. ある正の整数 k があって $A^{k-1}\boldsymbol{x} \neq 0$, $A^k\boldsymbol{x} = 0$ であるとする. このとき k 個の列ベクトル

$$\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x},\ A^2\boldsymbol{x}, \cdots,\ A^{k-1}\boldsymbol{x}$$

は一次独立であることを証明せよ.

(信州大 2003) (m20031903)

0.16 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で 2 回連続微分可能な関数であり, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)| \leq M \quad (x \in [a,b])$ を満たすとする. このとき, $|f(x)| \leq M(b-a)^2 \quad (x \in [a,b])$ となることを示せ.

(信州大 2003)　　(m20031904)

0.17 $0 < R_1 < R_2$ とする. 次の定積分を求めよ.

$$\int_{R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2} \log(x^2+y^2)\, dxdy$$

(信州大 2003)　　(m20031905)

0.18 円柱 $x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$ の xy 平面の上方で, 平面 $z=x$ の下方にある部分の体積を求めよ.

(信州大 2004)　　(m20041901)

0.19 次の問に答えよ.

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x)>0$ となるとする. $0<h<b-a$ となる h をとるとき $[a,b-h]$ で定義される関数 $g(x)=f(x+h)-f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ.

(2) 曲面 $z=y^2-x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ.

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.20 α,β,γ を互いに異なる数とし, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を次で定める.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \beta^2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\ \gamma\\ \gamma^2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\ \delta\\ \delta^2\end{pmatrix}$$

このとき, ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示し, ベクトル $\boldsymbol{d}$ を, ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.

(信州大 2004)　　(m20041903)

0.21 次の行列が対角化可能かどうかを調べ, 可能ならば対角化せよ.

$$\begin{pmatrix}-1 & 6 & 3\\ -2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(信州大 2004)　　(m20041904)

0.22 k を実数とするとき, 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\\ x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (k+2)x_3 = 0\end{cases}$$

(信州大 2005)　　(m20051901)

0.23 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(信州大 2005)　　(m20051902)

0.24 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^y}\, dxdy$$

(信州大 2005) (m20051903)

0.25 (1) 単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上で定義された関数 $f(x, y) = x^3 + y^2$ の値域を求めよ.

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = \sin x \cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ.

(信州大 2005) (m20051904)

0.26 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(信州大 2006) (m20061901)

0.27 次の連立 1 次方程式を Cramer の公式により解け. $\begin{cases} x + 5y + 2x = 6 \\ 3x - y + z = -2 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

(信州大 2006) (m20061902)

0.28 2 つの円柱面 $y^2 + z^2 = 1$, $z^2 + x^2 = 1$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(信州大 2006) (m20061903)

0.29 変数 x, y, z が条件 $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ を満たしながら動くときの

関数 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ の最大値と最小値を求めよ. また, 対応する x, y, z の値も記せ.

(信州大 2006) (m20061904)

0.30 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ. (2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2007) (m20071901)

0.31 次の連立方程式を解け. $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + ay - 12z = -12 \end{cases}$

(信州大 2007) (m20071902)

0.32 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq \pi\}$ とする. 次の積分の値を求めよ. $\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dxdy$

(信州大 2007) (m20071903)

0.33 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t) = (f(t), g(t))$ で与えられている. 但し, $f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[0, 1]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり, それらの導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ は同じ開区間で連続である.

さて, 動点 P が時刻 $t = 0$ に原点 $O(0, 0)$ を出発して時刻 $t = 1$ に点 $A(1, 1)$ に到着するとせよ. このとき, 途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t) = (f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ.

(信州大 2007) (m20071904)

0.34 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち解空間）W の次元を求めよ.

(3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008) (m20081901)

0.35 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ. (2) A の固有ベクトルを求めよ. (3) A を対角化せよ.

(信州大 2008) (m20081902)

0.36 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ および $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする. このとき, ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し,
$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081903)

0.37 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1, 1]$ 上で定義された連続関数とする. このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)|$$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081904)

0.38 以下の行列 A の階数を求めよ. また, 連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間の次元を求め, 解空間の基底を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大 2012) (m20121901)

0.39 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) A と B が可換であることを示せ.

(2) A の固有値 λ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, $B\boldsymbol{v}$ も A の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) A, B, C それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2012) (m20121902)

0.40 (1) $|x| \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|\log(1+x) - x| \leqq 2x^2$ が成立することを証明せよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos x\, dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

0.41 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの閉領域 U, V を

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq 2x + y \leqq 1\right\}$$
$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 + 8xy + 1 \geqq 0\right\}$$

で定める．次の定積分を求めよ．

$$\iint_{U\cap V} |x - 2y|\, dxdy$$

(信州大 2012) (m20121904)

0.42 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi\ ,\ 0 < y < \dfrac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された
2 変数関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ． また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ ，$f_{xy}(x,y)$ および $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = 0$ かつ $f_y(x,y) = 0$ を満たす領域 D 内の点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の領域 D における極値を求めよ．

(信州大 2013) (m20131901)

0.43 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$ を計算せよ．

(2) 2 重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ を計算せよ．

ただし，$D_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2\right\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．また，$I_n > \pi$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(信州大 2013) (m20131902)

0.44 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(信州大 2013) (m20131903)

0.45 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2013) (m20131904)

0.46 xy 平面上で定義された関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141901)

0.47 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \sin(x^2)dxdy$ を求めよ．ただし，$D = \{(x,y) \ : \ 0 \leqq \ y \leqq \ x \leqq \sqrt{\pi}\}$ とする．

(信州大 2014)　　(m20141902)

0.48 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) A が逆行列をもつための a, b の条件を求めよ．また，A の逆行列を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141903)

0.49 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b \\ a & 1 & b \\ a+b & b & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A が 1 を固有値にもつための a, b の条件を求めよ．

(2) A が 1 を固有値にもち，その重複度が 2 以上であるための a, b の条件を求めよ．

(3) A が 1 と 2 を固有値にもつとき，a, b の値を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141904)

0.50 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos xy}{x^2+y^2-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+y^4}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^3+y^3-1}{(x^2-1)^3-y+1}$

(信州大 2015)　　(m20151901)

0.51 (1) $t = \tan\theta$ のとき，$\sin 2\theta$ を t を用いて表せ．

(2) $t = \tan\theta$ と置換して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1+\sin 2\theta}$ を求めよ．

(信州大 2015)　　(m20151902)

0.52 2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+2xy+y^2}$ の値を求めよ．

ただし，$D = \left\{(x,y) \ \middle| \ 1 \leqq \ x^2+y^2 \leqq \ 4, \ x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0\right\}$ とする．

(信州大 2015)　　(m20151903)

0.53 次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(信州大 2015) (m20151904)

0.54 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A が固有値 1 と，それとは異なる実数の固有値をもつための a の条件を求めよ．

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2015) (m20151905)

0.55 平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,(x,y) \neq (0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし，$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) $z_r,\ z_\theta$ を $r,\ \theta,\ f_x,\ f_y$ を用いて表せ．

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ．

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016) (m20161901)

0.56 $p > 2$ は実数とする．$D_n = \{(x,y)\,|\,0 \leqq\ x \leqq\ n,\ 0 \leqq\ y \leqq\ n\}\ \ (n = 1,2,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分 $\quad I_n(p) = \displaystyle\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^p}$ を考える．

(1) $I_n(p)$ を計算し，極限値 $I(p) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\int_3^\infty I(p)dp$ を計算せよ．

(信州大 2016) (m20161902)

0.57 $a,\ b$ は実数とする．実数の未知数 $x,\ y,\ z,\ w$ に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + y + 4z + aw = 1 \\ 3x + 4y + z + 2w = 1 \\ 4x + 3y + 2z + w = b \end{cases}$$

は無数の解をもつとする．このとき，$a,\ b$ が満たす条件を求め，連立 1 次方程式を解け．

(信州大 2016) (m20161903)

0.58 行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と B の固有値を求めよ．

(2) A, B について，それらが対角化できるか調べ，対角化できれば対角化せよ．

(信州大 2016) (m20161904)

0.59 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ．

(2) 実数 p, q は，$p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たすとする． このとき，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ を満たすすべての実数 a, b に対して，不等式 $\quad ab \leqq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q} \quad$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2017) (m20171901)

0.60 (1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ を求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x ついての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ の値を求めよ．

(信州大 2017) (m20171902)

0.61 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -a & -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A の行列式を計算せよ．

(2) A が逆行列をもつための条件を a と b を用いて表せ．

(3) a と b が (2) の条件を満たすとき，A の逆行列を求めよ．

(信州大 2017) (m20171903)

0.62 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2a & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の最大の固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(信州大 2017) (m20171904)

0.63 2 変数関数 $f(x,y)=-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 y$ について，次の問いに答えよ．

(1) $D=\{(x,y) \mid 0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ における $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $E=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi\}$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(信州大 2018) (m20181901)

0.64 a, b は定数で $a<b$ とする．$a<p<q<b$ を満たす p, q に対して，

$$I(p,q)=\int_p^q \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}\quad (p \leqq x \leqq q)$ とおいて，置換積分法により $I(p,q)$ を求めよ．

(2) 極値 $I = \lim_{p \to a+0} \left\{ \lim_{q \to b-0} I(p,q) \right\}$ を求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181902)

0.65 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) 6 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181903)

0.66 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b は実定数で，$b > 0$ とする.

(1) A の固有値がすべて正になる条件を a, b を用いて表せ.

(2) A の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181904)

0.67 $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである．いま ε, a が与えられたとして，関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ.

(信州大 2018)　　(m20181905)

0.68 2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ の停留点を全て求め，それが極大点，極小点，峠点 (鞍点) のいずれであるかを判定せよ.

(信州大 2018)　　(m20181906)

0.69 関数列 $f_n(x) = xe^{-nx} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$ が区間 $[0, \infty)$ 上で一様収束するかどうか判定せよ.

(信州大 2018)　　(m20181907)

0.70 $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x+y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy$$

(信州大 2018)　　(m20181908)

0.71 以下の正方行列 A_i $(i = 1, 2, 3)$ それぞれについて，PA_iP^{-1} を対角行列にする正方行列 P が存在するかどうかを答え，存在する場合はそのような P および PA_iP^{-1} を答えよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2018)　　(m20181909)

0.72 成分がすべて実数である n 次正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}\ A \subset \mathbb{R}^n$ を次で定める.

$$\mathrm{Ker}\ A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = 0\}$$

また，$(\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積についての $\mathrm{Ker}\ A$ の直交補空間とする.

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ に対して，$A\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ であることを示せ.

(2) 線形写像 $f\ :\ (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} \to (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ を，$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ によって定める．$f(\boldsymbol{v}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ は，$\boldsymbol{v} = 0$ に限ることを示せ.

(3) f を (2) で定めた線形写像とする．ベクトル $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ が $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$ を満たせば，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ であることを示せ.

(4) f を (2) で定めた線形写像とする．任意の $\boldsymbol{w} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となるような $\boldsymbol{v} \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ が存在することを示せ.

(信州大 2018)　　(m20181910)

0.73 閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0, 1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) すべての $0 < x < 1$ に対して

$$(1-x)f'(x) = 1 - x - 2x\int_1^x \frac{f(t)}{t^3}dt - \frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.74 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191902)

0.75 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{(x-2y)^2} dxdy$ の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq x - 2y \leqq 1\}$ とする.

(信州大 2019)　　(m20191903)

0.76 k を実定数とするとき，$x,\ y,\ z$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - y + k^2 z = k \end{array}\right.$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) 解をもたないような k の値を求めよ.

(2) 解を無数にもつような k の値と，そのときの一般解を求めよ.

(3) 解をただ一つもつための k の条件と，そのときの解を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191904)

0.77 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & p+2 & p \\ 0 & p & p+2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，p は実数とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が対角化できないような p の値を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191905)

0.78 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される．

P ：　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) 命題 P の否定を書け．

(2) $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x=0$ で連続ではないことを証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.79 $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ の微分 $f'(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191907)

0.80 積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2+2xy-4y^2)dxdy$$

を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191908)

0.81 $g(x) = x^2\sin x$ の $x=0$ の周りのテイラー展開を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191909)

0.82 自然数 n に対し n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ および $B_n = (b_{ij})$ を次のように定める．

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i=j>1) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) A_4, B_4 の行列式 $|A_4|$, $|B_4|$ を求めよ．

(2) A_n の行列式 $|A_n|$ を求めよ．

(3) B_n の行列式 $|B_n|$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191910)

0.83 n を自然数とする．すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．A, B, C を実数成分の n 次正方行列とする．

(1) 行列 A が逆行列を持つとする．このとき，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ．

(2) $B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする．このとき B は逆行列を持つことを証明せよ．

(3) $C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^t C\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ を満たすベクトル

$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする．ここで，${}^t C$ は C の転置行列である．このとき $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{w}$ の成分の和が一致すること，すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i$ であること，を証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191911)

0.84 次の極限を調べ，それが存在する場合は極限値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$

(信州大 2020)　　(m20201901)

0.85 実数 p は $0 < p \leqq 1$ を満たすとする．$D_n = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n} \right\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n(p) = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x-y)^p}$$

を考える．このとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(p)$ を調べ．それが存在する場合は極限値を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201902)

0.86 3 以上の自然数 n に対して，n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \ldots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を A_n とする．すなわち，A_n の (i, j) 成分は，$i = j$ のとき 5，$|i - j| = 1$ のとき 2，それ以外のとき 0 である．A_n の行列式の値を a_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_3, a_4 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201903)

0.87 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A が対角化可能か判定せよ．

(2) 行列 B が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2020)　　(m20201904)

0.88 (1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

(2) 次の極限が存在しないことを示せ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(3) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ に対し，関係式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

が成り立つことを示せ．

(信州大 2020)　　(m20201905)

0.89 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - 2y \leq 1 \right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x + 2y)dxdy$$

の値を求めよ．

(3) f は $[0, 1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx < \infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

$$g(x) := \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.90 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，が 1 次独立であることを示せ．また，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ．

(信州大 2020)　　(m20201907)

0.91 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201908)

0.92 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F : V \to V$ を線形写像とする．

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda) = \{x \in V \mid F(x) = \lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $F^2 = F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201909)

0.93 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とする．関数 $f(x, y) = 2x - xy^2$ の D における最大値を求めよ．

(信州大 2021)　　(m20211901)

0.94 広義積分 $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021)　　(m20211902)

0.95 $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とする．積分 $J = \displaystyle\iint_E \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ を求めよ.

(信州大 2021)　　(m20211903)

0.96 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ.

(4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ．ただし，ここで I は単位行列とする.

(信州大 2021)　　(m20211904)

0.97 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ.

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）.

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ.

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.98 関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.99 $\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて，置換積分法により不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする．

(信州大 2022)　　(m20221902)

0.100 $D_n=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y\ ,\ \dfrac{1}{n} \leqq y \leqq 1\right\}$ $(n=2,3,\cdots)$ とおき，領域 D_n 上の 2 重積分

$$I_n=\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を考える．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221903)

0.101 t は実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，

$A^2B^3A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき，t の値を求めよ．

(信州大 2022)　　(m20221904)

0.102 a は定数とする．このとき，行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定せよ．

(信州大 2022)　　(m20221905)

0.103 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x)=\log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.104 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx$ を求めよ．ただし，n は正の偶数とする．

(信州大 2023)　　(m20231902)

0.105 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\ dxdy$ を求めよ．ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 2x\right\}$ とする．

(信州大 2023)　　(m20231903)

0.106 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち，正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ.

(信州大 2023)　　　(m20231904)

0.107 a, b は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2ab-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab-3 & a \\ 0 & -b & 3ab-2 \end{pmatrix}$ が対角化可能なとき，a と b が満たす条件を求めよ.

(信州大 2023)　　　(m20231905)