[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：島根大

0.1 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル x_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 適当な行列 P と相似変換 $(P^{-1}AP)$ を利用して, A を対角化せよ.

(島根大 2005)　(m20055801)

0.2 非負の整数 x, y に対して関数 f を次のように定義する.

$$\begin{cases} f(0, y) = y + 1 \\ f(x+1, 0) = f(x, 1) \\ f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y)) \end{cases}$$

(1) $f(1, 3)$ の値を計算せよ. ただし, その計算過程も示せ.

(2) $f(0, y) = y + 1$ の例のように, y に関する多項式として $f(1, y)$ を表現せよ. そして, その正しさを帰納法により示せ.

(3) $f(x, y) \geq x + y + 1$ であることを示せ.

(島根大 2005)　(m20055802)

0.3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を, すべて求めよ.

(島根大 2005)　(m20055803)

0.4 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

(島根大 2005)　(m20055804)

0.5 $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ を満たすもの全体の集合 W は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間となることを示し, その基底を一組求めよ.

(島根大 2005)　(m20055805)

0.6 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ と逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 次の値を求めよ.

(i) $\sin^{-1}(-1)$,　(ii) $\cos^{-1} 0$,　(iii) $\sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) $y = \sin^{-1} x$ の微分と不定積分を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ の値を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055806)

0.7 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^{-1}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ を求めよ.

(2) $z = \sin^{-1}(xy)$, $x = \sin(u+v)$, $y = \sin(u-v)$ とするとき, 合成関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を変数 u と v を用いて表せ.

(島根大 2005)　　(m20055807)

0.8 関数

$$f(x) = a^2x^2 - b(x+1) + \sin ax + \cos ax$$

について, 以下の設問に答えよ. ただし, a, b は実数である.

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を導け.

(2) 全ての実数 x に対し, $f''(x) > 0$ であることを示せ.

(3) 設問 (2) の結果から, $f'(x)$ は増加関数であることがわかる. このとき, 領域 $x > 0$ において, $f'(x) > 0$ が成立するためには a と b の間にどのような関係があればよいか. 関係式を導け.

(4) 設問 (3) の条件のもとで, 領域 $x > 0$ において $f(x) > 0$ が成立するためには, さらにどのような条件が必要か.

(島根大 2005)　　(m20055808)

0.9 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O-xy$ 上に原点 O を始点として描け.

(3) ある四辺形を行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換した像が, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1.-1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O-xy$ 上に描け.

(4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055809)

0.10 次の問に答えよ.

(1) 次の連立 1 次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ. また, その時の解も求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{cases}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{cases}$$

(3) 次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(島根大 2005)　　(m20055810)

0.11 関数 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad (c \neq 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(3) $0 < c < 1$ のとき , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nc^n = 0$ を証明せよ.

$\left(\text{ヒント} : c = \dfrac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{とおいて} \ (1+\alpha)^n \ \text{の 2 項展開を考えよ.}\right)$

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right)$$

を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055811)

0.12 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の 2 次偏導関数を求めよ.

(a) $z = 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$

(b) $z = \sin(2x+3y)$

(2) $z = f(x, y)$, $y = g(x)$ のとき, 次の式を証明せよ.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

(島根大 2005)　　(m20055812)

0.13 次の問に答えよ.

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a > 0)$.

$$I = \iint_D y \, dxdy$$

(2) 平面 $z = y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a > 0)$.

(島根大 2005)　　(m20055813)

0.14 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$　　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

(2) $n \geqq 3$ の整数 n に対し, $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ の関係を用いて, 部分積分を行うことにより, 次の等式が成立することを示せ.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

(3) 設問 (1) および (2) の結果を用いて, 次の定積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$

(島根大 2005) (m20055814)

0.15 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005) (m20055815)

0.16 $z = \sin xy$ について，次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めよ. (4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065801)

0.17 $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列式の値 u を求めよ. (2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を求めよ. (3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ. (5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065802)

0.18 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 \\ 12 & 123 & 1234 \\ 123 & 1234 & 12345 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

(島根大 2006) (m20065803)

0.19 a, b, c を 0 でない実数とする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ.

(島根大 2006) (m20065804)

0.20 4 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ に対して，これらの 1 次結合の全体を $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表すことにする．このとき，次の問に答えよ.

(1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合であるなら, $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

とするとき, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle$ の基底を 1 組求めよ.

(島根大 2006) (m20065805)

0.21 関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ の極値を調べよ.

(島根大 2006) (m20065806)

0.22 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする. いま, $n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時, $\lim_{n \to \infty} \alpha_n \leq \lim_{n \to \infty} \beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006) (m20065807)

0.23 f を微分可能な関数とする. このとき, x の関数 $G(x) = \displaystyle\int_a^x (x-u)\{f'(u) + f(u)\}du$ を微分せよ.

(島根大 2006) (m20065808)

0.24 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

(島根大 2006) (m20065809)

0.25 $f(x, y)$ を C^2 級の関数とし, θ を定数として $x = u\cos\theta - v\sin\theta$, $y = u\sin\theta + v\cos\theta$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ. (2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(島根大 2006) (m20065810)

0.26 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の (a)〜(e) を求めよ.

(a) A^T , (b) AA , (c) $|A|$, (d) A の階数, (e) A^{-1}

ただし, A^T は A の転置行列を表す. $|A|$ は A の行列式である.

(島根大 2006) (m20065811)

0.27 次の線形方程式の解 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(島根大 2006) (m20065812)

0.28 次の行列の固有ベクトルを求め, この行列を対角化せよ。 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}$

ただし, i は虚数単位である.

(島根大 2006) (m20065813)

0.29 (1) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ について $\dfrac{d}{dx}f(x)$ および $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x) = Ae^{-kx^2}$ が微分方程式 $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 4k^2x^2\right) f(x) = Cf(x)$ を満たすとき, C を求めよ.

(島根大 2006) (m20065814)

0.30 (1) $\phi(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xy-z$ について $\nabla\phi=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\phi$ を求めよ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(\boldsymbol{A}_x,\ \boldsymbol{A}_y,\ \boldsymbol{A}_z)=(-y^3,\ x^3,\ 0)$ について，

$$\nabla\times\ \boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 方向の単位ベクトルを表す．

(島根大 2006) (m20065815)

0.31 $e^x\cos x$ の不定積分を求めよ．

(島根大 2006) (m20065816)

0.32 $A=\begin{bmatrix}1&x&y&z\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$ とおく．このとき,

(1) A の行列式を求めよ. (2) $x=y=z=1$ のとき, A の逆行列を求めよ.

(島根大 2007) (m20075801)

0.33 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$\boldsymbol{a_1}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_3}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_4}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ とする．このとき,

(1) $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3}$ は 1 次独立であることを示せ. (2) $\boldsymbol{a_4}$ を $\boldsymbol{a_1},\ \boldsymbol{a_2},\ \boldsymbol{a_3}$ の 1 次結合で表せ.

(島根大 2007) (m20075802)

0.34 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める：

$$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\ :\ x-y-3z+2w=0\text{ であり, かつ }\quad 2x-y+z+w=0\text{ である.}\right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ. (2) W の基底を一組求めよ.

(島根大 2007) (m20075803)

0.35 関数 $f(x)=\dfrac{1+2\sin x}{2-\sin x}$ の最小値と最大値を求めよ．また，$f(x)$ は $0\leq x\leq 2\pi$ において 2 つの変曲点をもつことを示せ.

(島根大 2007) (m20075804)

0.36 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたす数列 a_n に対して $b_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ は正しいだろうか？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007) (m20075805)

0.37 $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$ のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(島根大 2007)　　(m20075806)

0.38 $u = 3x + y,\ v = x - 3y$ と変数変換することにより，2 重積分

$$\iint_D x\,dx\,dy, \quad D = \{(x, y)\ :\ 0 \leq 3x + y \leq 1,\ -1 \leq x - 3y \leq 0\}$$ を求めよ．

(島根大 2007)　　(m20075807)

0.39 n の関数 $f(n) = \displaystyle\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ．

(3) n が自然数のとき，$f(n+1) = n!$ を証明せよ．

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を証明せよ．

(5) $\dfrac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ．なお，$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である．

(島根大 2007)　　(m20075808)

0.40 任意定数 a を含む行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & a \end{bmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ. さらに，$A^{-1}A$ が単位行列となることを示せ.

(3) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ．

(4) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つ求められる条件を示せ．さらに，その条件を満たす場合，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて，$\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(5) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ条件を示せ．さらに，その条件を満たす a の値を用いて $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の大きさは 1，すなわち $|\boldsymbol{x}| = 1$ とせよ．

(島根大 2007)　　(m20075809)

0.41 次の関数 u は方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ を満たすことを示せ．

(1) $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

(2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(島根大 2007)　　(m20075810)

0.42 $u = u(x, t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(x, t) dx = 1$ が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする．

(島根大 2007)　　(m20075811)

0.43 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して，2 行 2 列の行列式にして計算せよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2,3)$ を求めよ.

(4) 行列 A の階数を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075812)

0.44 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$ の増減・凹凸に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 y の導関数 y' および 2 階導関数 y'' を求めよ.

(2) 関数 y の変曲点における x 座標を求めよ.

(3) 関数 y が極小となるときの x の値 $x_{\min}$ と極小値 $y_{\min}$，　および，関数 y が極大となるときの x の値 $x_{\max}$ と極大値 $y_{\max}$ を求めよ.

(4) 極小点，極大点，および変曲点を考慮して関数 y のグラフを描け.

(島根大 2007)　　(m20075813)

0.45 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi,\pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ \ b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (-\pi\leqq\ x\leqq\ 0)\\ \ \ 2x & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.46 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

ただし，$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$，　$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，　$x(0)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトル ν_1，ν_2 を求めよ.

(3) 行列 $T=[\nu_1,\nu_2]$ とする $x(t)=Ty(t)$ の変換によって，① を $y(t)$ に関する微分方程式に変形せよ．ただし，$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}$ である.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に関する微分方程式を解け.

(5) 設問 (4) で求めた解 $y(t)$ を用いて，① の解 $x(t)$ を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075815)

0.47 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix}5&-2&2&1\\2&3&-1&3\\-5&4&2&3\\1&1&4&2\end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(b) $V = \{v \in \boldsymbol{R}^4 \mid Av = 0\}$ ，　$W = \{Av \mid v \in \boldsymbol{R}^4\}$ とおく．このとき，V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(c) (a) のとき，V, W の基底を一組ずつ求めよ．

(d) (a) のとき，$\{v_1,\ v_2\}$ を V の任意の基底とする．また，W の任意の基底 $\{w_1,\ w_2\}$ に対して，$v_3,\ v_4\ (\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3\ ,\quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする．このとき，$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(島根大 2008)　　(m20085801)

0.48 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ．　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.49 次の問いに答えよ．a, b, c はすべて正の数とする．

(1) 3 次元空間において頂点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ をもつ三角形の面積 S を求めよ．

(2) 3 次元空間において頂点 $O(0,0,0)$, P, Q, R をもつ四面体の体積を V とする．(1) で求めた S と V との比 S/V を考える．a, b, c が $abc = 1$ をみたしながら変化するときの S/V の最小値を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085803)

0.50 次の重積分を求めよ．a は正定数とする．　$\displaystyle\iint_D y\, dxdy$　　ただし D は $(x,y)-$ 平面内にある円 $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ の上半分，すなわち $y > 0$ を満たす部分である．

(島根大 2008)　　(m20085804)

0.51 コンピュータやネットワークの技術の発展により，我々の生活はより便利で快適なものになってきた．その一方で，それらに関連する事件（例えば，ファイル共有アプリケーションによる機密情報の流出，出会い系サイトがらみのトラブル等）も多数発生している．以下の問いに答えよ．

(1) コンピュータやネットワークの技術に関連する事件としてどのようなものがあるか，2 つ挙げ，それぞれ 100 文字程度で説明せよ．ただし，上記の文中で例として挙げたものは除く．

(2) 小問 (1) で挙げた事件に巻き込まれないためには，どのような対策が必要か，それぞれ 100 文字程度で説明せよ．

(島根大 2008)　　(m20085805)

0.52 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の階数を求めよ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2,3)$ を求めよ.

(島根大 2008) (m20085806)

0.53 次の関数 $u=u(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ の値を求めよ.

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(島根大 2008) (m20085807)

0.54 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3\int_1^2 \left(2xy-x^2\right)\,dydx$ (2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2y} y^2e^{xy}\,dxdy$

(島根大 2008) (m20085808)

0.55 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け.

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x=\tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ.

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は $f(x)\cong 1-x^2+x^4$ であることを導け.

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け.

$$\tan^{-1}x\cong x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ ただし，} |x|<1\ )$$

(島根大 2008) (m20085809)

0.56 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ がある．以下の設問に答えよ．ただし．互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする.

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}-m\boldsymbol{a}$ が垂直となる m の値を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよ.

(4) 外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(5) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の正弦，すなわち $\sin\theta$ を求めよ.

(6) ベクトル $\boldsymbol{c}$，ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると，

$$S^2=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})^2$$

となることを示せ．次に，ベクトル $\boldsymbol{a}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2008) (m20085810)

0.57 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) R^3 から R^3 への写像 f_A を

$$f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する．f_A は線形写像であることを示せ.

(2) f_A が単射とならないような a の値を求めよ.

(3) f_A の像の次元は 2 以上であることを示せ.

(4) A は 2 を固有値としてもつことを示せ.

(5) A が 1 を固有値としてもつとき，次の (a),(b) に答えよ.

(a) a の値を求めよ.

(b) A は対角化可能であることを示せ.

(島根大 2009)　　(m20095801)

0.58 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.59 (1) 次の極限値は存在するかどうか調べよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(a) f の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

(b) $x = \sin(u+v)$，$y = \cos(u-v)$ とするとき，偏導関数 f_u と f_v を求めよ.

(島根大 2009)　　(m20095803)

0.60 3 次縦ベクトル全体のなすベクトル空間を R^3 とする,

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は, 次を満たすものとする.

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}\}$ は R^3 の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ の 1 次結合で表せ.

(3) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) f の像の 1 組の基底を求めよ.

(5) f の核の次元を求めよ.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(島根大 2010)　　(m20105801)

0.61 (1) $\log(1+x) \quad (-1 < x < 1)$ の第 n 次導関数を求めよ.

(2) $\log(1+x) \quad (-1 < x < 1)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) $\log 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n} + \cdots$ を示せ.

(島根大 2010)　　(m20105802)

0.62 (1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ.

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ.

(3) 関数 $f(x,y) = xy(x-y+1)$ の極値を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105803)

0.63 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ に対し, $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ との外積 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は, それぞれ直交座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルである.

(島根大 2010)　　(m20105804)

0.64 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(島根大 2010)　　(m20105805)

0.65 次の連立 1 次方程式が自明な解以外の解をもつのは定数 a がどのような値のときか.

$$\begin{cases} (2-a)x + 3y = 0 \\ 3x + (2-a)y = 0 \end{cases}$$

(島根大 2010)　　(m20105806)

0.66 (1) 次の行列 A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 A に対し, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(島根大 2010)　　(m20105807)

0.67 (1) $f(x) = \sin^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$ とするとき, $f'(x),\ f''(x),\ f^{(3)}(x)$ を求めよ.

(2) 設問 (1) の結果を用いて $f(x)$ を x^3 の項まで $x=0$ のまわりにおいてべき級数展開せよ.

(3) 設問 (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$ の値を求めよ.

(島根大 2010) (m20105808)

0.68 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 A の行列式を 1 列について余因子展開して求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの列ベクトルは線形独立といえるか. その根拠と共に示せ.

(3) 行列 A の逆行列を求めよ.

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2,3)$ を求めよ.

(島根大 2010) (m20105809)

0.69 以下の問に答えよ.

(1) オペレーティングシステムとは何か, 100 字以上でまとめよ.

(2) 計算機を構成している要素には, 中央処理装置 (CPU), 主記憶装置, 制御装置, 入出力装置, 外部記憶装置がある. 計算機システムとしての能力を向上させるための方策を 3 つ挙げよ.

(3) ソースプログラム, オブジェクトプログラム, コンパイラという 3 つの用語を用いて, ひとつのまとまった文章を作りなさい.

(島根大 2010) (m20105810)

0.70 (1) 次の 2 進数を 10 進数へ変換せよ.

1101.1011

(2) 次の 10 進数を 2 進数へ変換せよ.

0.9

(3) 次の 8 ビットの 2 進数の 2 の補数を求めよ. ただし, 2 の補数は 8 ビットの 2 進数で表現せよ.

01011110

(4) 2 つの 10 進数 $x=11,\ y=13$ を 5 ビットの 2 進数へ変換し, 次の演算をせよ. ただし, 演算結果は 5 ビットの 2 進数で表現せよ.

$(a)\ x+y$ $(b)\ x-y$

(島根大 2010) (m20105811)

0.71 次の行列 A について以下の設問に答えよ. ただし, $0<a<1/2$ とする.

$$A=\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) A^2 を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(4) A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) $A^{-1},\ A^2$ および A^n の固有値を求めよ. ただし, n は自然数とする.

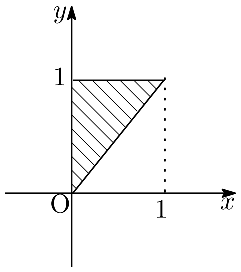
(6) A^n を求めよ.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105812)

0.72 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ.

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ.



(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy \right\} dx$ を計算せよ.

(島根大 2010)　　(m20105813)

0.73 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=x-\tan^{-1}x$, $g(x)=x-x\sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ.

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ であることを示せ.

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ.

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.74 3 次正方行列 X を以下のように定義する.

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す.

(1) $x_{11}=1$ とする．積 $X\,{}^tX$ を計算せよ.

(2) $x_{11}=1$ とする．$(X\,{}^tX)^{-1}$ の行列式の値を求めよ.

(3) $x_{11}=1$ とする．X の階数を求めよ.

(4) $x_{11}=1$ とする．X^2 の行列式の値を求めよ.

(5) $x_{11}=-7$ とする．以下の命題が真か偽かを示せ.
命題「任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，方程式 $X\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{y}$ が存在する.」
ただし，以下のように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{y}$ は 3 次列ベクトルとする.

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125802)

0.75　次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 6 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 21 \end{vmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125803)

0.76　次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1)　$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(2)　$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(島根大 2012)　　(m20125804)

0.77　写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax^2 + 2y - 2z + w \\ x - y + z + bw + c - 2 \\ 2x + (d+1)yz - w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f が線形写像になり，かつ核の次元が 2 となる a, b, c, d の値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125805)

0.78　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)　A を直交行列を用いて対角化せよ．

(島根大 2012)　　(m20125806)

0.79　次の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Arctan}\, x$ は $\tan x\ (-\pi/2 < x < \pi/2)$ の逆関数とする．

(1)　$\mathrm{Arctan}\, x$ の導関数と不定積分を求めよ．

(2)　$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$$

とおくとき，$I(n+1)$ を $I(n)$ を用いて表し，さらに $I(3)$ を計算せよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^1 x^5 \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を計算せよ．

(4)　$\displaystyle\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\, x)^2\, dx$ を計算せよ．

(島根大 2012)　　(m20125807)

0.80 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\exp(x^3-y^3)-1}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$ に対して，$f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)=\dfrac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}$ $(xy\neq 0)$ の極値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125808)

0.81 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&8&2&1\\-1&1&1&1&0\\0&1&3&2&1\end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\mathrm{ker} f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{w_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ w_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\ w_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v})=B\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.82 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする．

$$(*)\quad f''(x)=f(x)\,,\ \ f(0)=1,\ f'(0)=0$$

次の問いに答えよ．

(1) $\bigl(f(x)\bigr)^2-\bigl(f'(x)\bigr)^2=1$ を証明せよ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135802)

0.83 m,n は自然数とし，

$$I(m,n)=\iint_D (x+y)^{m-1}x^{n-1}y\,dxdy \qquad D=\bigl\{(x,y):x>0,\ y>0,\ x+y<1\bigr\}$$

を定める．次の問いに答えよ．

(1) 次の変数変換を行うことによって，$I(m,n)$ を u と v についての重積分に書き直せ．

$$u=x+y\,,\qquad v=\frac{y}{x}$$

(2) 積分値 $I(m,n)$ を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135803)

0.84 $(3,4)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f_A は線形写像であることを示せ.

(2) f_A の核 $\mathrm{Ker} f_A$ に属するベクトルをすべて求めよ.

(3) f_A の像 $f_A\left(\mathbb{R}^4\right)$ の基底を求めよ.

(4) $f_A(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ をすべて求めよ．もしそのような $\boldsymbol{y}$ が存在しない場合はその理由を述べよ.

(島根大 2014)　　(m20145801)

0.85 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ に対して，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であり，かつ $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表されることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_4$ が零ベクトルでないとき，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ の中に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ が存在して，$< \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}_4 > = < \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3 >$ となることを示せ．ただし，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}$ で張られる部分空間を $< \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} >$ で表わす.

(島根大 2014)　　(m20145802)

0.86 次の問いに答えよ,

(1) $(1+x)^{1/10}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ.

(2) $(1.2)^{1/10}$ の近似値を小数第 3 位まで正確に求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145803)

0.87 次の問いに答えよ.

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n \ dx \ (n \geqq\ 0)$ とおく．$t = \arcsin x$ とおいて I_n を t の積分で表わせ.

(2) $n \geqq\ 2$ のとき，I_n と I_{n-2} の関係を求めよ．さらに，I_2 を求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145804)

0.88 次の問いに答えよ.

(1) $0 < r_1 < r_2$ とし，$D_1 = \left\{(x,y) : {r_1}^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ {r_2}^2\right\}$ と定める．このとき，積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ.

(2) $0 < r$ とし，$D_2 = \left\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leqq\ r^2\right\}$ と定める．このとき，広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145805)

0.89 以下に現れる関数はすべて $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad f(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

と二変数関数 $g(u,v)$ の合成を $F = g \circ f$ と定める．このとき，

$$F(x,y) = (g \circ f)(x,y) = x$$

ならば，以下の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大 2014)　　(m20145806)

0.90 平面座標系 $(o-xy)$ において，曲線 C を $y = x^2 - 4x + 3$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 $x_1,\ x_2\ \ (x_1 > x_2)$ を求めよ．

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を描き，頂点及び x 軸との交点を図示せよ．

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.91 次に示す連立方程式が与えられている時，以下の設問に答えよ．ただし，c は定数である．

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 + cx_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(1) 上の方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のように表現する場合に，行列 A と $\boldsymbol{b}$ を示せ．ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とする．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) $c = 0$ の時，以下の問いに答えよ．

(a) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(b) 問い (a) で求めた固有値の最大なものに関する固有ベクトルを求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155802)

0.92 (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = 5 \\ 2x - \ y + 3z = 4a + 13 \\ 3x \qquad + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ．さらに，解が存在するような a の値をすべて求めよ．

(3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき，その一般解を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155803)

0.93 行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 B の余因子行列を求めよ．

(2) B が正則であるための b の条件を求めよ．さらに B が正則であるとき，B の逆行列を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155804)

0.94 次の問いにおいて V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f : V \to V$ は線形写像とする．$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする．

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V のベクトルとする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるならば，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) 不等式 $\dim(V) \leq \dim\bigl(f(V)\bigr) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$ を示せ．ただし，$\mathrm{Ker}\, f$ は f の核である．

(島根大 2015)　　(m20155805)

0.95 関数 $f(x) = \arcsin x$ $\ (-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ．

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である．このとき，0 以上の整数 n に対し，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155806)

0.96 $D = \bigl\{(x, y) : 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4,\ y \geq x\bigr\}$ とする．

(1) 変数変換 $x = u - \dfrac{v}{2}$, $y = u + \dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u, v) 平面の領域を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2 - 6xy + 5y^2}{4}\right) dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x) = e^x$ である．

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.97 (1) 3 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とする．このとき，

（ア）$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

（イ）$\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ とする．線形写像 $f : V \to V$ が次を満たすとき，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \end{cases}$$

このとき，

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ．

(エ) $f(W) = W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165801)

0.98 4 次実正方行列 B のすべての固有値は 0 であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) B^4 は零行列であることを示せ．

4 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ とする．$c \in \mathbb{R}^4$ は $B^3c \neq 0$ を満たすとし，$P = [\ c\ \ Bc\ \ B^2c\ \ B^3c\ ]$ を $c,\ Bc,\ B^2c,\ B^3c$ をそれぞれ第 1，第 2，第 3，第 4 列にもつ 4 次実正方行列とする．

(2) $c,\ Bc,\ B^2c,\ B^3c$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ．

(3) P は正則行列であることを示し，$P^{-1}BP$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165802)

0.99 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \log x \quad (x > 0)$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ の最小値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ を計算せよ．

(3) $0 < x \leq 1$ を満たす各 x に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき，次の等式が成り立つかどうかを調べよ．

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

(島根大 2016)　　(m20165803)

0.100 (1) $R > 0$ とする．$\Omega(R) = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq x\right\}$ とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_{\Omega(R)} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} dy\right) dx$ を求めよ．

(3) α を定数とし，$(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ と定める．$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165804)

0.101 次の 3 次の正方行列 A について，以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさが 1 となるように正規化（規格化）すること．

(3) 設問 (2) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 A を対角化せよ．

(4) A^{12} を計算せよ．

(島根大 2016)　　(m20165805)

0.102　微分方程式 $y = x\dfrac{dy}{dx} + 3 \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = p$ と置き，置き換えた式を示せ．

(2) 設問 (1) の結果を x に関して微分せよ．

(3) 設問 (2) の結果から p, x のみを含む微分方程式を示せ．

(4) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x を p を用いて表せ．

(5) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき y を p を用いて表せ．

(6) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ のとき x と y はある 1 つの半円上にあることを示せ．また，その半径を示せ．

(島根大 2016)　　(m20165806)

0.103　以下の設問に答えよ．ただし，T $(T > 0)$ および ϕ は定数である．

(1) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$

(2) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)\right]^2 dt$

(3) 次式が成り立つことを示せ．　$\displaystyle \int_0^{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = 0$

(4) 次の定積分を計算せよ．　$\displaystyle \frac{1}{T}\int_0^{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 dt$

(島根大 2017)　　(m20175801)

0.104　次の微分方程式について，以下の設問に答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，　$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして求めること．

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルが互いに直交していることを示せ．

(3) 固有ベクトルからなる行列 $T = [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列 T^{-1} を求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t)$ の変数変換を行い，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導け．

(5) 設問 (4) で求めた $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を解け．

(6) 設問 (5) で求めた解 $\boldsymbol{y}(t)$ を用い，微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175802)

0.105 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175803)

0.106 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175804)

0.107 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 0 \right\}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元を求めよ．

(3) $\boldsymbol{v}$ を W に属さない $\mathbb{R}^3$ のベクトルとし，$U = \{k\boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$W + U = \mathbb{R}^3 , \qquad W \cap U = \{0\}$$

ただし，$W + U = \{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{u} \in U\}$ である．

(島根大 2017)　　(m20175805)

0.108 閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ．

ある $c(a < c < b)$ が存在して

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = x^2$ のとき，区間 (a, b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ．

(2) 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ，開区間 (a, b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a, b) において関数

$$F(x) = \frac{f(b)(x - a) + f(a)(b - x)}{b - a} - f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a, b) において，ただ一つだけ存在することを示せ．

(3) $b > a > 1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{b^2 - a^2}{2ab} > \log \frac{b}{a}$$

(島根大 2017)　　(m20175806)

0.109 (1) $D = \{(x, y) : 0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1\}$ とする．変数変換 $x = u - uv,\ y = uv$ により，D にうつされる (u, v) 平面の領域を求めよ．

(2) D は問 (1) と同じとする．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ を計算せよ．

(島根大 2017)　　(m20175807)

0.110 関数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 6y$ の極値を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175808)

0.111 xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.112 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，次の設問に答えよ．

(1) $AB,\ BA$ を計算し，$AB = BA$ が成立しないことを示せ．

(2) 行列 $A,\ B$ が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ．

(3) 行列 A と 2 行 2 列の零行列 O に対して．$AX = XA = O$ をみたす O でない行列 X を一つ見つけよ．

(4) 次の条件をみたすような行列 $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ を求めよ．

$$C\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 点 (x, y) が直線 $x - y = 1$ 上を動くとき，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定義される点 (X, Y) の軌跡を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185802)

0.113 正則行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185803)

0.114 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．線形写像 $f_A\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．また，$A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5]$ を A の列ベクトルへの分割とする．すなわち，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_A(\mathbb{R}^5) = W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ の中から，W を生成する最小個数のベクトルの組を 1 組求めよ．また，W の次元を述べよ．

(3) f_A の核 $\mathrm{Ker}\ f_A$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185804)

0.115 V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，V_1, V_2 を V の部分空間とする．　また f を V から W への線形写像とする．次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f は V の零ベクトル 0_V を W の零ベクトル 0_W に写すことを示せ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\ f$ は W の部分空間であることを示せ．

(3) $V_1 \cap V_2$ は V の部分空間であることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185805)

0.116 $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.117 $z = f(x, y),\ x = \dfrac{1}{2}(u - v),\ y = \dfrac{1}{2}(u + v)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ ならば，1 変数関数 g が存在して $z = g(x + y)$ と表せることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185807)

0.118 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq \pi\}$ とするとき，重積分

$$\iint_D (x - y)\cos(x^2 - y^2)dxdy$$

の値を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185808)

0.119 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y = x^3 - 2x^2 + \dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である．残りの 2 つの点を $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とするとき，点 $A(x_1, y_1)$ および点 $B(x_2, y_2)$ の座標を求めよ．ただし．$x_1 < x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある．この 2 本の接線を ℓ_1, ℓ_2 とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3, y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4, y_4)$ とする．ただし，$x_3 < x_4$ とする．このとき，接線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式および接点 $Q(x_3, y_3)$, $R(x_4, y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5, y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195801)

0.120 次の 3 行 3 列の正方行列 A について，以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の対角成分の和（トレース）を求めよ．

(2) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が行列 A の固有ベクトルであることを確認し，対応する固有値を求めよ．

(3) 行列 A の他の 2 つの固有ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ ，およびそれらに対応する固有値を求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化（規格化）し，固有値の小さい方の固有ベクトルを $\vec{b}$ とすること．

(4) 行列 A の 3 つの固有値の和を求めよ．

(5) 行列 A の 3 つの固有ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ から 3 行 3 列の正方行列 $P = [\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ ]$ を作り，その逆行列 P^{-1} を求めよ．

(6) 3 行 3 列の正方行列 $L = P^{-1}AP$ を求めよ．

(7) 行列 L のトレースを求めよ．

(8) 行列 P と行列 L を用いて，行列 A^4 を求めよ．

(9) 行列 A^5 のトレースを求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195802)

0.121 V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，f を V から U への線形写像とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f は単射であるとする．このとき，

(a) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立であるなら，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ も 1 次独立であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が V の基底であっても $f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ は U の基底であるとは限らないことを示せ．

(島根大 2019)　　(m20195803)

0.122 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x-y+z \\ 3x+y-2z \end{pmatrix}$$

(a) f は線形写像であることを示せ．

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.123 曲線 $g(x) = e^x(2x^2-11x+16)$ の増減と凹凸を調べ，グラフの概形を描け．

(島根大 2019)　　(m20195805)

0.124 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x>0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019)　　(m20195806)

0.125 $f(x,y) = axy - x^3 - y^3$ とする．ただし，$a>0$ である． $f(x,y)$ の極値が 1 になるときの a の値を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195807)

0.126 $g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x+y \leqq \beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x+y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.127 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ．

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx} - 8f(x) + g(x) = 0$$

(1) 関数 $g(x)=0$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$ の場合において，微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ．

(3) 設問 (2) において，$x=0$ のときの関数 $f(x)$ およびその 1 階導関数 $f'(x)$ の値がそれぞれ次のように与えられたとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

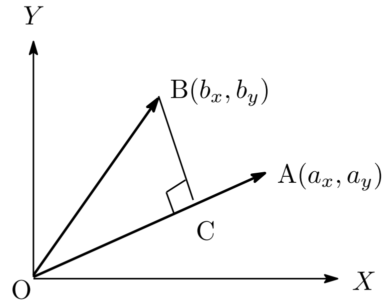
$$f(0) = -\frac{1}{18},\ f'(0) = \frac{13}{18}$$

(4) 設問 (3) において求めた関数 $f(x)$ を x の 2 次の項までマクローリン展開せよ．

(島根大 2020)　　(m20205801)

0.128 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x, a_y) に点 A が，座標 (b_x, b_y) に点 B がある．点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き，垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする．原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と，原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は，X, Y 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる．以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ．

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある．ここで，行列 A は以下で与えられるものとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき，その k を求めよ．ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \mathbf{0}$ とする．

(島根大 2020)　　(m20205802)

0.129 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．　　(2) A^n を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205803)

0.130 $M(3, \mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体とする．また，

$$W = \left\{ X \in M(3, \mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{tr}(X) = 0 \right\}$$

とする．ここで，$\mathrm{tr}(X)$ は X のトレースである．すなわち，$X = (x_{ij})$ とすると，

$\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ である．次の問いに答えよ．

(1) W は $M(3, \mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) W の基底を 1 組求め，その理由を述べよ．

(島根大 2020)　　(m20205804)

0.131　a を実数，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(X) = AX$$

と定める．f の核を $\mathrm{Ker}f$，像を $\mathrm{Im}f$ で表す．必要なら a による場合分けを行い，それぞれの場合に $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ．さらに $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205805)

0.132　$\mathrm{Sin}^{-1}x\ \ (-1 < x < 1)$ を $\sin x$ の逆関数とし，$f(x) = \sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ．

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2)　$y = f(x)$ に対して，$(1 - x^2)^2 y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$，$q(x)$ を 1 組求めよ．

(3)　$f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(4)　次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{Sin}^{-1}x\ dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.133　$f(x, y) = \dfrac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x, y)$ の偏導関数を求めよ．

(2)　点 $P(1, -1, 1)$ における，曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3)　$a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \le x \le a\ ,\ 0 \le y \le x^2\right\}$ とおく．
2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x, y)\ dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a \to \infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)