[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：千葉大

0.1 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994)　(m19941201)

0.2 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases} \qquad (\ t > 0\ )$$

$$x(0) = a \quad y(0) = b$$

について，初期値 (a, b) が第 1 象限 I にあるとき，解 $\big(x(t),\ y(t)\big)$ が I に留まることを示せ．

(千葉大 1994)　(m19941202)

0.3 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(千葉大 1994)　(m19941203)

0.4 2 次形式 $4{x_1}^2 - 12x_1x_2 + 5{x_2}^2$ を式 ${y_1}^2 - {y_2}^2$ に変換する一次変換を求めよ．

(千葉大 1994)　(m19941204)

0.5 (1) 次の極限値を求めよ．$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(2) 次の関数の概形を描け．$y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

(千葉大 1995)　(m19951201)

0.6 次の不定積分を求めよ．

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx$ (但し，$A \neq 0$)

(千葉大 1995)　(m19951202)

0.7 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + b^2 x = 0 \quad (\text{但し，} a < b\ )$$

(千葉大 1995)　(m19951203)

0.8 次の行列 A の行列式の値を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2y & x+y+3z \\ 2x & x+3y+z & 2z \\ 3x+y+z & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

(千葉大 1995)　(m19951204)

0.9 極座標による曲線 $r = r(\theta)$ を x, y 座標に変換したとき，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} \quad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

ただし，　　$r' = \dfrac{d}{d\theta}r(\theta)$　，　$r'' = \dfrac{d^2}{d\theta^2}r(\theta)$

(千葉大 1996)　　(m19961201)

0.10　$D = \{(x,y) |\ x+y \leqq 1\ ,\ \ x, y \geqq 0\}$ とするとき，次の 2 重積分 I を求めよ．

$$I = \iint_D (2x+3y^2)dxdy$$

(千葉大 1996)　　(m19961202)

0.11　微分方程式 $y'' + 4y' + 4y = x^2$ の一般解を求めよ．

(千葉大 1996)　　(m19961203)

0.12　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，行列 $B = A^4 - 3A^3 + 2A^2 + 4A + E$ を求めよ．ここで E は単位行列とする．

(千葉大 1996)　　(m19961204)

0.13　$y = \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2-x)\quad(-1 \leq x \leq 2)$ のグラフを描け．

(千葉大 1997)　　(m19971201)

0.14　次の初期値問題を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t \quad (t > 0), \\ x(0) = 0, \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

(千葉大 1997)　　(m19971202)

0.15　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め，λ_1, λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ．さらに，ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971203)

0.16　複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z| = 1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5 + 0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.17　(1)　次の等式を証明せよ．

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし，n は自然数とする．

(2)　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

(千葉大 1998)　　(m19981201)

0.18　次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy$$

(千葉大 1998)　　(m19981202)

0.19 次の線形微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めよ．

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = x \ , \ y(0) = 1$$

(注) $w(x) = e^{2x}y(x)$ とおき，w に関する微分方程式を考えよ．

(千葉大 1998)　　(m19981203)

0.20 (1) 下記に与えられた行列 A に対して，行および列に関する基本変形を何回か施すことによって，次の標準形 I に変形されることを示せ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} , \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) と関連して，次の関係式：$PAQ = I$ が成り立つような正則 3 次正方行列 P と正則 4 次正方行列 Q を求めよ．

（注）行に関する基本変形とは (I) 一つの行を k 倍する $(k \neq 0)$；(II) 一つの行に他の一つの行の k 倍を加える $(k \neq 0)$；(III) 一つの行と他の行とを交換する，という変形の総称．列についても同様．

(千葉大 1998)　　(m19981204)

0.21 級数 $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+2)} + \cdots$ について次の設問に答えよ．

(1) 第 n 部分和 $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+2)}$ を求めよ．

(2) S_n の極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(千葉大 1999)　　(m19991201)

0.22 次の二重積分を求めよ．

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx\, dy$$

ここで，$D = \{(x, y) : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(千葉大 1999)　　(m19991202)

0.23 次の微分方程式を解け．

$$\frac{dx}{dt} = -5x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 3y$$

(千葉大 1999)　　(m19991203)

0.24 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ が与えられている．この時，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(A)$ の表す空間図形を求めよ．

(3) $\overrightarrow{y_0}$ が $\mathrm{Ker}(A^T)$ の元と直交することを示せ．

(4) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y_0}$ を満たす $\overrightarrow{x}$ を求めよ．

ここで，A^T は A の転置行列，$\mathrm{Im}(A) = \{A\overrightarrow{x} \ : \ \overrightarrow{x} \in R^3\}$，$\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{x} \in R^3 : A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ を表す．

(千葉大 1999)　　(m19991204)

0.25 無限回微分可能な関数 $f(x)$ を，定数 a の周りで Taylor 級数に展開すると，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

となる．ただし，

$$f^{(n)}(a) = \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a}$$

である．この関係を基に以下の設問に答えなさい．

(1) (a) e^x を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(b) $\cos x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(c) $\sin x$ を原点 0 の周りに Taylor 級数に展開しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，次の Euler の公式が成り立つことを示しなさい．ただし， i は虚数単位で， $i^2 = -1$ である．

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(3) (2) の結果を基に，次の等式が成り立つことを示しなさい．

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(千葉大 2000) (m20001201)

0.26 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図 2 のように，太さの無視できる長さ a の 1 2 本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき 1 2 本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

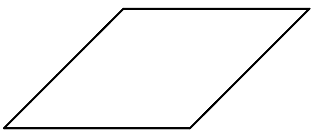


図 1

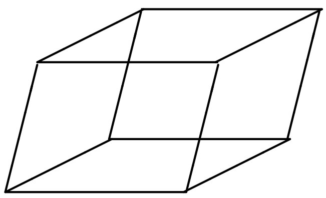


図 2

(千葉大 2000) (m20001202)

0.27 2 次元平面上の直交座標系を x, y とする．原点から点 (a, b) までの距離を r ，原点と点 (a, b) を結ぶ直線と， x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ ， $a > 0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい．

(千葉大 2000) (m20001203)

0.28 以下の設問に答えなさい．

(1) 次の対称行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて A^n を求めなさい．
ここで，A^n は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように A を n 回掛け合わせることを意味する．
例えば，$A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である．

(千葉大 2000)　　(m20001204)

0.29 3次元空間中に球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい．

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい．

$$V = 2 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy \ ,\ D = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r, θ) を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{ (r, \theta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ ,\ 0 \leq r \leq 2a \cos\theta \right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.30 微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 1 \ ,\ \ y(x)\Big|_{x=1} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 0 \qquad \text{(i)}$$

に関する以下の設問に答えなさい．

(1) 変数変換 $x = e^t$ を考える．変数 x の定義域が $[1, \infty]$ であるとき，変数 t の定義域を求めなさい．

(2) 合成関数 $y(x(t))$ の微分公式は $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ で与えられる．合成関数 $y(x(t))$ の2階微分 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dx}{dt}$ を用いて表しなさい．

(3) 変数変換 $x = e^t$ を用いることによって，式 (i) の微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \ ,\ \ y(t)\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

に変換できることを示しなさい．

(4) 式 (ii) の微分方程式を解きなさい．

(5) 設問 (4) で求めた微分方程式 (ii) の解から微分方程式 (i) の解 $y(x)$ を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011202)

0.31 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x, y) = (1, 2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X', Y') = (1, 2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい．

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011203)

0.32 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\big(f(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x}\big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.33 次の極限値を求めなさい．ただし，与えられた関数 $f(x)$ は，$x=a$ で微分可能とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h^2)}{h}$

(千葉大 2002)　　(m20021201)

0.34 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい．　$\displaystyle I(a)=\iint_D xy\,dxdy$

ここで，$D=\{(x,y):0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1\,,\ 0\le x+y\le a\}$

(千葉大 2002)　　(m20021202)

0.35 次の微分方程式の初期条件を満たす解を求め，$x\ge 0$ の範囲で解曲線を図示しなさい．

$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=2\cos x$　　初期条件 ： $y(0)=1\,,\ y'(0)=0$

(千葉大 2002)　　(m20021203)

0.36 次の 2 次形式について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x,y)=2x^2-2xy+2y^2$$

(1) $f(x,y)$ は 2 次の実対称行列 A とベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，次のように書き直すことができる．

$$f(x,y)=F(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

A を求めなさい．ここで，$\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．次に，2 次曲線 $f(x,y)=1$ を，固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O-X,Y$ で表わし，その概形を示しなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021204)

0.37 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i=\sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という．$F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

によって求めることができる．この変換を逆フーリエ変換という．

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

より微分と積分とを入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(-ixf(x)e^{-i\omega x}\Big)dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分との順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する．

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\dfrac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい．

(2) 逆フーリエ変換が $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい．

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-x^2f(x)=-(2n+1)f(x)\ ,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし，n は零以上の整数である．

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を 50 字程度で述べなさい．

(千葉大 2002)　　(m20021205)

0.38 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

(千葉大 2003)　　(m20031201)

0.39 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となることを証明しなさい．ただし，$(x,y) \neq (0,0)$ とする．

(千葉大 2003)　　(m20031202)

0.40 次の 2 重積分を求めなさい．ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする．

$$V = \iint_D \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy \qquad \text{ただし，} D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq b^2\}$$

(千葉大 2003)　　(m20031203)

0.41 次の連立常微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \ \ 3x - y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x + 3y - 1 \end{cases}$$

(千葉大 2003)　　(m20031204)

0.42 次の行列 A について答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を，A の成分を用いて表しなさい．

(2) 行列 A の成分を用いて，原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$,$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する．ここに，^{T} は行列の転置を示す．これらのベクトルを用いて，$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \ \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい．ここで，$\bullet$ は内積，$\times$ は外積を意味する．

(3) 行列式の絶対値が，これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい．

(千葉大 2003)　　(m20031205)

0.43 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/x}$

(千葉大 2004)　　(m20041201)

0.44 半径が a の無限に長い 2 つの直円柱がある．互いの中心軸が直交して交わっている場合，その共通部分を図示し，体積を求めなさい．

(千葉大 2004)　　(m20041202)

0.45 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -xy$ の一般解を求めなさい．

(2) 初期値問題 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -xy + xe^{-x^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ の解を求めなさい．

(千葉大 2004)　　(m20041203)

0.46 次の行列 A について答えなさい．　$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 固有ベクトルを用いて A を対角化しなさい．

(千葉大 2004)　　(m20041204)

0.47　次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　（ただし, a, b は定数.）

(千葉大 2005)　(m20051201)

0.48　n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ を n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_{i+1}$ に移す線形変換

$$\boldsymbol{p}_{i+1}=A\boldsymbol{p}_i$$

を考える. ただし, A は n 次実正方行列である. 次の設問に答えよ.

(1) この線形変換でベクトルのノルム（大きさ）が変化しないための条件を求めなさい.

(2) この線形変換で, ゼロベクトルでない, 変化しないベクトルが存在するための条件を求めなさい.

(千葉大 2005)　(m20051202)

0.49　$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq a^2\}$ として, 次の 2 重積分の値を求めなさい.

$$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

(千葉大 2005)　(m20051203)

0.50　ある運動している点の時刻 t における座標 $(x(t)\,,\ y(t))$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha y(t)+b\\\alpha x(t)+a\end{pmatrix}$$

を満たす. ここで, a, b 及び $\alpha(>0)$ は定数である.

この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(t)\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}-(\boldsymbol{A}(t)-I)\,\boldsymbol{v}$$

と書ける. ただし, $\boldsymbol{A}(t)$ は時刻 t に依存する $2\times\ 2$ の正方行列, I は $2\times\ 2$ の単位行列, $\boldsymbol{v}$ は初期位置 $(x(0)\,,\ y(0))$ に依らない定ベクトルである. 次の設問に答えなさい.

(1) $\dfrac{dy(t)}{dx(t)}$ を t を陽に含まない形で表しなさい.

(2) (1) の微分方程式を解きなさい.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}(t)$ を決定しなさい.

(4) 点 $(x(t)\,,\ y(t))$ はどのような運動をするか簡潔に説明しなさい.

(千葉大 2005)　(m20051204)

0.51　次の関数 y を x で微分しなさい.

(1) $y=x^2-2x-3$　　(2) $y=\dfrac{1}{(x+4)^2}$　　(3) $y=x\sin x$

(千葉大 2005)　(m20051205)

0.52　次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int(x^2+3)\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(千葉大 2005)　(m20051206)

0.53　銀行から A 円を年間の利子 r で借り, 毎年の末に R 円を均等に返済します. このとき, 借り入れから 1 年経過後に R 円を返済した直後の残債 $\boldsymbol{L}_1$ は $\boldsymbol{L}_1=A(1+r)-R$ と表されます.

(1) 2 年目の返済直後の残債 $\boldsymbol{L}_2$ を式で表しなさい.

(2) 10 年目の残債 $\boldsymbol{L}_{10}$ が, ちょうどゼロになるためには, R 円をいくらにするとよいですか. A と r を使って式で表しなさい.

(千葉大 2005) (m20051207)

0.54 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ を x で微分しなさい.

(千葉大 2007) (m20071201)

0.55 次の極限値を求めなさい. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log_{10}x}{x-1}\right)$

(千葉大 2007) (m20071202)

0.56 次の連立方程式を行列式を用いて解きなさい. $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=12 \\ 2x+\ \ y+3z=22 \\ 3x+2y+\ \ z=25 \end{cases}$

(千葉大 2007) (m20071203)

0.57 2006 年日本シリーズでロッテと阪神が戦っているとする. 日本シリーズでは, 先に 4 ゲーム勝ったチームが勝者となり, 引き分けはないものとする. 現時点でロッテが第 1 試合に勝っている. また, 第 2 試合目に勝ったチームが第 4 試合にも勝つとするとき,

２試合目以降のシリーズの行方（経過）は何通りあるか.

**（ロッテの勝数, 阪神の勝数）の組で状態を表現し, 初期状態 $(1,0)$ 以降の経過を解答用紙の図を用いて完成しなさい.

(千葉大 2007) (m20071204)

0.58 下の真理値表の空欄部 (ア)〜(オ) を埋め, これを用いて (1)〜(5) の命題の真偽（真理値）を答え, 簡単な説明を加えなさい.

【真理値表】T は真, F は偽とする.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$
T	T	F	F	T	T	T	(イ)
T	F	F	T	F	T	F	(ウ)
F	T	T	F	F	T	T	(エ)
F	F	T	T	F	(ア)	T	(オ)

(1) 北京は中国の首都であり, かつ, $7\times 5=29$.

(2) 北京は中国の首都であり, または, $7\times 5=29$.

(3) $7\times 5=35$ ならば, 大阪は日本の首都である.

(4) $7\times 5=100$ ならば, 大阪は日本の首都である.

(5) 北京は中国の首都であるとき, そして, そのときに限り $7\times 5=100$ である.

(千葉大 2007) (m20071205)

0.59 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(千葉大 2007) (m20071206)

0.60 $\mathbb{R}^3$ で行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている．次の問いに答えなさい．

(1) A の対称部分 $T_1 = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ と，A の歪み対称部分 $T_2 = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ の各行列を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列を表す．

(2) 対称部分の行列 T_1 の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) 歪み対称部分の行列 T_2 で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めなさい．

(千葉大 2007) (m20071207)

0.61 重積分に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0\,,\ x + y + z \leq \pi/2\}$ を図示しなさい．

(2) 次の不定積分を求めなさい．ただし，a は定数である．
$\displaystyle\int x \sin(a + x) dx$

(3) D を積分領域として，次の 3 重積分の値を求めなさい．
$\displaystyle\iiint_D z \sin(x + y + z) dxdydz$

(千葉大 2007) (m20071208)

0.62 次の微分方程式の解を求めなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = a(y + b)$ ただし，a, b は定数であり，初期値は $y(0) = y_0$ $(y_0 \neq -b)$ とする．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = ky(p - y)$ ただし，k, p は正の定数であり，初期値は $y(0) = y_0$ $(0 < y_0 < p)$ とする．

(千葉大 2007) (m20071209)

0.63 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x})$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(千葉大 2008) (m20081201)

0.64 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい． $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(千葉大 2008) (m20081202)

0.65 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq 2a \cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008) (m20081203)

0.66 実数値関数 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で連続であり，次の関数方程式を満たすとする．

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t-x)f(t)dt$$

(1) $f(0)$, $f'(0)$ を求めなさい．また $f(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を解きなさい．

(千葉大 2008) (m20081204)

0.67 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{e^x - e^4}{x-4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$

(千葉大 2009) (m20091201)

0.68 (1) A, T が正則行列のとき，任意の整数 $m \geq 0$ において，

$$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$$

が成立することを示しなさい．（T^{-1} は T の逆行列）

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) A^5 を求めなさい．

(千葉大 2009) (m20091202)

0.69 $a > 0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい．

$$I(a) = \iint_D e^{-(x+y)}dxdy$$

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい．

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0 < a < +\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい．

(千葉大 2009) (m20091203)

0.70 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4+x}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6+2x}{x^2}y = 0$$

(1) $y = x^2$ がこの微分方程式の解となっていることを示しなさい．

(2) $y = ux^2$ （u は x の関数）がこの微分方程式の解となるために，u の満たすべき微分方程式を求めなさい．

(3) (2) で求めた微分方程式を u について解き，最初の微分方程式の解を求めなさい．

(千葉大 2009) (m20091204)

0.71 次の極限値を求めなさい. ただし, a は定数である.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{1+\sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

(千葉大 2010) (m20101201)

0.72 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に関する以下の問いに答えなさい.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-3\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(1) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示しなさい.

(2) 以下の手順に従って, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ から, 互いに直交する大きさ 1 の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を求めなさい.

(a) $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$ を求める.

(b) $\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{u}_1$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ を求め, $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$ を求める.

(c) $\boldsymbol{a}_3$ の $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に直交する成分 $\boldsymbol{b}_3$ を求め, $\boldsymbol{u}_3=\dfrac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$ を求める.

(千葉大 2010) (m20101202)

0.73 三次元空間 O- xyz 座標系で, 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a>0)$ である.

(千葉大 2010) (m20101203)

0.74 次の線形連立微分方程式を解き, その一般解 $x(t)$, $y(t)$ を求めなさい.

$$\frac{dx}{dt}-3x+y=0$$
$$x-\frac{dy}{dt}+y=0$$

(千葉大 2010) (m20101204)

0.75 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\sin x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-3x-1}\right)$

(千葉大 2011) (m20111201)

0.76 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい.

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\3&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\6\end{pmatrix}$$

(1) A^TA を求めなさい. ただし, A^T は A の転置行列である.

(2) A^TA が逆行列を持つことを示しなさい.

(3) $||A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ と置いたとき, p,q の値を求めなさい. ただし, $||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す.

(千葉大 2011) (m20111202)

0.77 三次元空間 $O-xyz$ 座標系で, 曲面 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z=a^{-1}$ $(1<a)$ で囲まれた図形を図示し, その体積 V を求めなさい.

(千葉大 2011) (m20111203)

0.78 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy + 3x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 3xy - 5xy^{-\frac{1}{3}}$ （ヒント：y の 4/3 乗を z とおいて z の微分方程式に変換すると線形になる.）

(千葉大 2011)　　(m20111204)

0.79 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(千葉大 2012)　　(m20121201)

0.80 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を全て求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ)1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ求めなさい．

(3) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ としたとき．$PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって，P が直交行列であることを確認しなさい．ただし，I は単位行列とする．

(4) $P^{-1}AP$ を計算して，行列 A を対角化しなさい．

(千葉大 2012)　　(m20121202)

0.81 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解きなさい．

(1) $y' + y + y^2 = 0 \quad , \quad y(0) = 1$

(2) $y' + y + x = 0 \quad , \quad y(0) = 2$

(千葉大 2012)　　(m20121203)

0.82 下記の重積分について以下の問いに答えなさい．

$I = \displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \left(x^2+y^2\right)^2 \leq y^2 - x^2 ,\ y \geq 0\right\}$

(1) 極座標に変換して D を図示しなさい．

(2) I で示される積分領域の立体の外形を図示しなさい．

(3) I を極座標で書きなさい．

(4) I を求めなさい．

(千葉大 2012)　　(m20121204)

0.83 次の数列，または，関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$　　ここで，$a_n = 2 + \dfrac{2}{a_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$a_0 = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-3} - x + 1\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(千葉大 2013)　　(m20131201)

0.84 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる．そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1\,,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい．

(3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．ただし，A^n は $A\times\ A\times\ \cdots\times\ A$ を表す．

(千葉大 2013)　　(m20131202)

0.85 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ がある．ただし，$a > 0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$v = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\ , \qquad D = \left\{ (x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leq ax \right\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{ (r, \theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq a\cos\theta \right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　　(m20131203)

0.86 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 8e^{2x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ $\left(\text{ヒント：未知関数を } u(x) = \dfrac{y}{x} \text{ に変換すると変数分離になる}\right)$

(千葉大 2013)　　(m20131204)

0.87 次の関数の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x}$

(千葉大 2014)　　(m20141201)

0.88 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして，横に並べた行列 $P = [\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\ ]$ の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4) $(P^{-1})^T = [\ \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\ ]$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が A^T の固有ベクトルであることを示しなさい．ここで A^T は A の転置行列を表す．

(千葉大 2014)　　(m20141202)

0.89 三次元空間 $O - xyz$ 座標系で，円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ が 2 つの平面 $z = bx$ $(b > 0)$ と $z = 0$ とで切り取られる立体について，以下の問に答えなさい．

(1) 立体を図示しなさい．

(2) xy 平面上に極座標系 $(r,\ \theta)$ をとって，$O - r\theta z$ 円柱座標系で見た場合，z 軸を通る θ 平面と $\theta + d\theta$ 平面とで立体が切り取られる体積 dV を求めなさい．

(3) 立体の体積 V を求めなさい．

(千葉大 2014)　　(m20141203)

0.90 次の微分方程式の解を求めなさい.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+2x=0\,,\quad x(0)=1\,,\quad x'(0)=\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0\,,\quad t\geq 0$

(2) 上で得られた $x(t)$ を用いて $y(t)=\dfrac{dx}{dt}$ として, $O-xy$ 直交座標系上で点 $P\big(x(t),y(t)\big)$ を定義する. $t\geq 0$ に対して点 $P(x,y)$ の描く曲線をグラフで示しなさい. （ヒント：点 P の座標の減衰項を除いた場合の曲線を先に求める.）

(千葉大 2014)　　(m20141204)

0.91 次の関数の極限に関する問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+7x-6}{3x^2-2x-8}$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e)-1}{x}$ を求めなさい. ここで, e は自然対数の底である.

(千葉大 2015)　　(m20151201)

0.92 三次元ユークリット空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され, 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられている. このとき, 以下の問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\;,\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\;,\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ として, 行列 A^TA を求めなさい. ここで, A^T は A の転置行列である.

(3) 行列 A^TA の逆行列 $\left(A^TA\right)^{-1}$ を求めなさい.

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0=\left(A^TA\right)^{-1}A^T\boldsymbol{c}$ を求めなさい.

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め, このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, 及び, ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき, 点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり, かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し, 行列 $A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151202)

0.93 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた, 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$, および, 二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.

(3) 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2015)　　(m20151203)

0.94 次の微分方程式の一般解を求め, 与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示しなさい.

(1) $\left(x^2-xy\right)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$　　初期条件：$x=e$, $y=e$, ここで, e は自然数の底である.

（ヒント：$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて未知関数 $y(x)$ を $u(x)$ に変換する ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+17y=0,\ x\geq 0$　　初期条件：$x=0,\ y=1,\ y'=-1$

(千葉大 2015)　　(m20151204)

0.95 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0,0,z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ<\theta<90^\circ$，$0^\circ<\varphi<180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B=(\lambda\cos\theta\cos\varphi+x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta+z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$，$a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.96 (1) $x=0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i=0.1,2,3,4)$ を求めなさい．

$\cos(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x+1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.97 次の行列 A, B について，以下の問に答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}$$

(1) 行列の基本変形を用いて，行列 A および行列 B の階数を求めなさい．

(2) 行列 A および行列 B が正則であるならば，逆行列を求めなさい．

(3) 行列 A を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\33\\10\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(4) 行列 B を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161202)

0.98 次の重積分に関して以下の問に答えなさい．

$$I=\iint_D\frac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$$

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leq y\leq 2\,,\ 0\leq x\leq y\right\}$$

(1) 積分領域 D を $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D，および，$O-uv$ 平面での D' を図示しなさい．

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.99 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = \sin t$　　初期条件：$t = 0,\ y = 1,\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + \sqrt{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4xe^{x^2}$ の一般解を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161204)

0.100 以下の微分方程式を解き，x の関数 $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ とする．

$$\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)^2 + 3\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) - 4 = 0$$

(千葉大 2016)　　(m20161205)

0.101 実数 $t \geq 0$，実数 $a > 0$ について定義された関数 $f(t) = \sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s) = \int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.102 $(4 \times\ 4)$ の正方行列 A の第 i 行第 j 列の要素 $\{a_{ij}\}$ が $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ で与えられるとき，

行列 A の固有値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161207)

0.103 次の問に答えなさい．ただし，$\log x$ の底は，自然対数の底 (e) とする．

(1) (a) 関数 $\log(1+x)$ と $x\cos x$ を，それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x\cos x}\right)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}}\right)$ を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}(1 - \tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい．

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.104 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列 A は，異なる二つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ を持つ（ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$）．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めなさい．

(2) 行列 A は，ある直交行列 Q によって $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ と対角化できる．この直交行列 Q を求めなさい．（なお，実正方行列 Q が ${}^tQQ = I$（I は単位行列）を満たすとき，Q を直交行列という）

(千葉大 2017)　　(m20171202)

0.105 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2+y^2 \leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$（ただし，$a>0$）について，以下の問に答えなさい.

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい.

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171203)

0.106 次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=-2$，初期条件 $t=0$ のとき $y=2$，$\dfrac{dy}{dt}=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=\cos t-2t$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171204)

0.107 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} t+4 & -3 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ （ただし，t は実数）が正則であるための条件を示しなさい.

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 B^{-1} を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171205)

0.108 (1) 行列 $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171206)

0.109 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ただし，a, $b>0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a,0)$，点 B の座標は $(0,b)$ であり，点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい.

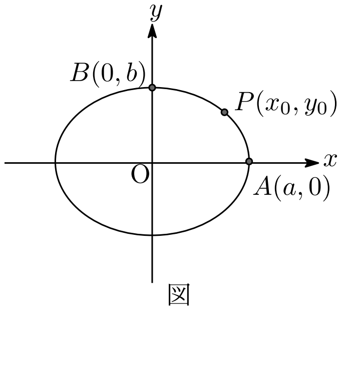
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を x, y, a, b, x_0, y_0 を用いて表しなさい.

(2) $x_0=a\cos\theta$, $y_0=b\sin\theta$ （ただし，$0<\theta<\pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を x, y, a, b, θ を用いて表しなさい.

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを a, b, θ を用いて表しなさい.

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を a, b を用いて表しなさい.

(5) 線分 CD の最小値を a, b を用いて表しなさい.



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)