[選択項目] 年度：1991〜2023 年　 大学：東北大

0.1　$f(x)$ は x の多項式で，等式 $\left\{\begin{array}{ccc} f(0) & = & 0 \\ f(x)-f(x-1) & = & (2x-1)^3 \end{array}\right.$ を満たす．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　次の級数の和を計算せよ．

$$(\sin x+1)^3+(\sin x+3)^3+(\sin x+5)^3+\cdots+(\sin x+2n-1)^3$$

(東北大 1993)　　(m19930501)

0.2　放物線

$$y=-\frac{1}{2}x^2+x \qquad (*)$$

の上の点 $P(a,b)$ において，放物線より上側に中心 $Q(X,Y)$ をもつ半径 $\sqrt{(a-1)^2+1}$ の円 C が接している．次の問いに答えよ．

(1)　円 C の中心 Q の座標 (X,Y) を a で表せ．

(2)　点 P が放物線 $(*)$ 上を動くとき，円 C の中心 Q が描く曲線の方程式を求めよ．

(3)　中心 Q が直線 $x+2y=6$ に最も近づくとき，中心 Q の座標 (X,Y) を求めよ．

(東北大 1993)　　(m19930502)

0.3　なめらかな曲線 $y=f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　曲線上の点 $P(a,b)$ における法線と x 軸との交点の座標が $\left(\frac{1}{2}(a+b^2),0\right)$ であるとき，関数 $y=f(x)$ の満たす微分方程式を導け．

(2)　(1) の微分方程式を満たし，点 $(0,2)$ を通る曲線の方程式を求めよ．また，$-3\leq x\leq 1$ において，この曲線の概形を描け．必要ならば，$e=2.718\cdots$，$e^{-1}=0.367\cdots$，$e^{-1.5}=0.223\cdots$ を使ってもよい．

(東北大 1993)　　(m19930503)

0.4　２行２列の行列 $P=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q=I-P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は２行２列の単位行列である．

(1)　点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ．

(2)　正の整数 n に対して，$Q^n=(p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ．

(3)　$|P+q-1|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P^n$ を求めよ．

(東北大 1993)　　(m19930504)

0.5　xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq x(a-x),\ 0\leq z\leq by^2$$

ただし，a,b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1)　G を平面 $x=\dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2)　G の体積 V を求めよ．

(3)　a と b に関係 $b=e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940501)

0.6　関数 $f(x)>0$ は閉区間 $[a,b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a,0)$ と動点 $P(x,0)$ をとる．ただし，$a<x\leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な２直線と曲線 $y=f(x)$ との交点をそれぞれ B,Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 弧 BQ の長さを求める式を書け．

(2) 曲線 $y=f(x), x$ 軸，直線 AB, 直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け．

(東北大 1994)　　(m19940502)

0.7　2 行 2 列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P=\begin{pmatrix} 1+\cos x & \sin x \\ \sin x & 1-\cos x \end{pmatrix} \quad , \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P^2 を計算せよ．

(2) 正整数 n に対して P^n を求めよ．

(3) 正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940503)

0.8　xy 平面上に 2 点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ がある．原点 O と点 P,Q は同一直線上にはなく，また $d\neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P,R を通る直線と x 軸との交点 $S(e,0)$ の x 座標 e を a,b,c,d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0,d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940504)

0.9　次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta=a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta \quad (a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ が，2 平面 $z=ax,\ z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.10　滑らかな曲線 $y=f(x)$ 上の第 1 象限にある 1 点 P における法線が x 軸と交わる点を N とし，次の問いに答えよ．

(1) 長さ PN を求めよ．

(2) PN と点 P の y 座標の平方の比が一定値 k であるとき，点 $(0,1/k)$ を通る曲線の方程式を求めよ．

(東北大 1995)　　(m19950502)

0.11　2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ から 4 行 4 列の行列

$$C=\begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

を作り，$C = A \otimes B$ と表わす．$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおいて，次の問いに答えよ．

(1) $X \otimes Y$, $Y \otimes X$ を求めよ．

(2) $X^{-1} \otimes Y^{-1}$ を求めよ．ただし，A^{-1} は行列 A の逆行列を表わす．

(3) (1) で求めた 4 行 4 列の行列 $X \otimes Y$ の固有値を求めよ．

(東北大 1995)　　(m19950503)

0.12 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_n(x)$$

とおくとき，$|x| < 1$ の範囲で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ となることを示せ．

(2) (1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x| < 1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x| < \frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996)　　(m19960501)

0.13 次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式を $y(0) = a$ の条件の下に解け．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}xy = x + \frac{1}{4}x^3 \qquad (*)$$

(2) x の関数 $y(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}(\cos xt + x^2 t)dt$ について，式 $(*)$ が成り立つことを示せ．ただし，微分と積分の順序は交換できるものとする．

(東北大 1996)　　(m19960502)

0.14 3 つの 1 次変換を f, g, h とし，これらを表す行列をそれぞれ A, B, C とおく，また，任意の点 $P(x, y)$ の 2 つの合成変換 $f \circ h$, $h \circ g$ を $f \circ h(P) = f(h(P)), h \circ g(P) = h(g(P))$ と定義し，$f \circ h = h \circ g$ が成立するとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ，$C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a \neq 0$ の実定数とする．

(1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2) g を表す行列 B を求めよ．

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 Q の変換 $f \circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996)　　(m19960503)

0.15 関数　$F(x) = x \log x - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$　の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を　$f(x) = F'(x)$　と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ．

(2) 等式　$f(c) = 0 \quad (1 < c < 3)$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(東北大 2001)　　(m20010501)

0.16 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を $\quad f_1(x)=\dfrac{1}{10}e^{2x},\quad f_2(x)=x^2\log(x+1)\quad$ と定義する．

(1) 定積分 $S_1=\displaystyle\int_0^a f_1(x)dx,\ \ S_2=\int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a+b=1$ という関係があるとき，$S=S_1+S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a+b=1,\ \ 0<a<1,\ \ 0<b<1$$

を満たすと仮定する．$S=S_1+S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001) (m20010502)

0.17 点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,\quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1,y_1,x_2,y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001) (m20010503)

0.18 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数 $\quad f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\quad$ をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y=\tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数 $\quad F(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty<x<\infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y=F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003) (m20030501)

0.19 関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0\quad (x\geqq 1)\qquad\text{(a)}$$

および，初期条件

$$x=1\text{ のとき}\quad f=1,\ \frac{df}{dx}=0\qquad\text{(b)}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t = \log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t = 0 \text{ のとき } \quad y = 1\,,\ \frac{dy}{dt} = 0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な 2 × 2 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.20 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y = ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y = ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.21 実数 y の関数:

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-\beta y}}\ , \qquad (-\infty < y < \infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$,　b) $\beta = 0$,　c) その他の場合.

の各々について， $x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1 - x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \le x \le 1$ であり， $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ の意味で $0\log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x)-\alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \leq x \leq 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.22 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1<x<1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty<x<\infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x)=e^{x^2} \quad , \quad h(x)=\frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y=h(x)$ の $-\infty<x<\infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004） (m20040502)

0.23 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える. 球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし, $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き, その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする. この時, 各ベクトルの成分は $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$ と表せる.

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ.

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ.

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ.

(4) 正四面体の体積を求めよ.

（東北大 2004） (m20040503)

0.24 2 次曲線 C : $3x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2-18=0$ は, 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp}-18=0$ と表すことができる. ただし, ${}^t\boldsymbol{p}=(x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x', y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸 , y 軸と x' 軸 , y' 軸の関係を図示し，2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050501)

0.25 x を実数として, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 e^{ax}$ と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050502)

0.26 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005) (m20050503)

0.27 $m = 1, 2, \cdots$ に対して $\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0$ を示せ.

(東北大 2005) (m20050504)

0.28 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 ; |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.29 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x,y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　　(m20050506)

0.30 円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(3) 領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006)　　(m20060501)

0.31 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を　$f(x) = x - \sin x$　と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.

(4) 任意の実数 x について不等式　$|x| \geqq \sin|x|$　が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006)　　(m20060502)

0.32 対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　で定義する.

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ．ただし, n は自然数とする.

(東北大 2006)　　(m20060503)

0.33 (1) a, b, c, p, q, r を実数とし,

$$D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．任意の自然数 k に対し,

$$(D+N)^k = D^k + M\ , \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．ただし, α, β, γ は適当な実数である.

(2) ３次正方行列 A がある自然数 n に対して $A^n = O$ を満たすとき, $A^3 = O$ であることを示せ．ただし, O は零行列である.

(東北大 2006)　　(m20060504)

0.34 ４次元数ベクトル空間の部分空間 V と W を

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0\,,\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + 5x_4 = 0\,,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0\}$$

と定義する．以下の設問に答えよ.

(1) V と W の次元を求めよ.

(2) $V \cap W$ の次元を求めよ.

(3) $V + W = \{v + w \mid v \in V\,,\ w \in W\}$ の次元を求めよ.

(東北大 2006)　　(m20060505)

0.35 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 < 4\,,\ x > 0\,,\ y > 0\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(東北大 2006)　　(m20060506)

0.36 (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ（証明はしなくてよい）.

$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$

(2) $x > 0$ で定義された関数 $h(x) = x^4 \log x$ を考える．$\displaystyle\lim_{x \to +0} h(x)$ を求めよ.

(3) $0 < m < 4$ であるような自然数 m に対し, (2) で定義した $h(x)$ の m 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ．また, $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(m)}(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(4)}(x)$ は存在するか.

(東北大 2006)　　(m20060507)

0.37 ３次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ について A^2, ${}^t\!AA$, A^{-1} を求めよ．ここで, ${}^t\!A$ は A の転置行列を表す.

(東北大 2007)　　(m20070501)

0.38 行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ で $f(v) = Bv$ と定義される線形写像（1 次写像）$f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について，像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(東北大 2007) (m20070502)

0.39 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\sin x}$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ．

(東北大 2007) (m20070503)

0.40 領域 $D = \{(x, y) \mid x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\}$ での広義重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(4 + 2x + y)^3}$ の値を求めよ．

(東北大 2007) (m20070504)

0.41 x, y を実数とし，$0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ．

(3) $f(x, y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$，$y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007) (m20070505)

0.42 $y = y(x)$ $(y \neq 0)$，$z = z(x)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $z = y^{-4}$ のとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を y および $\dfrac{dy}{dx}$ を用いて表せ．

(2) 変数変換 $z = y^{-4}$ を用いて，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + yP(x) = y^5\, Q(x)$ を z に関する微分方程式に書き表せ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + xy = \dfrac{1}{2} xy^5$ の一般解を求めよ．

(東北大 2007) (m20070506)

0.43 x と y を実数とし，関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ と定義する．
不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x, y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．

(2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z = f(x, y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007) (m20070507)

0.44 x を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(4) 関数 $g(x)$ を　$g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$　により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080501)

0.45　t を実数とし，2 つの関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t), y(t))$ を考える．$x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする．ただし，α は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(2) $\alpha \neq 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(3) $t\ (t \geqq\ 0)$ が変化するとき，点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0,\ \alpha = 0,\ \alpha < 0$ の場合について描け．

(東北大 2008)　　(m20080502)

0.46　行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．2 次形式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10z^2$ を標準形 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x + y + z = 1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008)　　(m20080503)

0.47　行列　$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080504)

0.48　3 次正方行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$　について，行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080505)

0.49　$f(x) = \sin^2 x$ を $x = 0$ の近くで 3 次までテーラー展開せよ．

(東北大 2008)　　(m20080506)

0.50 実数上の 1 階連続的微分可能関数 $f(x)$ がすべての点 x で $\dfrac{df}{dx}(x)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は定数関数であることを示せ．

(東北大 2008)　　(m20080507)

0.51 領域 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\ ,\ x^2\leq y\leq 1\}$ で　$\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\ dxdy$　の値を求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080508)

0.52 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) ３辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，２点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.53 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin(a\cos x)$$

と定義する．ただし，a は実数の定数である．$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a=1$ のとき $f(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(2) $a=1$ のとき $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(3) $a=\pi$ のとき $y=f(x)$ の区間 $0\leqq\ x\leqq\ 2\pi$ における増減,極値を調べ，増減表を書き，グラフの概形を描け．ただし，グラフには $y=0$ となる点の x の値も記すこと．

(東北大 2009)　　(m20090502)

0.54 t, x, y を実数，A を実数の定数とし，以下の問いに答えよ．

(1) 置換 $t=x+\sqrt{x^2+A}$ を用い，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$ を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx$ を求めよ．

(3) $x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0$．曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の長さを求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090503)

0.55 変数 x に関する n 次以下の実数係数多項式の全体を $P_n[x]$ とおくと，$P_n[x]$ は $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ を基底とする実ベクトル空間である．このとき，次に答えよ．

(1) $W=\{p(x)\in P_4[x]\ :\ p(0)=p(1)=0\}$ の基底を求めよ．

(2) $D(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$ によって定義される関数 $D\ :\ P_3[x]\to P_2[x]$ が線形写像であることを示せ．

(3) (2) の関数 D が全射であるか否かについて述べよ．

(4) (2) の関数 D が単射であるか否かについて述べよ．

(東北大 2009)　　(m20090504)

0.56 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．さらに，A を対角化する直交行列を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090505)

0.57 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090506)

0.58 関数 $f(x) = x^{1/5}$ のテーラー展開を用い，$30^{1/5}$ の小数展開を誤差 (剰余項 R_n) < 0.0001 の範囲で求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090507)

0.59 領域 $D = \{(x, y) : 0 \le x + y \le 2,\ 0 \le x - y \le 2\}$ として，次の計算をせよ．

$$\iint_D (x - y)e^{x+y} dxdy$$

(東北大 2009)　　(m20090508)

0.60 x を非負の実数, r を $0 < r < 1$ を満たす実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xr^x$$

と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の増減表を書き, 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) n を正の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = f(n - 1)$ により定義する. このとき, 初項から第 n 項までの和を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100501)

0.61 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m = 0, 1, 2, 3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t \sin^2 t\, dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.62 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) $A^5 - 13A^3$ を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を 1 つ求めよ. また, その逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2010)　　(m20100503)

0.63　実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100504)

0.64　xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ．

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ．

(3) 領域 R の面積を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110501)

0.65　x を実数とし，　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.66 $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\left(\dfrac{1}{2}A\right)^n v\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき, その極限を

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす. この極限が存在し 0 でないとき, 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110503)

0.67 $\mathbb{R}^4$ における 4 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ について,

以下の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ の一次結合で表せ.

(東北大 2011)　　(m20110504)

0.68 $n \geq 5$ とし, n 次以下の実多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ のなす線形空間を W とし

$$V = \{f(x) \in W \mid f'(1) = f''(1) = 0\}$$

とおく(V は W の部分空間である). V の基底および次元を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110505)

0.69 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011)　　(m20110506)

0.70 重積分

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

の値を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110507)

0.71 数列 $\{a_n\}\,(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ とする．このとき．$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ．

(2) $(n+2)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}\cos\theta+na_n=0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて $a_n\,(n \geqq 3)$ を表せ，ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1=1,\ a_2=i$ (ただし $i=\sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 $OA_nA_{n+1}\,(n \geqq 3)$ の面積を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.72 3 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される 2 次形式

$$f(\boldsymbol{m})={}^t\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}=5x^2+2y^2+5z^2+4xy+4yz+8xz$$

を考える．ここで，左上付き添字 t は転置を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．また，各固有値の重複度を答えよ．

(3) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を 1 つ求めよ．また，この $\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(4) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ を考える．(3) で求めた $\boldsymbol{P}$ を用いて変数変換 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ を行い，$f(\boldsymbol{m})$ の標準形を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120502)

0.73 点 $P(0,-1)$ を通る直線と曲線 $C\ :\ y=-x^2+2x$ が 2 点 $Q,\,R$ で交わるとき，以下の問いに答えよ．ただし，点 Q の x 座標を a として，$0<a<2$ とする．

(1) 点 $Q,\,R$ それぞれにおける曲線 C の接線 ℓ_Q , ℓ_R の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 ℓ_Q , ℓ_R の交点の軌跡を求めよ．

(3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき，y 軸，曲線 C，接線 ℓ_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し，この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ．

(東北大 2012)　　(m20120503)

0.74 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

と定義する．ここで，s は $\mathrm{Re}(s)>1$ を満たす複素数である．

以下の問いに答えよ．ただし，関数 $f(t)$ は $f(0)=0$ を満たすとする．

(1) $f'(t),\ e^{-t}f'(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $s,\ F(s)$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau\,,\ e^t\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau$ のラプラス変換を，それぞれ $s,\ F(s)$ を用いて表せ．

(3) 次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\,d\tau = e^t$$

をラプラス変換により，s と $F(s)$ を用いて表せ．

(4) (3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120504)

0.75 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め，これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ．

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする．つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である．$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であるとき，p を q, r, s で表せ．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする．

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120505)

0.76 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^N$ のベクトル $v_1, \cdots, v_m$ が一次従属であるとする．このときある v_i は v_j (ただし, $j \neq i$) の一次結合であることを示せ．

(2) V, W は $\boldsymbol{R}^N$ の部分空間で $V \subset W$ をみたすとする．V の任意の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対し，それをふくむ W の基底が存在することを示せ．

(東北大 2012)　　(m20120506)

0.77 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えよ．

(1) (x,y) が実平面全体をうごくとき，$f(x,y)$ の臨界点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点}\right)$ をすべて求めよ．

(2) 各臨界点について，それが f の極値を与えるか調べよ．

(3) 点 (x,y) が円 $x^2+y^2=1$ の上をうごくとき，関数 $f(x,y)$ の最大，最小とそのときの x,y の値を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120507)

0.78 数列

$$a_n = \frac{-n^2+3n-1}{n^2+1} \qquad (\text{ただし } n=1,2,\cdots)$$

について，その最大値，最小値および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120508)

0.79 z を正の実数とする．実変数の関数 $f(x)$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz}f(x)dx$ が存在するとき，これを $I[f](z)$ と書くことにする．

(1) f が区間 $[0,\infty)$ で連続かつ有界であれば，$I[f](z)$ が存在することを示せ．

(2) a を実数とする．$I[\sin ax](z)$，$I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120509)

0.80 x を正の実数とし，関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する．

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減表を書き，関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $y=f(x)$，$y=0$，$x=b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ．ただし，b は $b>1$ を満たす実数とする．

(東北大 2013)　　(m20130501)

0.81 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t=\dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.82 行列 A と行列 B を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) AB を求めよ．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) A の固有値を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130503)

0.83 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．

$$f(x) = \frac{-ax^2 - (a-1)}{x^2+1} \qquad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ．ただし，$y = f(x)$ は x 軸と 2 つの交点 A および B をもつものとする．

(1) $y = f(x)$ が x 軸と 2 つの交点をもつ a の条件を示し，交点 A，B の x 座標 x_A，x_B（ただし $x_A > x_B$）求めよ．

(2) $y = f(x)$ の増減表を示し，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 交点 A, B における接線の方程式を求め，その接線 2 本の交点の座標を求めよ．

(4) $y = f(x)$ と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_1 と，(3) で求めた 2 本の接線と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_2 を求め，S_1 と S_2 の大小関係を示せ．

(東北大 2014)　　(m20140501)

0.84 3 次の対称行列 A および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $f(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで，左上付き添字 ^{t} は転置を表す)．$f(x,y,z)$ を x, y および z の多項式で表せ．

(3) 原点を通り A の固有ベクトルに平行な直線と，2 次曲面 $f(x,y,z) = 18$ との交点をすべて求めよ．

(東北大 2014)　　(m20140502)

0.85 以下の問いに答えよ．

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 7, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ．

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(3) 次の条件を満たす c_2，c_3 および c_4 を求め，数列 $\{c_n\}$ を推定せよ．また，その推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$c_1 = 2, \qquad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

(東北大 2014)　　(m20140503)

0.86 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ の関係を用いて，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし， $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(東北大 2015) (m20150501)

0.87 $\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことを示せ.

(東北大 2015) (m20150502)

0.88 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ.

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015) (m20150503)

0.89 xyz 空間の曲面 $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a, b, c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z) = 0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z) = 0$ 上の点となるとき，a, b, c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z) = 0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a, b, c の値を求めよ．

(東北大 2015) (m20150504)

0.90 x を実数とする．$n \times n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である．

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ．

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = -\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)| - |\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)| = 1$，$|\boldsymbol{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする．

(5) $\lambda = -2\cos\theta$，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = \dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta \neq 0$ である．

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}=0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda=-2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n=2$, $n=3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.91　3 次実対称行列 $A=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&-2&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して，固有空間の次元を求めよ．

(3) 3 次直交行列 P で，${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ．ただし，${}^tP$ で P の転置行列を表す．

(東北大 2015)　　(m20150506)

0.92　a は負，b は正の定数とする．3 次実正方行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&4\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ．

(2) A が正則行列のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150507)

0.93　$a_n\geq 0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束し，$a_n\neq 1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150508)

0.94　関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を　$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0\ のとき)\\ 0 & (x=0\ のとき)\end{cases}$　と定める．

(1) f は $x=0$ で連続であることを証明せよ．

(2) f は $x=0$ で何回微分可能か．

(東北大 2015)　　(m20150509)

0.95 (x, y) 座標平面において，4 本の直線

$$y = x, \quad y = x - 1, \quad y = -x + 1, \quad y = -x + 3$$

で囲まれた閉領域 D を考える．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{x - y}{x + y}\, dxdy$$

を，変数変換 $u = x + y,\ v = x - y$ を用いて求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150510)

0.96 a, b, c を正の実数とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，$a \neq 1,\ c \neq 1$ とする．

(1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つことを示せ．

(2) 方程式 $\log_a x = 2x$ の実数解が 1 つだけになるための a の条件を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160501)

0.97 領域 $D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2} x^2 \leqq y \right\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 D の面積 S を求めよ．

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S} \iint_D x dxdy\, ,\ \frac{1}{S} \iint_D y dxdy \right) \qquad S: \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.98 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x - 1)^n}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.99 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30$回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}_1' \ \ \boldsymbol{e}_2')$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016) (m20160504)

0.100 V を実ベクトル空間とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) n 個の元 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n \in V$ の中に同じものがあれば，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ は一次従属であることを示せ．

(2) n 個の元の組 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_n \in V$ は一次独立とし，$C = (c_{ij})_{ij}$ を n 次実正方行列，$\boldsymbol{a}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{b}_j$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることの必要十分条件は C が正則行列であることを示せ．

(東北大 2016) (m20160505)

0.101 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ．

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリッド空間における標準的な距離とする．

(東北大 2016) (m20160506)

0.102 (1) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2 dxdy$ の値を求めよ．

(2) $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016) (m20160507)

0.103 実数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) において，「 $a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right| < \dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ．

(東北大 2016) (m20160508)

0.104 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が以下の条件 (i),(ii) を満たすとする．

(i) $f(0) = 0$ (ii) $\left|x - y\right| \leq 1$ ならば $\left|f(x) - f(y)\right| \leq 1$ が成り立つ．

以下の問いに答えよ．

(1) $\left|f(1)\right| \leq 1$ を示せ． (2) $\left|f(1.5)\right| \leq 2$ を示せ．

(3) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して　$\bigl|f(x)\bigr| \leq |x| + 1$　が成り立つことを示せ.

(東北大 2016)　　(m20160509)

0.105 実数 x を含む次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ x-1 & -x & 0 \\ 1-x & x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}^2$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ を次式で定義する. n が 3 以上の整数であるとき, $\boldsymbol{B}$ を n と x を用いて表せ.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^n + n\boldsymbol{A}^{n-1} - \boldsymbol{A}^{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2017)　　(m20170501)

0.106 xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S} : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4z$ および平面 $\boldsymbol{P} : z = a(x+y+2)$ について, 以下の問に答えよ. ただし, a は正の実数とする.

(1) 平面 $y = -1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め, 図示せよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える. $a = 1$ のとき, $\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ.

(3) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ.

(4) $a = 1$ のとき, 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170502)

0.107 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について, 以下の問に答えよ.

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし, b_1 と b_2 は正の整数とする.

(a) $b_1 = 21$, $b_2 = 27$ のとき, b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ.

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき, b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ.

(3) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について, 以下の問に答えよ.

$$-1 < c_1 < 0, \qquad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき, c_2 を求めよ.

(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ.

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し, さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170503)

0.108 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(2) x, y, z の連立方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は解を持つか, その理由も答えよ.

(東北大 2017)　　(m20170504)

0.109 実数を成分とする 4 次元列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ で表す. $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を考える. a_1 と a_2 が生成する部分空間を W_1 とし, a_3 と a_4 が生成する部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) W_1 および W_2 の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元を求めよ.

(3) $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170505)

0.110 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\right\}$ とするとき, 積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.111 $0 \leq t < 1$ とする. 各 t について, 次の関数の極大値をとる点と極小値をとる点を求めよ. 極値を求める必要はないが, 極大か極小であるかは明記すること.

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)(x - t) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

(東北大 2017)　　(m20170507)

0.112 (1) 0 以上の整数 n に対して,

$$\int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し, その極限を求めよ.

(東北大 2017)　　(m20170508)

0.113　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

0.114　関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．次の問いに答えよ．

$$f(x) = e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1)　$f(x) = 0$ となる x を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，この関数の増減表を示せ．

(3)　k を実数とする．$f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180502)

0.115　xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1)　$t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

(2)　曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3)　曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4)　曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.116　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180504)

0.117　次の行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式 $|\boldsymbol{B}|$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -8 \\ 5 & -7 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018)　　(m20180505)

0.118　次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^t$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の転置行列を表す.

(東北大 2018)　　(m20180506)

0.119 標準的内積をもつ 6 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^6$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_6\}$ とし，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_6$ とおく.

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に直交する $\mathbb{R}^6$ のベクトル全体を W とおくとき，W は部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) W の基底を 1 つ与えて，それが基底であることを示せ.

(3) W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180507)

0.120 (1) n 次正方行列 A, B を用いて $2n$ 次正方行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

で定めるとき，等式

$$\det C = \det(A+B) \times \det(A-B)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\det C$ は C の行列式を表す.

(2) 4 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対応する固有空間の基底を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180508)

0.121 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ.

(東北大 2018)　　(m20180509)

0.122 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ.
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k)-g(a,b)-(\alpha h+\beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことをいう.

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.123 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n=\int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x\geq 0$ に対し

$$0\leq \cos x-1+\frac{x^2}{2}\leq\frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left|b_n-1+\frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right|\leq\frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\left|f(x)\right|dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 α, β に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n=e^\alpha$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.124 xy 平面上の点 P の座標 (x,y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t)=(1+\cos t)\cos t \\ y(t)=(1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(3) 曲線 C と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.125 xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2,0,a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある. 以下の問に答えよ．ただし，a, r はそれぞれ実数であり，$r>0$ とする.

(1) S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ.

(2) S_1 と S_2 が交線をもつとき，交線を含む平面の方程式を求めよ.

(3) $a = 0$, $r = \sqrt{3}$ のとき，S_1 と S_2 の交線を C とする．交線 C の方程式を求めよ.

(4) 点 $Q(0, 0, \sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする．点 R が交線 C 上を動くとき，点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019)　　(m20190502)

0.126 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を表す.

(3) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を表せ.

(東北大 2019)　　(m20190503)

0.127 次の行列 $\boldsymbol{B}$ について，以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}^2$ と $\boldsymbol{B}^3$ を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{B}^n$ を表せ.

(東北大 2019)　　(m20190504)

0.128 t を実数とする．3× 4 行列 A を次で定義する．　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ．また，W の基底を一組求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190505)

0.129 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ.

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき $a_5,\ a_6$ を $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を用いて書き表せ.

(3) $i=1,2,3,4$ に対して, 実数列 $\{e_n^{(i)}\}=\{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は,

$$e_n^{(i)}=\begin{cases}1 & (n=i\ のとき),\\ 0 & (n=1,2,3,4,\ n\neq i\ のとき)\end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする. このとき, $\{e_n^{(1)}\},\ \{e_n^{(2)}\},\ \{e_n^{(3)}\},\ \{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ.

(4) 線形写像 $T:W\to W$ を,

$$T(\{a_n\})=\{b_n\} \qquad ただし \qquad b_n=a_{n+1}\ \ (n=1,2,\cdots)$$

で定める. このとき, 設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ. また, その行列式を求めよ.

(東北大 2019) (m20190506)

0.130 次の正方行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ -1 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値それぞれに対して, その固有空間の基底を求めよ.

(3) 実 3 変数 x,y,z の関数 $f(x,y,z)$ を次で定義する.

$$f(x,y,z)=4x^2+4y^2+5z^2-2xy-4yz-4zx$$

このとき $f(x,y,z)$ の, 条件

$$x^2+y^2+z^2-1=x+y+z=0$$

のもとでの最大値と最小値を求めよ.

(東北大 2019) (m20190507)

0.131 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ.

(東北大 2019) (m20190508)

0.132 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^3-3x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$ を求めよ.

(東北大 2019) (m20190509)

0.133 重積分

$$\iint_D(3x^2+y^2)dxdy \qquad \left(D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq x\right\}\right)$$

の値を求めよ.

(東北大 2019) (m20190510)

0.134 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(2,1,k)$, $B(0,2,0)$, $C(2,0,0)$ がある．ただし，k は正の実数である．線分 BC, OC の中点をそれぞれ D, E とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\angle DAE=30^\circ$となるときの　k を求めよ．

(3) $k=1$ のとき，原点から点 A, B, C を通る平面におろした垂線を ℓ_1 とし，平面との交点を H とする．

(a) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ と表すとき，実数 s, t を求めよ．

(b) 点 A, D を通る直線を ℓ_2 とするとき，直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 の最短距離を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200501)

0.135 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^{2n-1}x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.136 (1) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B について，以下の問に答えよ．

$$B=\begin{pmatrix}6&3\\4&5\end{pmatrix}$$

(a) 行列 B の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(b) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ とする．n が 1 以上の整数であるとき，ベクトル $B^n\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(3) 次の行列 C について，以下の問に答えよ．

$$C=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．ただし，P^{-1} は P の逆行列を表す．

(b) n が 1 以上の整数であるとき，行列 C^n を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200503)

0.137 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210501)

0.138 次の行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021)　　(m20210502)

0.139 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(b) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を示す.

(c) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{C}^n$ を表せ.

(東北大 2021)　　(m20210503)

0.140 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．また，点 A，点 B を直径の両端とする球面を S とする．以下の問に答えよ.

(1) 線分 AB 上に点 P があり，点 A と点 P の間の距離を s とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ.

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，球面 S の方程式を示せ.

(3) $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$，$\boldsymbol{b} = (0, 2, 1)$ のとき，点 $D(0, 0, d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする．ただし，d は $d > 1$ を満たす実数である.

　(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする．点 T の座標を $(p, q, 0)$ と表すとき，p および q が満たす方程式を求めよ.

　(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し，その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210504)

0.141 微分方程式

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a^2u(t) = F(t)$$

について，以下の問いに答えよ．a は 0 でない実数とする.

(1) $F(t) = 0$ のとき，一般解を求めよ.

(2) $F(t) = \sin(at)$ のとき，一般解を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210505)

0.142 次の関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．x, y の範囲はそれぞれ $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$ とする．

$$f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$$

(1) 次の偏導関数を求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(2) 次式を満足する (x,y) の値をすべて求めよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210506)

0.143 n を 1 以上の整数とし，V を n 次元実ベクトル空間とする．S と T を V から V への線形写像とし，I を V から V への恒等写像とする．$S \circ T = I$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とするとき，$\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ も V の基底であることを示せ．

(2) T は全射であることを示せ．

(3) $T \circ S = I$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210507)

0.144 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

0.145 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, \infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

と定める．I 上の関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$(*)$　$f_0(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \{f(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \quad (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$

と帰納的に定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の I における最大値を求めよ．

(2) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x)\{1 - f(x)\}^n$$

が成り立つことを示せ.

(4) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に I 上で一様収束することを示せ.

(東北大 2021)　　(m20210509)

0.146 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) f は $(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210510)

0.147 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + xy - 2x + 2y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) f の極値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

における f の最大値と最小値を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210511)

0.148 次の連立 1 次方程式について，以下の問に答えよ．ただし，k は定数とする.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 5y + 9z = 6 \\ 3x + 5y + 7z = k \end{cases}$$

(1) この連立 1 次方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ と拡大係数行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ をそれぞれ示せ.

(2) 拡大係数行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ を階段行列に変形し，連立 1 次方程式が解を持つような k を定めよ.

(3) k の値が (2) で定めた値であるとき，この連立 1 次方程式を解け.

(東北大 2022)　　(m20220501)

0.149 次の行列 $\boldsymbol{X}$ と数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問に答えよ．ただし，x は実数とする.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{X}^3$ を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{X}^n$ が次の形式で表されることを，数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\boldsymbol{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n，b_n，c_n で構成される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(東北大 2022)　　(m20220502)

0.150 次の極限値をそれぞれ求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x+1\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(東北大 2022)　　(m20220503)

0.151 次の微分方程式をそれぞれ解け.

(1) $y^2+1-2x\sqrt{x-1}\,y'=0$　　(2) $y''-\sqrt{1+y'}=0$

(東北大 2022)　　(m20220504)

0.152 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ.

$$I=\iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ.

(4) 重積分 I を計算せよ.

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.153 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする.

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ.

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ.

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3z)\,\mathbf{i} + (x^2yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.154 I を 3 次単位行列とし，A を 3 次実正方行列で固有値 $2, 1, -1$ を持つものとする．以下の問に答えよ．

(1) A^4 を $A^2,\ A,\ I$ の線形結合で表せ．

(2) A は正則であることを示し，A^{-1} を $A^2,\ A,\ I$ の線形結合で表せ．

(3) A^{-1} の行列式を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220507)

0.155 n を 2 以上の整数とする．n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は，

それらの内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ について $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \neq 0$ を満たすとする．n 次正方行列 A を $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ と定める．ここで，${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の階数と行列式をそれぞれ求めよ．また，A の固有値をすべて求めよ．

(2) k を正の整数とする．${}^t\boldsymbol{b}A^k\boldsymbol{a}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と k を用いてできるだけ簡潔に表せ．

(東北大 2022)　　(m20220508)

0.156 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f+g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\left\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\right\}$，$\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1)=3, \qquad f'(-1)=2, \qquad f(1)=-1, \qquad f'(1)=2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.157 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y)=x^4-4x^3y-4xy^3+y^4 \qquad \big(\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\big)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 f の x,y に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)=0$ となる $\mathbb{R}^2$ の点 (a,b) をすべて求めよ．

(3) 設問 (2) で求めたすべての点について，その点で f が極小値をとるか，極大値をとるか，または極値をとらないか判定せよ．

(東北大 2022)　　(m20220510)

0.158 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha)=\int_0^1 x^{\alpha}(\log x)^n\,dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha>-1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha\leq-1$ ならば発散することを示せ．

(2) $\alpha>-1$ のとき，この広義積分の値を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220511)