[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：徳島大

0.1 $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　(m19984401)

0.2 次の極限値を求めよ．(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

(徳島大 1998)　(m19984402)

0.3 $g(x, y) = x^y$ $(x > 0)$ の偏導関数 $g_x(x, y),\ g_y(x, y)$ を求めよ．

(徳島大 1998)　(m19984403)

0.4 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

(徳島大 1998)　(m19984404)

0.5 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$　（ n は正の整数）　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$

(徳島大 1999)　(m19994401)

0.6 次の問に答えよ．

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．このとき，行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を r, θ で表せ．

(2) (1) で求めた J に対して，$I = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty f(x, y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)Jdr$ であることを用いて，$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ のとき I の値を求めよ．

(徳島大 1999)　(m19994402)

0.7 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(2) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

(3) $y'' - 2y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + y = e^x$

(徳島大 1999)　(m19994403)

0.8 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル（ただし，長さ 1 のもの）を求めよ．

(徳島大 1999)　(m19994404)

0.9 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2}$ を求めよ．

(2) 自然数 n と 0 でない定数 c に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^n} = c$ となるとき，自然数 n と 0 でない定数 c の値を求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004401)

0.10 $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004402)

0.11 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$ について，次の問に答えよ．

(1) 上の微分方程式を満たす x, y に対して，$\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x$ と $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y$ の値を求めよ．

(2) 上の微分方程式の解 $x = x(t),\ y = y(t)$ で $x(0) = 3,\ y(0) = 6$ となるものを求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004403)

0.12 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ．ただし，λ は定数とする．

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して，$Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ．

(徳島大 2000)　　(m20004404)

0.13 自然数 n に対し，$f_n(x) = nx^n - nx^{2n}\ (0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

(1) $f_n(x)$ の最大値を求めよ．　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成立することを示せ．

(徳島大 2001)　　(m20014401)

0.14 (1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a} f(x+y)dxdy = \int_0^a xf(x)dx,\quad D_a = \{(x, y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq a\}$$

を示せ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\iint_{D_1} e^{-(x+y)^2}dxdy,\quad D_1 = \{(x, y);\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1\}$$

(徳島大 2001)　　(m20014402)

0.15 微分方程式 $x^2y' + 2xy = 1\ (x > 0)$ を考える．

(1) すべての解について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(2) $y(1) = y(2)$ となる解 $y(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $y(x)$ のグラフを描け．

(徳島大 2001)　　(m20014403)

0.16 (1) 次の行列の固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 最小な固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(徳島大 2001) (m20014404)

0.17 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \log f(x)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{d}{dx} f(x)$ を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034401)

0.18 $D = \{(x, y) \ : \ y \geqq \ x^2 \, , \ y \leqq \ x + 2\}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ．

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy \, dxdy$ の値を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034402)

0.19 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ を考える．

(1) 一般解を求めよ．

(2) a を定数として，初期条件 $y(0) = 1 \, , \ y'(0) = a$ を満たす解を求めよ．

(3) (2) の解が $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ となるように，a の値を定めよ．

(徳島大 2003) (m20034403)

0.20 $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 1 - \cos\theta & 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A(\theta)$ が正則であることを示せ．

(2) 1 が $A(\theta)$ の固有値であることを示せ．

(3) $A^2(\theta)(= A(\theta)A(\theta))$ に対して，$A^2(\theta) = A(m\theta)$ となる自然数 m を求めよ．

(徳島大 2003) (m20034404)

0.21 一般項が $a_n \geqq \ 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004） (m20044401)

0.22 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板を $D(a) = \{(x, y) \in R^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqq \ a^2\}$ とする．

(1) 2 重積分 $I(a) = \iint_{D(a)} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ.

(2) 平面の全体における広義積分 $I = \iint_{R^2} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044402)

0.23 微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 4x$ を考える.

(1) 変数変換 $x = e^t$ により, $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$ となることを示せ.

(2) 変数変換 $x = e^t$ により, $y = y(t)$ の方程式に直せ.

(3) 上の変換で得られた方程式の一般解 $y = y(t)$ を求めよ.

(4) もとの微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044403)

0.24 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 上で求めた λ と x に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で x と直交するものを求めよ.

(3) このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004) (m20044404)

0.25 次の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする. $A = BC$ となる 3 次正方行列 C を求めよ. また行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 次の方程式を解け. ここで左辺は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005) (m20054401)

0.26 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(徳島大 2005) (m20054402)

0.27 累次積分 $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ について, 次の問に答えよ.

(1) 2 重積分を用いると $I = \iint_D y^2 e^{x^2} dxdy$ と書ける. このときの積分領域 D を図示せよ.

(2) I を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054403)

0.28 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.29 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ. ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2006)　　(m20064401)

0.30 実数全体における $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$ の最大値および最小値を求めよ.

(徳島大 2006)　　(m20064402)

0.31 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(1) $y' + 2y = 1$　　(2) $y'' + 2y' + 2y = x$

(徳島大 2006)　　(m20064403)

0.32 a を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-2a & 2a \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $a = 3$ のとき, A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値が重複するように, a の値を定めよ.

(3) (2) で求めた a の値に対して, A の固有ベクトルで大きさが 1 であるものをひとつ求めよ.

(徳島大 2007)　　(m20074401)

0.33 $x \neq 0$ として, $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$ を考える.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ.　　(2) $f'(x)$ を求めよ.　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2007)　　(m20074402)

0.34 平面上の図形 $D = \{(x, y) \ : \ -1 \leqq x \leqq 1,\ -2 \leqq y \leqq 2\}$, $S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqq 4\}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\iint_D dxdy$ と $\iint_S dxdy$ を求めよ.　　(2) $\iint_D xydxdy$ を求めよ.　　(3) $\iint_S xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2007)　　(m20074403)

0.35 $u(x)$ が次の微分方程式の初期値問題を満たす. $\begin{cases} u'' + (u')^2 - 3u' + 2 = 0 \\ u(0) = 0\,, \ \ u'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(1) 定数係数の 2 階線形同次微分方程式 $v'' - 3v' + 2v = 0$ の一般解 $v(x)$ を求めよ.

(2) $u(x) = \log y(x)$ とおいて初期問題の微分方程式に代入し, (1) を用いることにより, 初期問題を満たす解 $u(x)$ を求めよ.

(徳島大 2007) (m20074404)

0.36 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A が逆行列を持たないような a の値を求めよ.

(2) 2 が A の固有値となるような a の値を求めよ.

(3) 1 が A の重複した固有値となるような a の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084401)

0.37 $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \{f'(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $f''(x)$ を求めよ. (4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f''(x)$ を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084402)

0.38 $D = \{(x, y) \ : \ y \geqq \ x,\ x \geqq \ 0,\ y \leqq \ 2\}$ に対して, 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D y^2 e^{-y^4}\,dxdy$ を考える.

(1) I を累次積分で表せ.

(2) (1) の累次積分の積分順序を変更せよ.

(3) I の値を求めよ.

(徳島大 2008) (m20084403)

0.39 次の連立微分方程式の一般解 $x = x(t),\ y = y(t)$ を求めよ. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \cos t + y \sin t \end{cases}$

(徳島大 2008) (m20084404)

0.40 V を n 次元の線形空間とし f は V から V への線形写像とする.

(1) $f(0) = 0$ を示せ.

(2) $X = \{x\ ;\ x \in V\ ,\ f(x) = 0\}$ は V の線形部分空間であることを示せ.

(3) $\{e_1,\ e_2,\ \cdots\ ,\ e_n\}$ を V の基底とする. $f(x) = 0\ (x \in V)$ なら $x = 0$ となるとき $\{f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots\ ,\ f(e_n)\}$ は一次独立であることを示せ.

(徳島大 2009) (m20094401)

0.41 (1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする. このとき, $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x + 1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ.

ロピタルの定理を用いて $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$

(徳島大 2009) (m20094402)

0.42 (1) $f(x,y) = x + y + \sin(x^2 + y^2)$ に対して偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $a > 0$ に対して $D = \{(x,y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D f_y(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(徳島大 2009)　　(m20094403)

0.43 (1) $y' + 2y = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(2) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2009)　　(m20094404)

0.44 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 最大である固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104401)

0.45 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x + \sin x - 3^x + 5x}{x}$ を求めよ.

(2) $f(x) = \sin^3(4x+3)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104402)

0.46 変数変換 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を利用して, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104403)

0.47 $0 < a < 1,\ D_a = \left\{(x,y)\ ;\ a^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq \dfrac{1}{a^2}\right\}$ とする.

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする. 行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を $r,\ \theta$ で表せ.

(2) $I(a) = \displaystyle\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} I(a)$ を求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104404)

0.48 (1) $y' + xy = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $y' + xy = x$ の一般解を求めよ.

(3) $y' + xy = x$ の両辺を x で微分した式を求めよ.

(4) $y'' + xy' + y = 1$ の解のうち, 初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104405)

0.49 $0 \leqq\ a \leqq\ 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \dfrac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．ここで，$\det(M)$ は正方行列 M の行列式を表す.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) $f(a) = \det(A)$ とする．$f(a)$ のグラフを図示せよ.

(3) n を自然数とする．$\lim_{n \to \infty} \det(A^n)$ を求めよ．

(徳島大 2011)　　(m20114401)

0.50 $\alpha > 1$ とする．広義積分 $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $x^{1-\alpha}\log x$ を微分せよ．

(2) $R > 1$ とする．$\int_1^R \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$ を求めよ．

(3) I_α を求めよ．

(徳島大 2011)　　(m20114402)

0.51 $D = \{(x, y)\,;\, 1 \leqq x + y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする．　二重積分 $I = \iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $u = x - y,\ v = x + y$ とおく．x, y を $u,\ v$ で表せ．

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする．D' を図示せよ．

(4) I を求めよ．

(徳島大 2011)　　(m20114403)

0.52 $\frac{dy}{dx} - 2x^2e^xy + e^xy^2 = 2x - x^4e^x$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) x^a が微分方程式の解となるように実数 a を求めよ．

(2) a を (1) で求めたものとする．$y = x^a + z$ を微分方程式に代入して，z の満たす微分方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた z の微分方程式を解いて，もとの微分方程式の解 y 求めよ．

(徳島大 2011)　　(m20114404)

0.53 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A = B^2$ となる行列 B をすべて求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124401)

0.54 $f(x, y) = x^2y - 4xy + y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ を求めよ．

(2) 方程式 $f(x, y) = 0$ で表される曲線上の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124402)

0.55 広義積分 $I = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t = x + \sqrt{x^2+1}$ おいたとき，x を t で表せ．

(2) (1) の変数変換により，I を t の積分に変換せよ．

(3) I の値を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124403)

0.56 連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の一般解を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124404)

0.57 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる列ベクトル $\boldsymbol{p}$ の中で，大きさ $|\boldsymbol{p}|$ が最小となる $\boldsymbol{p}$ を求めよ．また，そのときの $|\boldsymbol{p}|$ を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124405)

0.58 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x^2-\pi^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-e^{-x})}{\sin x - x\cos x}$

(徳島大 2012)　　(m20124406)

0.59 $a > 0$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \left\{(x, y)\,;\, x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$ を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124407)

0.60 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + x(y')^2 = 0$ について，次の問いに答えよ．

(1) $p = y'$ とおいて，p の満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) で導かれた微分方程式の一般解 $p = p(x)$ を求めよ．

(3) もとの微分方程式の解で，$y(0) = 1$，$y'(0) = -2$ を満たす解 y を求めよ．

(徳島大 2012)　　(m20124408)

0.61 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで，${}^tP$ は P の転置行列を表す．

(徳島大 2013)　　(m20134401)

0.62 $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$ を同時に満たす x, y を求めよ.

(3) $\left|f(x,y)\right| \leqq \dfrac{1}{2}$ を示せ.

(徳島大 2013) (m20134402)

0.63 n は自然数とする.

(1) $\sin(n+1)x-\sin(n-1)x=2\cos nx\sin x$ を示せ.

(2) $I_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{\sin x}dx$ を求めよ.

(3) $J_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ.

(徳島大 2013) (m20134403)

0.64 $y=f(x)$ に対する次の微分方程式を解け.

(1) $y'+2y=y^2$ (2) $y''+2y=x^2$

(徳島大 2013) (m20134404)

0.65 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A と B の積 AB を求めよ.

(2) $AB\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}$ を満たす定数 α を求めよ.

(3) $B^{-1}A^{-1}\boldsymbol{x}=\beta\boldsymbol{x}$ を満たす定数 β を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144401)

0.66 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\log x}}dx$, $J=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\log x}\, dx$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $0<x<1$ において $\sqrt{-\log x}$ を微分せよ.

(2) J を I で表せ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用して J を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144402)

0.67 $0<a<\dfrac{1}{2}$ とし, xy 平面上の領域を $D=\left\{(x,y)\ ;\ y\leqq\ x\leqq\dfrac{1}{2},\ a\leqq\ y\leqq\dfrac{1}{2}\right\}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $I_a=\displaystyle\iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right)dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について, $\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2}I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014) (m20144403)

0.68 次の微分方程式の初期値問題の解 $y_0 = y_0(x),\ y_1 = y_1(x)$ を求めよ．

$$\begin{cases} {y_0}' = y_1 + x, \\ {y_1}' = -2y_0 - 3y_1, \end{cases} \qquad y_0(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{4}, \qquad y_1(1) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2},$$

(徳島大 2014)　　(m20144404)

0.69 次の問いに答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような a を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \dfrac{1}{2} & c \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列となるような $a,\ b,\ c$ を求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154401)

0.70 $f(x) = x \log\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ 　$(x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ とする．α を求めよ．

(2) (1) で求めた α に対して，$\beta = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(f(x) - \alpha x\Big)$ とする．

$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$x \to \infty$ のとき $t \to +0$ であることを利用して，β を求めよ．

(3) (1),(2) で求めた $\alpha,\ \beta$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (\alpha x + \beta)}{\dfrac{1}{x}}$ を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154402)

0.71 $D = \{(x, y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x + y \geqq\ 1\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $u = x + y,\ v = \dfrac{y}{x + y}$ とおく．x, y を u, v の式で表せ．また，行列式 $J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 v \sin(\pi v) dv$ を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{y}{x + y} e^{-(x+y)} \sin\left(\dfrac{\pi y}{x + y}\right)$ に対して，$I = \displaystyle\iint_D f(x, y) dxdy$ を求めよ．ここで，(1) の変換により $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 dv \int_1^\infty f\big(x(u, v),\ y(u, v)\big)|J(u, v)|du$ となることを用いてよい．

(徳島大 2015)　　(m20154403)

0.72 (1) $f(x) = \log(1 + x^2)$ とする．$f''(x)$ を求めよ．

(2) $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を満たしている．このとき，$u = e^{-x}y$ とおいて，u が満たす微分方程式を求めよ．また，この u の微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + y = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}e^x$ の一般解を求めよ．

(徳島大 2015)　　(m20154404)

0.73 3 次実正方行列 A は，-2 と 7 を固有値にもつ．$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ は固有値 -2 に対応する A の固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対応する A の固有ベクトルである．3 つのベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ が，どの 2 つも直交するとき，次の問いに答えよ．

(1) 実数 a，b，c を求めよ．

(2) $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ を並べた 3 次正方行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とする．P^{-1} を求めよ．

(3) A を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184401)

0.74 関数 $f(x)$ は，$\sin f(x) = \cos^2 x$，$0 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

(1) $f(0)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x)$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184402)

0.75 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2 + y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 α，β および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．α，β，$f(\theta)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ．

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.76 $x = x(t)$ が微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$ を満たす．$x(0) = 2$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $x(t)$ を求めよ．

(2) $y = y(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} + y = 3x$ の一般解を求めよ．

(3) (2) の $y(t)$ に対して，$y(0) = y(1)$ が成り立つとする．このとき，$x(1) + \displaystyle\int_0^1 y(t)dt = x(0)$ となることを示せ．

(徳島大 2018)　　(m20184404)