[選択項目]　年度：1991～2023 年　　大学：東京大

0.1

$$x(t)+a\int_0^t x(t)dt = f(t)+b\int_0^t f(t)dt$$

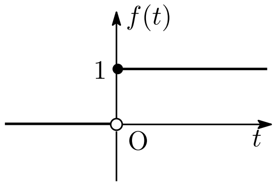
において　$f(t)$　は下図のステップ関数とする．ただし，

$$a>b>0\ ,\ \lim_{t\to+0} x(t)=1\ ,\ \lim_{t\to-0} x(t)=0$$

このとき

(1)　$x(t)$　を求めよ．

(2)　$x(t)$　の概形を図示せよ．



$$f(t)=1 \qquad t \geqq 0$$
$$f(t)=0 \qquad t<0$$

(東京大 1997)　　(m19970701)

0.2　行列

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ．

(1)　行列　A　を対称行列　S　と交代（逆対称，反対称）行列　K　の和で表せ．

(2)　行列　$KS+SK$　は対称行列，交代行列，その他の行列の何れか．
　又，行列　$KSKS+SKSK$　は上記の三つの行列の何れか．

(3)　行列　A　の固有方程式を示せ．

(4)　行列　A　の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(東京大 1997)　　(m19970702)

0.3　数列　$\{a_n\}$　$(n=0,1,2,\cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$$

(1)　$a_0=a_1=1$　として，極限値

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2)　上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより，$a_0=a_1=1$ を初期値とした極限値

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また　a_n　の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997)　　(m19970703)

0.4 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt}-\alpha}\cdot\left\{\frac{2\pi j e^{2\pi jt}}{e^{2\pi jt}-\alpha}\right\}^* dt$$

ただし，α は $|\alpha|\neq 1$ なる任意の複素数，j は虚数単位，“ $*$ ” は複素共役を表すとする．

(東京大 1997)　(m19970704)

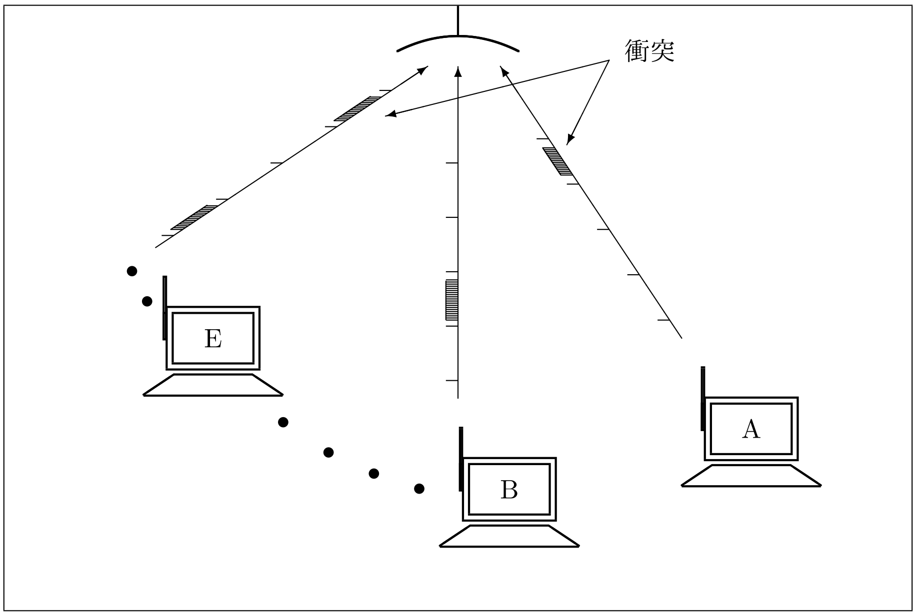
0.5 複数のコンピュータが長さ 1 秒の無線信号を中央のアンテナに送信するネットワークを考える（下図参照）．無線信号の交信は 1 秒ごとに行われ，$T-1$ (秒) から T (秒) の間に生起した無線信号は T (秒) の時点で送信される．また，2 台以上のコンピュータが同時に無線信号送信を行った場合には信号衝突（送信失敗）が起こり，後の時点で再送される．ここで，コンピュータ A 以外のコンピュータから生起された無線信号は，再送信号までも含めて次式の確率で送信されるものとする．このとき，以下の問に答えよ．なお，$P_r[k,n]$ は n 秒の間に k 個の無線信号が生起する確率であり，G は定数である．

$$P_r[k,n]=\frac{(Gn)^k}{k!}\exp(-Gn)$$

(1) コンピュータ A が無線信号を送信した際，信号衝突が起こらない確率を求めよ．

(2) コンピュータ A の信号送信が $j-1$ 回の信号衝突の後で成功する確率，すなわち送信回数が j 回となる確率を求めよ．

(3) 無線信号の送信回数の期待値を求めよ．



(東京大 1997)　(m19970705)

0.6 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

の一般解を，$b^2-\omega^2\leq 0$ の場合について求めよ．

(2) 上式を，初期条件 $t=0$ で $x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=1$ のもとに解き，$b>0$ の時の解の特徴を表す概略グラフを描け．

(東京大 1998)　(m19980701)

0.7 x-y 平面上を，ある一つの点が移動している．

時刻 $t=i$ (i は整数) におけるこの点の位置を $\mathbf{p}_i=\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$ と表すとき，

$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \end{pmatrix}$ であった.
また，$\mathbf{p}_{i+1} = A\mathbf{p}_i$ (A は行列) に従っているものとする.

(1) 行列 A を求めよ.

(2) A^n を求め，時刻 $t = n$ (n は整数) におけるこの点の位置 $\mathbf{p}_n$ を求めよ.

(東京大 1998)　　(m19980702)

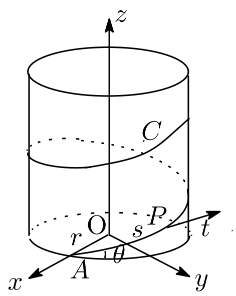
0.8 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ.

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ.

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし，$\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする.

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ.

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする.



(東京大 1998)　　(m19980703)

0.9 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m, n は $m, n > 0$ の整数とする.

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2 + {b_n}^2\right]$$ を証明せよ.

(東京大 1998)　　(m19980704)

0.10 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある．点 P は硬貨を投げて表が出たら $+m$ ，裏が出たら $-n$ だけ移動する．硬貨は k 回投げるとする.

(1) $m = 4$ ，$n = 2$ ，$k = 6$ のとき，下記の値を求めよ.

(a) 点 P の座標が原点である確率.

(b) 点 P の座標の期待値.

(2) $m = n = 1$ ，$k = 5$ のとき，下記の値を求めよ.

(a) 点 P の座標の期待値，および点 P がその期待値の座標に在る確率.

(b) 原点から点 P までの距離の期待値.

(c) 「点 P が負の座標に移動すれば，点 P は原点に戻りそこで終了する.」というルールを付加した場合，点 P の座標の期待値.

(東京大 1998）　　(m19980705)

0.11 曲線 $y = x^2$ と 直線 $y = a\ (a > 0)$ で囲まれた図形 (図１ 灰色部分）を考える．この図形に一定の厚みを持たせて平面上に立てた場合（図２）に，点 O を接触点として安定に立っていられるかどうか調べたい.

(1) この図形の重心を求めよ．この場合厚みが一定であるので，重心は図形に属する各点の x, y 座標の平均となる.

(2) 図形がわずかに傾き，平面との接触点が点 O から微小量 u だけずれた時 (図３)，その新しい接触点 P における法線と y 軸との交点 Q を求めよ.

(3) 点 O で安定に立っているための，定数 a についての条件を求めよ.

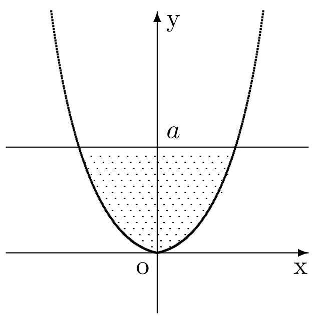


図１

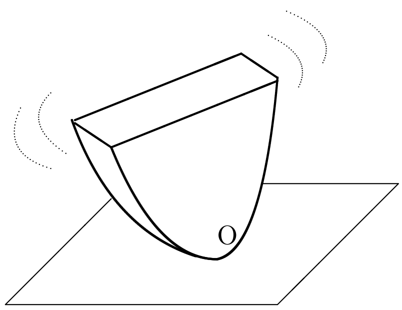


図２

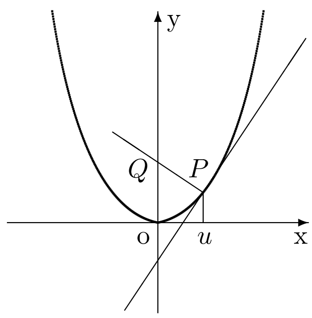


図３

(東京大 1999)　　(m19990701)

0.12 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を求めたい.

$\displaystyle f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $f'(\theta)$ を無限級数の形を用いて表せ.

(2) $f''(\theta)$ を $f(\theta)$ を用いて表せ.

(3) $f(\theta)$ を求め， $\displaystyle f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ を計算せよ.

(東京大 1999）　　(m19990702)

0.13 ２次形式

$$F(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4yz + 4zx$$

を標準形に直せ．また

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

として， $F(x, y, z)/G(x, y, z)$ の最大値，最小値とその時の x, y, z の値を求めよ.

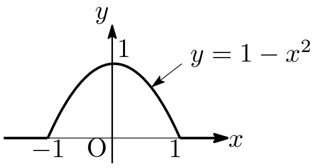
(東京大 1999）　　(m19990703)

0.14 $f(t)$, $h(t)$ が下記のように与えられるとき，ラプラス変換を用いて $f(t)$ と $h(t)$ のたたみ込み (convolution) $g(t) = f(t) * h(t)$ を計算せよ．ここに $*$ はたたみ込み演算を表す.

$f(t) = 1 - at$　　　　$h(t) = \exp(at)$

(東京大 1999）　　(m19990704)

0.15　下記のグラフで与えられる関数のフーリエ変換を求めよ．



(東京大 1999)　　(m19990705)

0.16　２つの箱 Ⅰ，Ⅱ を考える．最初 Ⅰ には赤球２個，Ⅱ には白球２個が入っているものとする．各箱から同時に１球ずつ取って，他の箱へ移す操作を繰り返すものとして，以下の問に答えよ．

(1)　この操作を n 回繰り返した後に，箱 Ⅰ に赤球が２個ある確率 p_n，赤球が１個ある確率 q_n，赤球が無い確率 r_n をそれぞれ求めよ．

(2)　この操作を無限回繰り返したときに，箱 Ⅰ に入っている赤球の個数に対する期待値を求めよ．

(東京大 1999)　　(m19990706)

0.17　３次方程式 $z^3 = 1$ の三つの相異なる解を α, β, γ とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　α, β, γ を求めよ．

(2)　$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ の値は，n が 3 の倍数のとき 3，それ以外のとき 0 になることを示せ．

(東京大 2000)　　(m20000701)

0.18　曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1)　立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2)　球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3)　上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.19　次の連立常微分方程式を解け．ただし，$t = 0$ において $x = 1, y = 0$ とする．

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

(東京大 2000)　　(m20000703)

0.20　A を２次の正方行列とする．A の行列式を $|A|$ で表し，また，その対角成分の和を $\mathrm{tr}(A)$ で表す．さらに A の固有値を λ_1, λ_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 特性多項式は $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + |A|$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $|A| = \lambda_1\lambda_2$ であることを示せ．

(3) $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + |A|E = O$ を示せ．ただし，E は単位行列で，O は零行列である．

(4) (3) の結果を用いて，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，$n \geq 2$ に対して，次の関係が成り立つことを証明せよ．

$$A^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}A + \frac{\lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}E$$

(東京大 2000)　　(m20000704)

0.21 極座標 (r, θ) で表せる 2 次元領域 $r > 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

を満たし，境界条件

$$u(1, \theta) = \cos 3\theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(ii)}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{(iii)}$$

を満たす解 $u(r, \theta)$ を以下の手順で求めよ．

(1) (i) の解として $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ と表せるものを考える．これを (i) に代入し，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数であるような式を導け．

(2) この式が上記の 2 次元領域に対応する任意の (r, θ) に対して成立するためにはその両辺は r , θ によらない定数でなくてはならない．そこで，この定数を c として f の r に関する微分方程式と g の θ に関する微分方程式を導け．

(3) m を整数として $f(r) = r^m$ とおき，定数 c を m で表せ．次に，これを g の θ に関する微分方程式に代入し，(i) の解で，$u_m(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ の形のものを求めよ．

(4) d_m を定数として，(i) の解で $u(r, \theta) = \displaystyle\sum_m d_m u_m(r, \theta)$ の形の解を考え，それが境界条件 (ii),(iii) をみたすようにして求める解 $u(r, \theta)$ 定めよ．

(東京大 2000)　　(m20000705)

0.22 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ 　を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.23 半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001)　　(m20010702)

0.24 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.25 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$ を $L[f(x)] = F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L[e^{ax}f(x)] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001) (m20010704)

0.26 ある製品は一回の使用後, 確率 p でこわれるとしょう. このとき以下に問に答えよ.

(1) この製品を k 回使用したとき, まだこわれない確率を求めよ.

(2) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後の確率を求めよ.

(a) すべてがこわれている確率はいくらか.

(b) すべてがこわれずに残っている確率はいくらか.

(c) M 個がこわれずに残っている確率はいくらか.

(3) N 個の製品をそれぞれ一回使用した後こわれずに残っている個数の期待値を求めよ.

次に, この製品は使用しなくても単位時間あたり α の確率でこわれるとしよう.

(つまり, 非常に短い時間 Δt 後に確率 $\alpha\Delta t$ でこわれる.) このとき, 以下の問に答えよ.

(4) ある製品をまったく使用しない場合, 時刻 t においてそれがこわれていない確率を $P(t)$ とするとき, $P(t)$ の従う微分方程式を記せ.

(5) $t=0$ で $P(t)=1$ として, $P(t)$ を求めよ.

(6) この製品を, 完成後時間 t の間に k 回使用したとき, まだこわれていない確率を求めよ. ただし, 使用に要する時間は t に比べて非常に短いとする.

(東京大 2001) (m20010705)

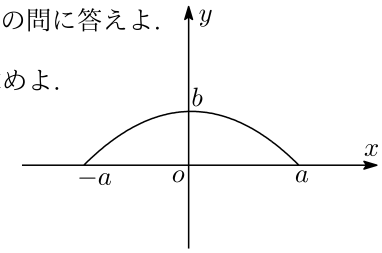
0.27 (1) 座標平面上で, 直線 $y=x$ に関する対称変換（線形変換）を表す行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた固有値, 固有ベクトルの幾何的意味を考え, そこから行列 A が直線 $y = x$ に関する対称変換を与えることを説明せよ.

(東京大 2002) (m20020701)

0.28 図の曲線は点 $(0, b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.



(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.

(東京大 2002) (m20020702)

0.29 (1) $\cos t$, $\sin t$ を e^{it}, e^{-it} の関数として表せ.

(2) 関数

$$f(u) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2nu) \tag{1}$$

が与えられたとき,

$$a_n = \frac{1}{2N+1} \tag{2}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）とすると,

$$f(u) = \frac{A}{B} \tag{3}$$

の形に変形することができる. A と B とを求めよ. 途中の計算式も示すこと.

(3) 関数

$$g(u) = 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos\{(2n-1)u\} \tag{4}$$

が与えられている.

$$a_n = \frac{1}{2N} \tag{5}$$

（ただし $0 \leq n \leq N$）としたとき, 関数 $g(u)$ はどのような形に変形することができるか. できるだけ簡単な形で記せ. 途中の計算も示すこと.

(東京大 2002) (m20020703)

0.30 方程式

$$z^{17} = 1$$

を満たす複素数のうち, 1 でないものをひとつとり, ω とする. 以下の問に答えよ.

(1) この方程式を満たす 1 でない複素数は,

$$\omega^{\pm 1},\ \omega^{\pm 2},\ \omega^{\pm 3}, \cdots,\ \omega^{\pm 8}$$

で全てであることを示せ.

(2)

$$f_n = \omega^n + \omega^{-n}$$

と書くとき, 以下の各式が成り立つことを示せ.

$$f_i f_j = f_{i+j} + f_{i-j}\,,$$

$$f_{-i} = f_i\,,$$

$$f_{i+17} = f_i\,.$$

(3)

$$f_1 + f_2 + f_4 + f_8 = \alpha_0\,,$$

$$f_3 + f_5 + f_6 + f_7 = \alpha_1$$

とおくと, α_0 , α_1 は方程式

$$X^2 + X - 4 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(4)

$$f_1 + f_4 = \beta_0\,,$$

$$f_2 + f_8 = \beta_1\,,$$

$$f_3 + f_5 = \beta_2\,,$$

$$f_6 + f_7 = \beta_3\,,$$

とおくと, β_0 , β_1 は方程式

$$X^2 - \alpha_0 X - 1 = 0$$

の 2 解で, β_2 , β_3 は方程式

$$X^2 - \alpha_1 X - 1 = 0$$

の 2 解であることを示せ.

(5) f_1 , f_4 を 2 解とする 2 次方程式を一つ作れ. さらにこれを用いて, ω の満たす 2 次方程式を一つ作れ, 必要ならば係数に α_0〜α_3 , β_0〜β_3 などを用いてよい.

(東京大 2002) (m20020704)

0.31 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする.

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (0<x<1)$$

を用いてよい.

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき, Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ.

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x, j を用いてあらわせ.

(東京大 2002) (m20020705)

0.32 直交座標空間 (x,y,z) において, $x^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$ で表される円筒の内部で, xy 平面の上方 $(z \geq 0)$, かつ $z=x$ で与えられる平面の下方 $(z \leq x)$ にある部分の体積を求めよ.

(東京大 2003) (m20030701)

0.33 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $3x - y = (x+y)\dfrac{dy}{dx}$

(2) $6x - 2y - 3 + (-2x - 2y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(東京大 2003) (m20030702)

0.34 図 1 で示す線形演算装置を考える．この演算装置では，

端子 a のみに大きさ x の入力をしたとき，端子 A, B, C の出力の大きさはそれぞれ $x, x, 0$,

端子 b のみに大きさ y の入力をしたとき，端子 A, B, C の出力の大きさはそれぞれ $y, 0, y$,

端子 c のみに大きさ z の入力をしたとき，端子 A, B, C の出力の大きさはそれぞれ $0, z, z$

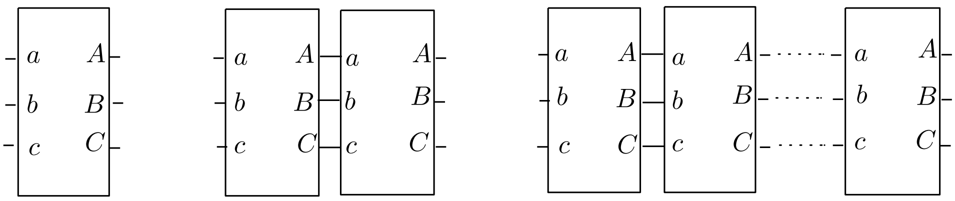
であり，入力と出力の関係は線形関係であるとする．

(1) 演算装置の端子 a, b, c にそれぞれ大きさ $1, 2, 3$ の入力をしたとき，端子 A, B, C の出力の大きさをそれぞれ求めよ．

(2) 図 2 のように，図 1 と同じ装置を 2 つつなぎ，左端の端子 a, b, c にそれぞれ大きさ $1, 2, 3$ の入力をしたとき，最終端子（右端）A, B, C の出力の大きさをそれぞれ求めよ．

(3) 図 3 のように，図 1 と同じ装置を N 個つなぎ，左端の端子 a, b, c にそれぞれ $1, 2, 3$ の入力をしたとき，最終端子（右端）A の出力の大きさを求めよ．

図 1　　図 2　　図 3



(東京大 2003)　　(m20030703)

0.35 (1) 変数 t に関して周期 2π の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{1}$$

と書けたときの a_n , b_n が

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\,, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

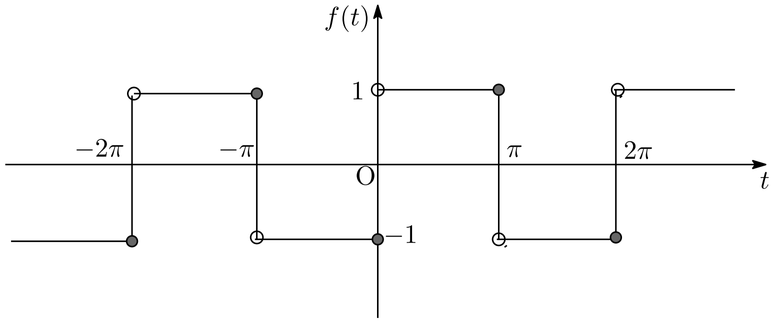
で与えられることを説明せよ．ただし，必要ならば三角関数の公式

$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$, $\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$

$\cos A \sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$, $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$

を用いよ．

(2) 下図は，値 1 と -1 をとる周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを示したものである．この関数 $f(t)$ を式 (1) の形に展開せよ．



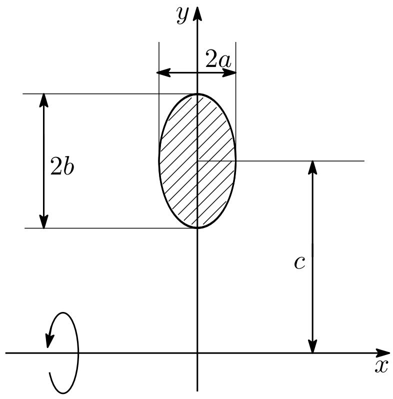
(東京大 2003)　　(m20030704)

0.36 フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人それぞれ一人ずつが次のゲームをする．白いボールが a 個と赤いボールが b 個，合計 $a+b$ 個入っている箱から，フィンランド人，スウェーデン人，ノ

ルウェー人，フィンランド人，スウェーデン人，ノルウェー人，$\cdots$ の順序で，誰かが最初に白いボールを取り出すまで，ボールを 1 つずつ取り出して戻す．白いボールを取り出した人が勝者である．各人が勝つ確率を求めよ．

(東京大 2003)　　(m20030705)

0.37　図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c ($c > a,\ c > b$) とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.38　以下の設問に答えよ．ただし，$a > 0$ である．

(1) 次の定積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx$

(2) 次の定積分の値を求めよ．必要ならば，直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ．
$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy$

(3) 次の等式を証明せよ．$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(4) 次の定積分の値を求めよ．ただし，n は 2 以上の整数である．$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$

(東京大 2004)　　(m20040702)

0.39　以下の微分方程式の解を求めよ．

(1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(2) $y'' + Ay' + By - Cx - D = 0$　(ただし，A, B, C, D は実数とする．)

(3) $ydx - (3x + 2y^2)dy = 0$

(4) $yy'' + (y')^2 - 5y' = 0$

ただし，上の式において $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(東京大 2004)　　(m20040703)

0.40　指数関数 e^x のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

を拡張して，行列 A の指数関数 e^A を，

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．いま，行列 e^A が

$$e^A = \begin{bmatrix} 2 - e^{-1} & -1 + e^{-1} \\ 2 - 2e^{-1} & -1 + 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

と与えられたとき，以下の問に答えよ．

(1) 行列 e^A を対角化せよ.

(2) 正則行列 P に対して，$P^{-1}e^AP = e^{(P^{-1}AP)}$ が成り立つことを示せ.

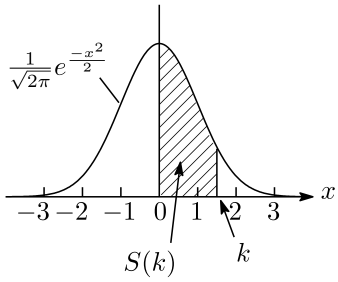
(3) 行列 A を求めよ.

(東京大 2004)　　(m20040704)

0.41 方程式 $ax^2+4bx+c=0$ が相異なる 2 つの実根をもつ確率を，(1), (2) それぞれの場合に対して求めよ.

(1) a, b, c がそれぞれ無作為に 0, 1, 2 のいずれかの値をとるとき.

(2) a, c がそれぞれ無作為に 1, 2 のいずれかの値をとり，a, c と関係なく b は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従うとき.



ただし，$\sqrt{2}=1.4$ とし，次の表を利用してよい.

k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
$S(k)$	0.117	0.191	0.258	0.316	0.341	0.385

ここに，$S(k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ とする．たとえば，平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う変数 x が 0.7 から 1.0 をとる確率は，$P(0.7<x<1.0)=S(1.0)-S(0.7)=0.083$ である.

(東京大 2004)　　(m20040705)

0.42 (1) 次の微分方程式を解け.

(a) $(2xy+x^2)y' = 2(xy+y^2)$

(b) $y'+2y\cos x = \sin(2x)$

(2) 次の微分方程式を示した条件のもとで解け.

$$y''+y'-2y=3e^x\ ,\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=1$$

(東京大 2005)　　(m20050701)

0.43 関数 $y(x)$ は, $x=1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x=1$ で極値をとり, $y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

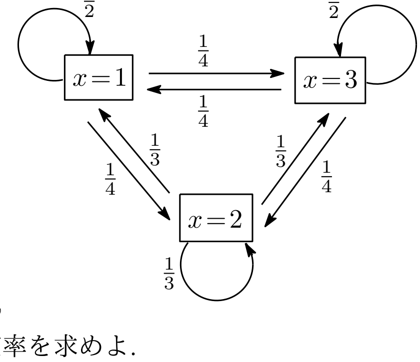
(2) $y(x)$ の $x=1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x=1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005)　　(m20050702)

0.44 変数 x は 1, 2, 3 のいずれかの値をとり, その値は単位時間ごとに図に示す確率に従って変化する.

このとき以下の問いに答えよ.



(1) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, その後 $2\to3$ と変化して時刻 3 で再び $x=1$ となる確率を求めよ.

(2) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, 時刻 3 で再び $x=1$ である確率を求めよ.

(3) 十分長い時間がたった後では, x が 1, 2, 3 をとる確率は, それぞれ，初期状態によらない値に収束する. これらの確率を求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050703)

0.45 (1) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a>0$, $b>0$, $c>1$ とする.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2+1\leq 0, \quad 1\leq z\leq c$$

(2) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a>0$, $b>0$ とする.

$$0\leq z\leq x^2+y^2, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

(東京大 2005)　　(m20050704)

0.46 空間において, xz 平面上の単位ベクトル $(u,0,w)$ を考える.

(1) y 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0,0,1)$ をベクトル $(u,0,w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u,0,w)$ を軸とする角度 θ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

0.47 $f(x)=x^2\sqrt{a^2-x^2}$, $g(x)=x^2e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a>0$ で，$f(x)$ は区間 $-a\leqq x\leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y=g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^\infty g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.48 p,q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列　$A=\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$　について，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える．　$\begin{cases} a_{n+1}=(1-p)a_n+qb_n \\ b_{n+1}=pa_n+(1-q)b_n \end{cases}$

ただし，$0<p<1$, $0<q<1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0,b_0 とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を p,q,a_0,b_0 を用いて示せ．

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.49 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=f(x) \tag{a}$$

ただし，　$x=0$　のとき，　$y=1$　かつ　$\dfrac{dy}{dx}=0$　について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=0$ のときの解を求めよ．

(2) $f(x)=\sin 2x$ のときの解を求めよ．ただし，(a) の特解が $y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ の形となることを利用してよい．A,B は定数である．

(3) $f(x)=\displaystyle\sum_{N=1}^{100}\sin Nx$ のときの解を $y_{\scriptscriptstyle S}$ とする．x が十分大きいとき，$\dfrac{y_{\scriptscriptstyle S}}{x}$ を x の関数として表せ．

(東京大 2006)　　(m20060703)

0.50 複素数平面上で次の式を満たす点 $z = x + yi$ (x, y は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left|z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 2$　　(2) $\left|z - \sqrt{2}i\right| = \left|z - \sqrt{2}\right|$

(3) $\left|z - \sqrt{2}i\right| + \left|z - \sqrt{2}\right| = 4$　　(4) $\left|z - \sqrt{2}i\right| - \left|z - \sqrt{2}\right| = 1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006)　(m20060704)

0.51 1 回の試行において事象 A の起こる確率を p とする．この試行を独立に n 回くり返すときに A が起こる回数を X とすると，X は 0 から n までの整数値をとる確率変数であり，この確率分布を二項分布 $B(n, p)$ とよぶ．

例えば，表の出る確率が 0.5 のコインを 3 回投げる場合，表の出る回数は 0 回，1 回，2 回，3 回のいずれかであり，この各回数の確率の分布が二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ である．

(1) A が r 回起こる確率を $P(r)$ とする．$P(r)$ を n, r, p を用いて表せ．

(2) 二項定理を用いて $\displaystyle\sum_{X=0}^{n} P(X) = 1$ を証明せよ．

(3) 横軸を X，縦軸を $P(X)$ として，二項分布 $B(3\,,\,0.5)$ および $B(8\,,\,0.5)$ のグラフを示せ．ただし，有効数字を二桁とする．

(4) 二項分布 $B(n, p)$ の平均 μ を n, p を用いて表せ．またその導出過程を示せ．

(東京大 2006)　(m20060705)

0.52 (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．　$xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2$

(2) 微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{n}{x}\dfrac{dy}{dx} + a^2y = 0$　について，以下の問いに答えよ．ただし，n は整数，a は 0 でない実数とする．

(a) $n = 0$ の場合の一般解を求めよ．　(b) $n = 2$ の場合の一般解を求めよ．

(東京大 2007)　(m20070701)

0.53 x_i, y_i の各値がある線形系を介して，x_{i+1}，y_{i+1} をそれぞれ出力する際，入力値と出力値の関係は，

$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ で表現できる．ただし，i は自然数とし，A は行列とする．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -31 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 系を表す行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，行列 A の表す一次変換の幾何学的意味を固有ベクトルを用いて述べよ．

(3) (2) の結果を用いて，A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする，

(4) x_n，y_n を求めよ．ただし，n は自然数とする，

(東京大 2007)　(m20070702)

0.54 1 の n 乗根は，方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数 })$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は，$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする． また，複素数平面において，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ．

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形，すなわち OP_1P_2，OP_2P_3，OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1，G_2，G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ．

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2 \cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.55 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ $(a > 0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ．

(2) (1) の表面上の点 $(x.y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0 > 0$ とする．

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ 2 点 P_1, P_2 は，それぞれ $\left(\dfrac{a}{2},\ -a\right)$，$\left(-\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x, y) 成分を持つとする．点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.56 表と裏の出る確率が等しいコインが n 枚ある．ただし，n は 3 以上とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) これらのコインを同時に投げたときに，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果（表か裏か）となる確率 P を求めよ．

(2) これらのコインを同時に投げることを繰り返し，ちょうど 1 枚だけが他の $(n-1)$ 枚と異なる結果になった時点で終了する．ちょうど k 回目で終了する確率を求めよ．

(3) (2) において，k 回以内に終了する確率を求めよ．

(4) (2) において，終了するまでにかかる回数の期待値と分散を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070705)

0.57 複素数 $z(t) = e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a + ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n = z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ を a, b, n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a, b, N の関数として求めよ． また，a を固定して $b \to \infty$ および $b \to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.58 (1) (a) X を値が自然数 $1, 2, \cdots, a$ のみをとる確率変数とする．X の平均 $E(X)$ は，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} kP(X = k)$$

で定義される．ここで，$P(X = k)$ は，$X = k$ となる確率である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，$P(X \geqq k)$ は，$X \geqq k$ となる確率である．

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} P(X \geqq k) \tag{1}$$

(b) X の 2 乗の平均は，

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} k^2 P(X = k)$$

で定義される．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} (2k-1) P(X \geqq k) \tag{2}$$

(2) 袋の中に白い玉が 1 個，赤い玉が $a - 1$ 個入っている．袋から，玉を一つずつ無作為に取り出し，袋の中に返さないものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ．ただし，この確率は，「最初の $k - 1$ 回は，常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい．

(b) (a) の回答と式 (1) を用いて，白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ．

(c) (a) の回答と式 (2) を用いて，白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ．
ただし，確率変数 X の分散 $V(X)$ は，$E(X^2) - (E(X))^2$ で与えられる．

(東京大 2009)　　(m20090702)

0.59 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \ : \ x(s, \theta) = (s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leqq s \leqq 1)\,,\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s, \theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C \ : \ y(\theta) = x(1, \theta) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

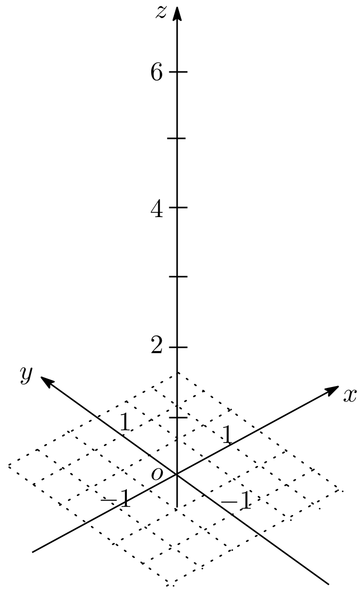
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1 + x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.60　行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.61　(1) 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x,y)$ の全微分 $du(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x,y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ．

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^\alpha}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ．

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x = 1$ のとき $y = e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2)$$

について，$x = e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である．

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log_e x$$

について，$x = 1$ において $y = 1$，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090705)

0.62 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) A^2，A^{-1}，$|A|$ を求めよ.

(2) A の全ての固有値を求めよ.

(3) $(A-I)^2 = 0$ が成り立つことを示せ. ただし，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(4) 任意の実数 t について, ある t の多項式 $g(t)$ と定数 a, b が存在して

$$t^{100} = g(t)(t-1)^2 + at + b$$

が成り立つ. a と b を求めよ.

(5) A^{100} を A と I を用いて表せ.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ を自然対数の底 e を用いて表せ. ただし, $A^0 = I$，$0! = 1$ である.

(東京大 2010)　　(m20100701)

0.63 以下の問いに答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' - 3y = x + \cos x$$

(2) 微分方程式

$$2yy'' - 3(y')^2 = y^2 \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1 \qquad (*)$$

を考える. ただし, $y > 1/2$，$y' > 0$ とする.

(a) $p = y'$ とおいて, 式 $(*)$ を p と y の 1 階微分方程式

$$f(y,p)\frac{dp}{dy} - 3p^2 = y^2 \qquad (**)$$

の形に変形する. このとき $f(y,p)$ を求めよ.

(b) 式 $(**)$ を解いて, p を y の式で表せ.

(c) 式 $(*)$ を解いて, y を x の式で表せ.

(東京大 2010)　　(m20100702)

0.64 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.65 関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めたい. ただし, m, n は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

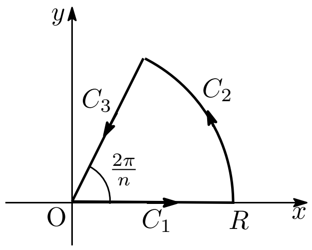


図 1

(東京大 2010)　　(m20100704)

0.66 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty$ $\left(N = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.67 以下の問いに答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 微分方程式

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \qquad (*)$$

は，特殊解 $y_1(x)$ 持つことがわかっているとする．

(a) 式 $(*)$ の一般解を $y = y_1(x) + 1/u(x)$ とおき，$u(x)$ に関する微分方程式を $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $y_1(x)$ を用いて表せ．

(b) $y' = (x^2 + x + 1) - (2x + 1)y + y^2$ は，特殊解 $y_1(x) = x$ を持つことがわかっている．一般解を求めよ．(a) で求めた結果を用いてもよい．

(2) 微分方程式

$$\alpha y'' + y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = 1,\ y'(x = 0) = 2 \qquad (**)$$

を考える．

(a) $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ を一般解とする．λ_1, λ_2, C_1, C_2 をそれぞれ α で表せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(b) $x \geqq 0$ において，式 $(**)$ の解を

$$y' + y = 0 \qquad y(x = 0) = \beta$$

の解で近似することを考える．α が十分小さい場合，β をどのように選べば近似できるか，(a) で求めた λ_1, λ_2, C_1, C_2 を用いて説明せよ．

(東京大 2011)　　(m20110701)

0.68 3 つの部品 A, B, C からなる機械 M がある．C は絶対に壊れないが一定の確率で誤動作する．A, B は，C の誤動作のみを原因として一定の確率で C の誤動作と同時に壊れる．C が誤動作したことにより A, B が壊れる確率はそれぞれ 6 %, 5 % である．B が壊れたときに，同時に A も壊れる確率は 20 % である．A, B のいずれか，もしくは両方が壊れた場合に限り M は必ず故障し修理工員が修理する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解の導出過程を必ず書くこと．

(1) (a) C が誤動作したときに M が故障する確率 P_r を求めよ．

(b) C が誤動作する確率が 10 % のとき M が故障する確率を求めよ．

(2) C の 3 回の誤動作に対して，M の故障が 2 回以上となる確率を求めよ．

(3) C の誤動作が n 回発生したとき M を修理した回数 X の平均を μ，標準偏差を σ とする．n が十分大きい場合について X が $\mu \pm 2\sigma$ の範囲に入る確率を，標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\varphi(z) = P(Z \leqq z)$ を用いて示せ．ただし，二項分布に従う確率変数 Y は，試行回数が十分大きい場合，近似的に正規分布 $N(Y$ の平均，Y の分散$)$ に従うことを利用せよ．

(4) M が故障するたびに，2 人の修理工員 F_1 と F_2 が交互に修理する．実際に修理を行った後，修理担当を交代する．最初の修理担当を F_1 としたとき，C が n 回誤動作した時点で修理担当が F_1 である確率を求めよ．ただし，$n \geqq 1$ とする．

(5) M が故障しているか否かを判断するセンサー S_1 と S_2 を取り付けた．センサー S_1，S_2 が M の故障の有無を正しく判断する確率は独立であり，それぞれ 90 %, 80 % である．今，C が誤動作し，M について S_1 が故障していると判断し，S_2 が故障していないと判断した．このとき，M が故障している確率を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110702)

0.69 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1, 3, 1)$, $B(2, 4, 3)$, $C(3, -3, -1)$ を通る平面を α とする．

(a) 平面 α の方程式を求めよ．

(b) 点 $P(1, 1, 1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．

(a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めよ．

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である．

(東京大 2011) (m20110703)

0.70 (1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left|\frac{z+\alpha-\alpha i}{2z-\beta+\beta i}\right| = 2$$

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p, q) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ．

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ．

(東京大 2011) (m20110704)

0.71 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ．

ただし，3 つのベクトル $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$M = [\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 M は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする．

(1) 行列の 3 つの固有値を a_1，a_2，a_3 および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = 1$ とすること．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 U を $U = [\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV = I$ のように行列 U に右からかけると単位行列 I となる行列 V を求めよ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ．

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ と行列 U について, 下式を満たすような 3 つの行列 P_1，P_2，P_3 を求めよ．ただし，P_1，P_2，P_3 はそれぞれ 3 行 3 列の行列であり，$\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

$$\begin{cases} P_1U = [\ \boldsymbol{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_2U = [\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_3U = [\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 A の n 乗である A^n を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(東京大 2011) (m20110705)

0.72 (1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (y-k)y \tag{$*$}$$

について以下の問いに答えよ．ただし，k は正の定数である．

(a) y と k の関係に注意し，$(*)$ の一般解を求めよ．

(b) $x=0$ のとき，$y=y_0$ とする．この場合の $(*)$ の解を求めよ．ただし，$y_0>0$ とする．

(c) (b) の解について，y_0 を k により適切に場合分けし，y と x の関係を図示せよ．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x + e^{-5x}$$

(東京大 2012)　　(m20120701)

0.73 A と B の二人で以下のゲームを行う．プレイごとに，A と B のどちらか一方が 1 点を獲得するものし，A が 1 点を獲得する確率を p とする．このプレイを繰り返し，

- A の点が B の点を 2 点上回ったとき，A の勝利.
- B の点が A の点を 2 点上回ったとき，B の勝利.

とする.

A が i 点，B が j 点を獲得しているときに，A がゲームを勝利する確率を $S(i,j)$ とする．

例えば，$S(1,1)$ は A, B がそれぞれ 1 点獲得しているときに，A がゲームに勝利する確率である．また，$S(2,0)=1$ であり，$S(0,2)=0$ である．このとき，次の問いに答えよ．ただし，全ての自然数 n に対して，$S(n,n)=S(0,0)$ であることを証明せずに用いて良い.

(1) $S(0,0)$ と $S(1,0)$ と $S(0,1)$ が満たす関係式を求めよ．また，$S(1,0)$ と $S(1,1)$ が満たす関係式を求めよ.

(2) i, j を $|i-j|<2$ を満たす非負整数とする．このとき，

$$S(i,j) = pS(i+1,j) + (1-p)S(i,j+1) \tag{$*$}$$

であることを示せ.

(3) 式 $(*)$ を利用して，$S(0,0)$ の値を p を用いて表せ.

(4) $S(0,1)$ の値を p を用いて表せ.

(5) $S(0,1)=1/2$ となる p の値は，$3/5<p<2/3$ を満たすことを示せ.

(東京大 2012)　　(m20120702)

0.74 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

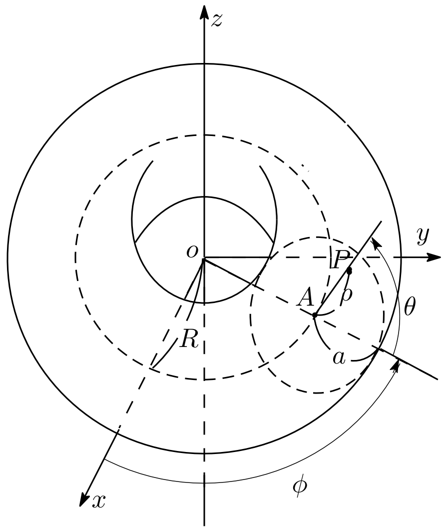
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{$*$}$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ．　ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である.

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり，z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる．　このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり，この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R>a)$．　トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と，トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする．　点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ.

(3) 同図のトーラスの表面 ($\rho = a$) においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ．　この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ．　なお円周率を π とする．

(4) 式 ($*$) と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.75 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．

C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.76 行列 A を $A = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．ただし，x と y は実数とする．

以下の問いに答えよ．なお，${}^tX$ を X の転置行列とすると，$X = -{}^tX$ を満たす X を交代行列と呼ぶ．また，$X = {}^tX$ を満たす X を対称行列と呼ぶ．

(1) A は交代行列と対称行列の和で表すことができる．交代行列を T，対称行列を S とするとき，T と S を求めよ．

(2) T は正則か否かを示せ．

(3) $x = y = 0$ のとき．T の固有値を求めよ．

(4) 行列 B を $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & y & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．

$y \neq 0$ のとき，A は正則でなく，B は正則であった．このとき，x を求めよ．

(東京大 2012)　　(m20120705)

0.77 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.78 原点を出発点として数直線上の点 $(0, \pm1, \pm2, \cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r = 1-q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1 = 2$ となる確率は q^2，$x_1 = 0$ となる確率は $2qr$, $x_1 = -2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ となる確率をそれぞれ求めよ．

(2) $x_n = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える．すなわち $x_n = 0$ かつ自然数 $m < n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である．この確率は $z = qr$ の関数として $u_n(z) = 2a_n z^n$ として表現できる．

このとき $n \geqq 2$ で $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ が成立することが示される．原点を出発し，いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする．$U(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ である．また，$\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる．以上のことを用いて，$U(z)$ を求めよ．

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し，a_n を n を使って表せ．

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.79 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m \geqq 3)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M = 6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m = 6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M = 6,\ n = 2$ の例である．この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n = m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

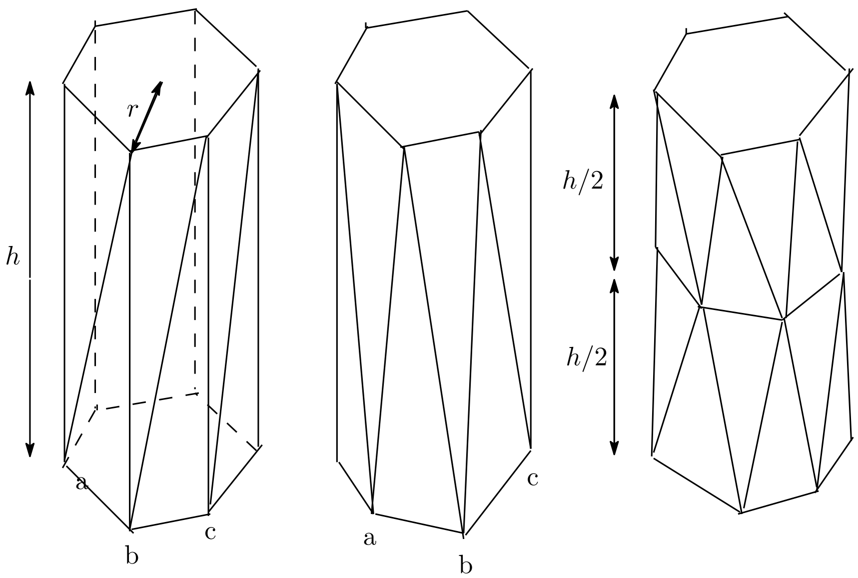


図 1　　図 2　　図 3

(東京大 2013)　　(m20130703)

0.80 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ.

(2) 複素関数 $f(z) = z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ.

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \qquad (a > 1)$$

を求めたい. $z = \exp(i\theta)$ とし, I を複素積分の形で表せ. 積分路も示すこと.

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ.

(5) 複素関数 $f(z) = f(x+iy) = \left(x^2 - y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ. また, そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ.

(東京大 2013) (m20130704)

0.81 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし, λ は固有方程式 $\lambda^3 - (\alpha+\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda = 0$ を満たすとする. このとき, $A^3 - (\alpha+\beta)A^2 + \alpha\beta A = 0$ が成り立つ. ここで, α, β は互いに異なる 0 でない実数とし, 行列 A は対角化可能であるとする, また, O を零行列, E を単位行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ.

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n E$$

ここで, a_n, b_n, c_n は実数である.

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき, (1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_n D^2 + b_n D + c_n E \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ.

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ, 無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E + A + A^2 + \cdots$$

は $a'A^2 + b'A + c'E$ と表されることを示し, 実数 a', b', c' を求めよ.

(5) (4) の a', b', c' に対し, $(E-A)(a'A^2 + b'A + c'E)$ を求めよ.

(東京大 2013) (m20130705)

0.82 次の微分方程式を, 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ のもとに解け. ただし, e は自然対数の底である, また, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

$$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$$

(東京大 2013) (m20130706)

0.83 ある定係数 2 階線形常微分方程式が, 次のように与えられている.

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり (n は自然数), α は 0 でない実数定数とする.

以下の問いに答えよ.

(1) x を変数, k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し, x の 3 次の項まで書け. ここで, e は自然対数の底である.

(2) 関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり，式 $(*)$ を n 回微分したとき，次の方程式が成り立っているとする．

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を，$f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!}$ に対し，(2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより，$f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \Big[f^{(1)}(0) - \alpha f(0)\Big]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ．ここで，m は 0 以上の整数であり，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし，$0! = 1$ とする．

(4) 次の微分方程式を，条件 $f(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = p - 2$ （p は実数定数）のもとで解け．

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた $f(x)$ について，$f(x) = 0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め，それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.84 ある行列に並んでいる人の待ち時間 t は確率密度関数

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

に従うものとする．ただし，λ は正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) 待ち時間が t 以下である確率 $F(t)$ を求めよ．

(2) 待ち時間の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 十分な数の観測の結果，待ち時間の平均が T であったとする．待ち始めてから時間 τ だけ経過したとき，残りの平均待ち時間を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140702)

0.85 カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

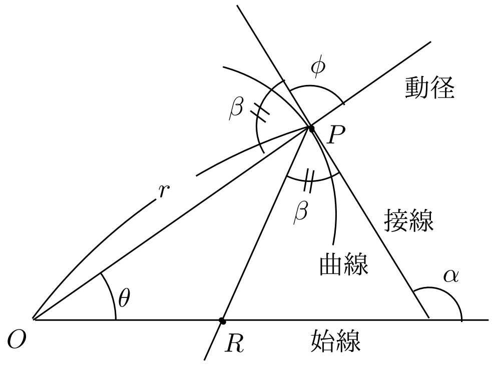
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.86　複素変数 $z = x + iy$（x, y は実数）から複素変数 $w = X + iY$（X, Y は実数）への写像 $w = f(z)$ を考える．以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　$f(z) = z^2$ のとき，z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(2)　$f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき，z 平面上の単位円周 $|z| = 1$ と単位円の内部 $|z| < 1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

(3)　$f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ のとき，z 平面上の領域 $1 \leq |z| \leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140704)

0.87　実数をとる変数 $x_{ij} (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を用いて，行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．X の行列式を $|X|$ で表し，X の逆行列を X^{-1} で表す．また，正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1)　$|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\dfrac{\partial |X|}{\partial x_{11}}$ を，$x_{ij} (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(2)　X が $|X| > 0$ を満たすとき，$y_{ij} (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を

$$y_{ij} = \frac{\partial (\log |X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する．このとき，y_{11} を，$|X|$ と $x_{ij} (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(3)　(2) で定義した $y_{ij} (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ を用いて，行列 Y を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．このとき，X^{-1} を用いて Y を表せ．

(東京大 2014)　　(m20140705)

0.88 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式において $y(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}y = e^{-\tan^{-1} x}$$

(2) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ で定義された関数 y についての微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (*)$$

の一般解を以下の設問の手順にしたがって求めることを考える．

(a) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

の 2 つの一次独立解 $y_1,\ y_2$ を実関数の形で求め，そのロンスキ行列式 $W(y_1,\ y_2)$ を計算せよ．ここでロンスキ行列式とは

$$W(y_1,\ y_2) = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$$

のことである．

(b) 式 $(*)$ の特殊解が,

$$\frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2 = 0$$

を満たす $u(x),\ v(x)$ を用いて

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

という形に書けると仮定したとき，$u(x),\ v(x)$ それぞれが満たす 1 階の微分方程式を導け．

(c) 式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(東京大 2015) (m20150701)

0.89 1 回の勝負でコインが 1 枚増減するゲームを考える．1 回の勝負で，確率 p でコインが 1 枚増え，確率 $q = 1 - p$ でコインが 1 枚減る．コインの所持数が 0 になった時点で破産となり，N 枚になった時点でゲームに勝利するとする（ただし N は 2 以上の整数である）．破産か勝利した時点でゲームは終了する．以下の問いに答えよ．

(1) コインが k 枚のとき，破産する確率を $R(k)$ とする．ただし $0 \leq k \leq N$ とする．$R(k)$ が満たす漸化式を求めよ．

(2) $p = q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(3) $p \neq q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(4) コインが k 枚ある状態から，ゲームが終了するまでの平均勝負数を $G(k)$ とする． $G(k)$ は $1 \leq k \leq N-1$ において以下の漸化式を満たすことを説明せよ．

$$G(k) = 1 + pG(k+1) + qG(k-1)$$

(5) $p = q$ の場合に $G(k)$ を求めよ．

(東京大 2015) (m20150702)

0.90 xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ （ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする． 点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

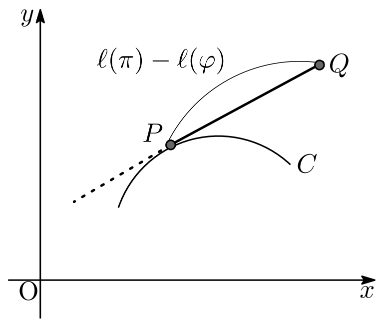


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.91 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned} \{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ．

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ の値を求めよ.

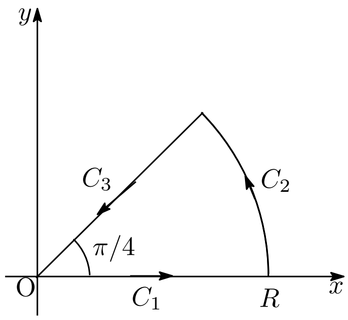


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.92 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ.

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ.

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ.

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ.

(5) 任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して，

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ.

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.93 微分方程式に関する以下の問いに答えよ; ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の定係数微分方程式

$$y''-(a+2)y'+2ay=f(x)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(a) $f(x)=0$ のとき，一般解を求めよ.

(b) $f(x)=5e^{-3x}$ かつ $a<0$ のとき，一般解を求めよ.
ただし，e は自然対数の底とする.

(2) 次のオイラー型の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$

(3)　次の連立微分方程式において，$y_1(0) = 4,\ y_2(0) = -3$ を満たす解を求めよ．

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2' = 2y_1 + 5y_2 \\ 2y_1' - y_2' = 14y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

(東京大 2016)　　(m20160701)

0.94　表が出る確率が p であるコイン投げを考える．このとき，以下の問いに答えよ．
ただし，p は，$0 < p < 1$ を満たすとする．

(1)　コイン投げを 5 回行う．

(a) 表，表，裏，裏，表の順に出る確率を求めよ．

(b) 表がちょうど 3 回出る確率を $f(p)$ とする．このとき，$f(p)$ を求めよ．

(c) (b) で求めた $f(p)$ を最大にする p を求めよ．

(2)　二人のプレイヤー A と B が，次のルールに従い，ゲームを行う．
ルール:コイン投げを 4 回行い，表が 3 回以上出た時は A の勝ち，2 回以下の時は B の勝ちとする．

(a) A の勝つ確率を $g(p)$ とする．このとき，$g(p)$ を求めよ．

(b) $g(p) = \dfrac{1}{2}$ となる p の値は，$\dfrac{3}{5} < p < \dfrac{2}{3}$ を満たすことを証明せよ．

(東京大 2016)　　(m20160702)

0.95　3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1)　(a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

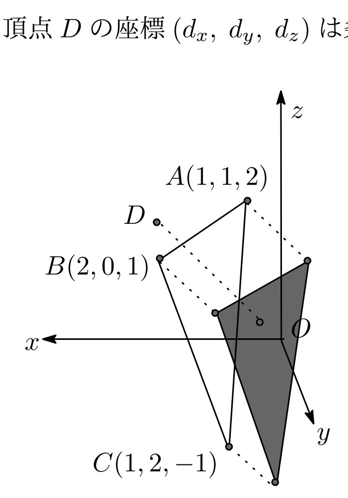
(b) 頂点 A と頂点 B, C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2)　下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1, 1, 2)$，$B(2, 0, 1)$，$C(1, 2, -1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1, 1, 1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1, -1, -1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．
ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x + 3d_y + d_z - 9 > 0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.96 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1<|z|<2$, および $2<|z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.97 3 次の正方行列 A の固有値が $-1,\ 1,\ 2$ であるとする．また，I を 3 次の単位行列とする．

(1) A の特性多項式 $\phi(x)$ を求めよ．

(2) A^3 および A^4 を，A^2 と A と I の線形和で表せ．

(3) $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$ と表せる．a_{n+1}, b_{n+1}, C_{n+1} を a_n, b_n, c_n を用いて表せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) a_n, b_n, c_n を求めよ．逆行列を求める以下の公式を用いてもよい．

公式：

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ について，$\det P \neq 0$ のとき

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} p_{22}p_{33}-p_{23}p_{32} & p_{13}p_{32}-p_{12}p_{33} & p_{12}p_{23}-p_{13}p_{22} \\ p_{23}p_{31}-p_{21}p_{33} & p_{11}p_{33}-p_{13}p_{31} & p_{13}p_{21}-p_{11}p_{23} \\ p_{21}p_{32}-p_{22}p_{31} & p_{12}p_{31}-p_{11}p_{32} & p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

(東京大 2016)　　(m20160705)

0.98 (1) 関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy-x^2}{2x^2}$$

(2) 関数 $q(t)$ に関する次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，R, C, E は 0 ではない正の実定数である．また，$q(t) \leqq CE$ が成り立つ．

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E$$

(a) 一般解を求めよ．

(b) 初期条件 $t = 0$, $q(t) = 0$ を満たす解を求めよ．

(c) 前問 (b) で求めた解の $t \geqq 0$ におけるグラフの概形を描け．

(3) 関数 $x(t)$ に関する次の 2 階の微分方程式について，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

下記のように変数変換を行なって 1 階の連立微分方程式に書き換えるとき，係数行列 A を求めよ．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}$$

ただし，m, c, k は実数定数であって，m は 0 ではない．

(東京大 2017)　　(m20170701)

0.99 確率変数 X の累積分布関数 $F(x)$ が以下の微分方程式で表されるとする．

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(1-F)}{s}$$

今，$F(m) = 1/2$ である．ただし，m, s は実数である．このとき，設問 (1)〜(5) について答えよ．

(1) 累積分布関数 F，および F の密度関数 f をそれぞれ求めよ．

(2) f が偶関数となる m を求めよ．ただし，その導出過程，または理由を示すこと．

(3) 期待値 $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f dx$ を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

次に，入力信号の値 x に応じた確率で信号を出力したりしなかったりするシステムを考える．今，n 種類の入力信号の値 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，信号が出力された頻度を調べたところ $r_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を得た．以下の問いに答えよ．

(4) 関数 $\varphi(F(x)) = \log\left(\dfrac{F(x)}{1 - F(x)}\right)$ を，x の一次式で表せ．

(5) $y_i = \varphi(r_i)$ としたとき，

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(F(x_i))\}^2$$

を最小にする m と s を求め，それぞれ下記の統計量を用いて表せ．

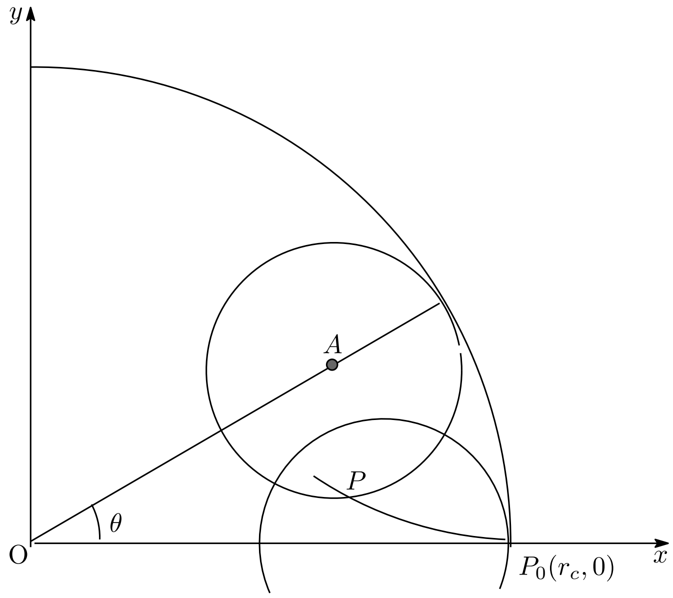
平均：　$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$,　　$\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j$

分散：　$\mathrm{var}(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$,　　$\mathrm{var}(y) = \overline{y^2} - \overline{y}^2$

共分散：　$\mathrm{cov}(x, y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \overline{x} \cdot \overline{y}$

(東京大 2017)　　(m20170702)

0.100 図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3) $r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.101 以下の問いに答えよ．i は虚数単位はとする．

(1) 実数 a は $|a| < 1$ 満たすとする．留数定理を用いて，複素積分

$$\int_C \frac{dz}{(z+ai)(az+i)}$$

を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(2) $0 < \gamma < \pi/2$ として，積分値

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos\gamma \sin\theta}$$

を次の手順で求めよ．

(a) $z = e^{i\theta}$ と変数変換を行うことにより複素積分に変形する．このとき，

$$I = \int_C f(z)dz$$

を満たす複素関数 $f(z)$ を求めよ．ただし，積分路 C は $|z| = 1$ であり，反時計回りに回るものとする．

(b) 複素関数 $f(z)$ の極を全て求めよ．

(c) 積分路 C 内に含まれる極を全て求めよ．

(d) 留数定理を用いて，積分値 I を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170704)

0.102 n を 2 以上の自然数として，n 次の正方行列 X_n を考える．X_n の i 行 j 列の行列要素を $x_{i,j}$ とし，

$$\begin{aligned} x_{i,i} &= a \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ x_{i,i+1} &= b \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ x_{i+1,i} &= c \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ x_{i,j} &= 0 \quad (|i-j| \geqq 2) \end{aligned}$$

と表されるものとする．ここで，a, b, c は実数とし，X_n の行列式を $|X_n|$ と表すものとする．次の問いに答えよ．

(1) $|X_2|$ と $|X_3|$ の値を求めよ．

(2) $|X_4|$ の値を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ としたときの，$|X_n|$ を $|X_k|$ ($k \leqq n-1$ となる自然数) の中から適切なものを用いて表せ．

(4) $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$ としたとき，$|X_n|$ を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170705)

0.103 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

を境界条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ のもとで解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0) = \dfrac{1}{2}$ とする．

(3) $x > 0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x}\,\frac{du}{dx} - u = 0 \cdots (*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，A は定数で $A \leq 1$ とする．

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2f_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d\,f_\alpha}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) f_\alpha = 0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x) \neq 0$ があるとする．ただし，α は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x) = f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (\text{ア}) \quad\Big]\frac{d\,f_\alpha}{dx} + \Big[\quad (\text{イ}) \quad\Big] f_\alpha = 0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, A, α を用いて表せ．

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては C を用いよ．

(東京大 2018)　　(m20180701)

0.104 袋の中に 3 色の玉が 8 個入っており，赤玉が 4 個，緑玉が 2 個，青玉が 2 個である．A さんが袋の中から無作為に玉を 3 個取り出し，5 個の玉が残る袋の中から B さんが無作為に玉を 3 個取り出し，色を確認した後に玉をすべて袋に戻す．この過程を 1 回の試行とし，A さんが赤，緑，青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときを $X = 1$, それ以外をX=0とし, Bさんが赤, 緑, 青の 3 色の玉を 1 個ずつ取り出せたときをY=1, それ以外を $Y = 0$ とする．この試行を繰り返し行うとき，以下の問いに答えよ．

(1) この試行を 1 回行ったときの，次の統計量を求めよ．

(a) 期待値 $E(X)$ および $E(Y)$.

(b) 相関係数 $\rho(X, Y)$.

(2) A さんは n 回目の試行で初めて $X = 1$ となったときに n 点もらえるとする．

(a) もらえる点数が 3 点である確率を求めよ．

(b) A さんのもらえる点数の期待値は，$\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} k\beta^{k-1}$ という形で表せる．ただし，α と β は実数とする．α および β の値を求めた後，期待値を求めよ．

(3) B さんは n 回目の試行で初めて $Y = 1$ となったときに r^n 点もらえるとする．ただし，r は正に実数とする．B さんがもらえる点数の期待値が有限な値をとるための，r の条件を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180702)

0.105 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r, z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r, z)\}$$

ただし，$f(r, z)$ は

$$f(r, z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

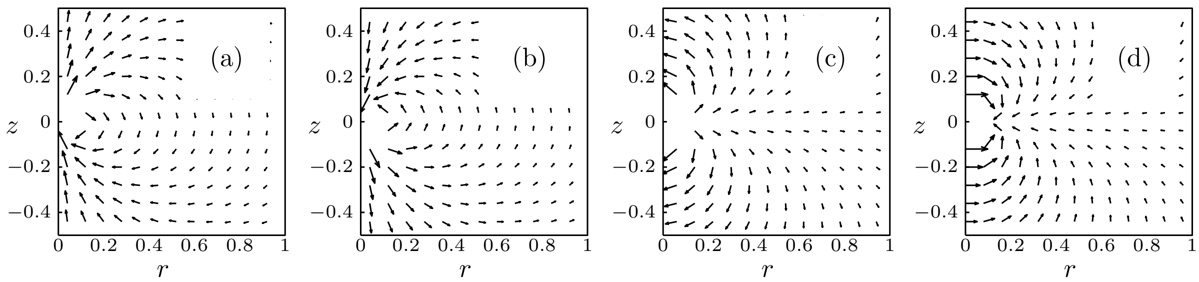
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.106　i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える.

(a) A を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない.

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ.

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ.

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ.

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ.

(3) 次の複素関数積分 I を考える.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ.

(b) 積分 I を求めよ.

(東京大 2018)　　(m20180704)

0.107　2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n} \right) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}^T \left\{ \exp\left(C\frac{2\pi k}{n} \right) \overrightarrow{a} - \overrightarrow{x} \right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{（ア）}} \left(\sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{（イ）}} \right) \overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1，a_2，a_3，n，k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1，a_2，a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018) (m20180705)

0.108 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -a(v^2 - b^2)$$

を $t \geq 0$ の範囲で考える．ただし，a, b は定数で $a > 0$, $b > 0$ とする．

(a) v の一般解を求めよ．

(b) $v(0) = 0$ のとき，v を求めよ．

(c) (b) で求めた解のグラフの概形を描け．

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 5y = x$$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(東京大 2020) (m20200701)

0.109 赤, 青, 白の 3 色の球が入っている箱から，球を次のルールで取り出すゲームを考える．

プレイヤーは，1 回の挑戦で 1 個の球を無作為に取り出し，引いた球の色に応じて以下を行う．

赤： ゲームを終了する．

青： 引いた青球を箱の中に戻し，ゲームを続行する．

白： 引いた白球を捨て，ゲームを続行する．

この挑戦をゲームが終了するまで繰り返す．最初，箱の中には，赤球が L 個，青球が M 個，白球が N 個あるものとする．以下の問いに答えよ．計算過程も示すこと．また，有理関数はは約分すること．

(1) $L=2,\ M=2,\ N=2$ のとき，1 回目の挑戦でゲームを終了する確率，2 回目の挑戦でゲームを終了する確率，3 回目の挑戦でゲームを終了する確率を，それぞれ求めよ．

(2) ゲームの途中で白球の残りの数が n 個のとき，ゲームの終了までに追加で必要な挑戦回数の期待値を $G(n)$ で表す．

(a) $n \geq 1$ のとき，以下の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(L+n)G(n) = L+M+n+nG(n-1)$$

(b) $G(0)$ を L と M を用いて表せ．また，$L=M$ のときの $G(0)$ を求めよ．

(c) $L=1,\ M=1$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(d) $L=2,\ M=2$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(e) $L=3,\ M=3$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(3) このゲームの終了時点で，それまでに青球を引いた回数が a，白球を引いた回数が b のとき，プレーヤーには $(b-a)$ の点数が与えられるものとする．$L=1,\ M=1$ のとき，点数の期待値が正になる最小の自然数 N を求めよ．

(東京大 2020)　　(m20200702)

0.110 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0<k<1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1}dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．
このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

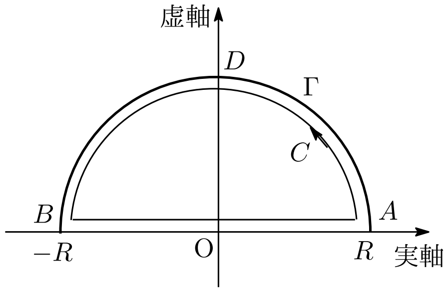


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.111　数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2} < C$ となる定数 $C\ (C > 0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.112　以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ.

(b) y の一般解を求めよ.

(c) $\alpha = 1$ とする. $y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して, 次の極限の収束・発散を調べよ. 収束する場合にはその極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022) (m20220701)

0.113 誰に投与しても独立かつ同じ確率 p で副作用が起きる薬がある. この薬を投与したとき副作用が起きているかどうかを, キットを使って検査する. 検査キットの判定結果は, 「副作用が起きている」あるいは「副作用が起きていない」のどちらかであるが, 確率 q で誤った判定結果を返す. 患者 1 人に対して薬を 1 回投与したときに, 検査キットが「副作用が起きている」と判定する確率を r とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 患者 1 人に対して薬を 1 回投与する.

(a) p と q を用いて確率 r を表せ.

(b) 「副作用が起きている」と判定された患者に, 本当に副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ.

(c) 「副作用が起きていない」と判定された患者に, 本当は副作用が起きている確率を p と q を用いて表せ.

(2) 1 人ずつ順番に薬の投与とキットによる検査を行う. 開始から T 人目で初めて「副作用が起きていない」と判定されるとする. ここで, T は確率変数である.

(a) 確率 $P(T = t)$ を t と r を用いて表せ. ただし, t は自然数とする.

(b) T の期待値と分散を求めよ.

(c) $P(T \leq 4) = 0.99$ となるような r を求めよ.

(3) 患者 $n(> 2)$ 人に対して同時に薬を 1 回投与する.

(a) 検査キットによって「副作用が起きている」と判定される患者が m 人となる事象の確率 S を求めよ. 答えには r を用いてもよい.

(b) 確率 S が最大となるような p を q, m, n の関数として求めよ. ただし, $p < \dfrac{1}{2}$, $q < \dfrac{1}{2}$, $m < \dfrac{n}{2}$ とする.

(東京大 2022) (m20220702)

0.114 i を虚数単位とし, w と z は複素数とする. また, e を自然対数の底とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える.

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x + iy$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ. x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ.

(b) A を全て求めて $x + iy$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ. ただし, x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない.

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ.

(2) a と t を実数として, 以下の積分値を求めたい.

$$F(a) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \log_e(1 + ae^{it}) \right] dt$$

(a) $z = e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1 + ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z = x + iy$ が上半面 $y > 0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.115 n 次正方行列 A の第 i 行，第 j 列の成分 a_{ij} が以下のように与えられている．

$$a_{ij} = \begin{cases} a & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

(1) 以下の場合について，A の行列式の値を求めよ．

(a) $n = 3$　　(b) $n \geq 1$

(2) 以下の場合について，A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(a) $n = 2$　　(b) $n = 3$

対角成分より下の成分が 0 となる正方行列を上三角行列と呼ぶ．n 次上三角行列 B の成分 b_{ij} が以下のように与えられている．ただし，$b > 1$ である．

$$b_{ij} = \begin{cases} b & (i = j) \\ 1 & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

(3) $n \geq 1$ の時，B に関して，以下の問いに答えよ．

(a) 正則であることを示せ．　　(b) 逆行列を求めよ．

(東京大 2022)　　(m20220704)