[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：電気通信大

0.1 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$

(2) $f(x,y) = x^4(x-2)^2 + y^2$

(電気通信大 1994)　(m19941001)

0.2 関数

$$u = x^2 - xy + y^2 \ , \qquad v = x^2 + xy + y^2$$

によって定められる (x,y) 平面から (u,v) 平面への写像 F を考える．(x,y) 平面の円の内部

$$D \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

の F による像 $E = F(D)$ の面積を求めよ．

(電気通信大 1994)　(m19941002)

0.3 次の連立 1 次方程式が (1) 解がない，(2) 解があってただ 1 つ，(3) 解空間の次元が 1 より大きい，の各場合 a の値を定め，(2),(3) の場合は解を求めよ．

$$\begin{cases} ax + y - 2z - w = 1 \\ x - y + z + 2w = 0 \\ 2x + y - 2z - w = -5 \\ x + z + aw = -3 \end{cases}$$

(電気通信大 1994)　(m19941003)

0.4 今 $\mathbf{R}^4$ の要素を $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と書くことにする．その二つの部分空間 W_1 , W_2 を次のように定義する．

$W_1 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \ \middle| \ x + 2y + 3z + 4w = 0 \ , \ \ 5x + 5z + 2w = 0 \right\}$

$W_2 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \ \middle| \ 2x - y + z - w = 0 \ , \ \ 3x + y + 4z + 3w = 0 \right\}$

(1) $\dim\,(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．また， $W_1 \cap W_2$ の一組の基底を求めよ．

(2) (1) で求めた基底を含む $\mathbf{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(電気通信大 1994)　(m19941004)

0.5 原点を中心とし，半径 2 の円周を C とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{9z^2 + \pi^2}\,dz$$

を計算せよ．

(電気通信大 1994)　(m19941005)

0.6 次の関数の極値を求めよ．　$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2} \quad (a > b > 0)$

(電気通信大 1998)　(m19981001)

0.7 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\,dx\right) dy$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dx\,dy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqq x-y \leqq \pi,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$

(電気通信大 1998)　　(m19981002)

0.8 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x+y+z+w=6 \\ 2x+2y+z+w=8 \\ -x-2y+2z+w=3 \\ x+y+2z-2w=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=a^2 \end{cases}$

(電気通信大 1998)　　(m19981003)

0.9 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) A^{-1} が存在するための条件を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}\ A = 3$ である条件を述べよ.

(4) (3) の条件がなりたつとき A によってきまる線形変換の核の基底を示せ.

(電気通信大 1998)　　(m19981004)

0.10 C_r は円 $z = re^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を正の向きに一周するものとする．次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z(z-\pi)} dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z(z-\pi)} dz$

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{\cos z}{z(z-\pi)} dz$　　(4) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)} dz$

(電気通信大 1998)　　(m19981005)

0.11 関数 $f(x)\quad (-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} f'(x),\ \lim_{x \to 0-} f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.12 次の重積分および 3 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y): x^2+y^2 \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D=\left\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ （ただし，$a>0,\ b>0$）

(3) $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}, \quad V=\{(x,y,z): x+y+z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$

(電気通信大 1999)　　(m19991002)

0.13 次の行列 A で決まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像について以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ.

(2) 像の次元を求めよ.

(3) $\mathbf{R}^4$ をユークリッド内積で内積空間とするとき，核の直交補空間の基底を求めよ.

(電気通信大 1999)　　(m19991003)

0.14 $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$， とする．$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ によって生成される $\mathbf{R}^3$ の部分空間を V とし，$\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_4$ によって生成されるの部分空間を $W(a)$ とするとき，$V\cap W(a)$ の次元と基底，$V+W(a)$ の次元と基底を求めよ.

(電気通信大 1999)　　(m19991004)

0.15 整関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ は，$f(0)=0$ を満たし，その実部が $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+ay\sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $u(x,y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ を満たす）ことから a の値を定めよ.

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ.

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ.

(電気通信大 1999)　　(m19991005)

0.16 (1) 同じ数字を 3 個並べてできる 10 進 3 桁の整数（例えば，444,　555　など）は 3 で割りきれることを証明せよ.

（a を任意の数字とするとき，$aaa=a\times\ (10^2+10^1+10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(2) 同じ数字を 3^2 個並べてできる 10 進 3^2 桁の整数は 3^2 で割りきれることを証明せよ.

（$aaaaaaaaa=aaa\times\ (10^{2\times 3}+10^3+10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(3) 1 以上の任意の整数 n に対して，同じ数字を 3^n 個並べてできる 10 進 3^n 桁の整数は 3^n で割りきれることを，n に関する数学的帰納法で証明せよ.

（$\underbrace{a\cdots a}_{3^{k+1}}=\underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k}\underbrace{a\cdots a}_{3^k}=\underbrace{a\cdots a}_{3^k}\times\ x$ と表したとき，x はどのような数になるかを考えよ.）

(電気通信大 2000)　　(m20001001)

0.17 関数 $f(x,y)=x^2y+xy^2+y^3-y$ について，次の問いに答えよ.

(1) 1 階および 2 階の偏導関数 f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ の解を求めよ.

(3) $z = f(x,y)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001002)

0.18 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D = \{(x,y) : y \leqq 3x,\ x \leqq 3y,\ x+y \leqq 4\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2000)　　(m20001003)

0.19 ３次の正方行列 A について次の条件が成り立つとする．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである．このとき以下の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A を対角化する行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001004)

0.20 R^4 内で $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ によって生成される部分空間 $< a_1, a_2, a_3 >$ を V とし，通常のユークリット内積に関する $< a_1 >$ の直交補空間 $< a_1 >^{\perp}$ を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) $xa_1 + ya_2 \in W$ となるための実数 x, y に対する条件を求めよ．

(2) V の次元 $\dim V$ を求めよ．

(3) $V \cap W$ の次元 $\dim V \cap W$ と $V \cap W$ の基底の 1 つを求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001005)

0.21 複素数 z の複素数値関数 $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のマクローーリン展開とその収束半径を求めよ．

(2) $f(z)$ の $\{z : 0 < |z-i| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(3) i を中心とし，半径 1 の円を正の向きに一周する曲線 C に沿っての $f(z)$ の積分を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001006)

0.22 a を正の実数とするとき，実数 x, y の関数 $u = e^{-ax}\sin(2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 u が，すべての x, y について $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たすように，正数 a の値を定めよ．

(2) a を (1) で定めた定数とし，u を実部にもつ $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ を求めよ．(ひとつ求まればよいものとする．答えは z の式で表すこと.)

(電気通信大 2000)　　(m20001007)

0.23 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ が独立で，いずれも正規分布 $N(n_1, {\sigma_1}^2)$ に従う．確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ も独立で，いずれも正規分布 $N(n_2, {\sigma_2}^2)$ に従う．また $\{X_i\}, \{Y_j\}$ も独立とする．$\{X_i\}, \{Y_j\}$ の標本平均および標本分散をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}, {S_1}^2, {S_2}^2$ とする．

(1) $\overline{X}-\overline{Y}$ の分布を求めよ．

(2) $\dfrac{n_1{S_1}^2}{{\sigma_1}^2}+\dfrac{n_2{S_2}^2}{{\sigma_2}^2}$ の分布を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001008)

0.24 $A=\{0,1,2\}$ とする．A^n を，A の要素を n 個並べてできる列全てからなる集合とする．さらに A^n の要素のうち，n 個の数の総和を 3 で割った剰余が k $(k=0,1,2)$ になるものの集合を $A^n(k)$ とする．

例：$A^2=\{00,01,02,10,11,12,20,21,22\}$

$A^3=\{000,001,002,\cdots,221,222\}$

$A^2(0)=\{00,12,21\},\quad A^2(1)=\{01,10,22\},\quad A^2(2)=\{02,11,20\}$

(1) $A^3(0),A^3(1),A^3(2)$ の全ての要素を上の例のように列挙せよ．

(2) 任意の正整数 n に対し，$|A^n(0)|=|A^n(1)|=|A^n(2)|=3^{n-1}$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n\geq 4$ のとき，$A^n(0)$ の要素のうち，ちょうど 2 個の 0 で始まる（3 個以上ではいけない）列の個数を n を用いて表せ．

(電気通信大 2001)　　(m20011001)

0.25 生産・経営問題に関連した下記の関数

$$f(x)=\frac{ax^n}{2}+\frac{b}{x^n},\quad x\geq 0,\quad a,b\geq 0,\quad n=1,2,\cdots$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を最小にする最適解 x^* を，極値条件を用いて求めよ．

(2) 相加平均と相乗平均の関係を用いて，最適解 x^* と $f(x^*)$ を求めよ．

(3) 以上の結果を用いて，関数の右辺第 1 項目，第 2 項目，および $f(x)$ の概形を描け．

(電気通信大 2001)　　(m20011002)

0.26 方程式 $y+e^{1-xy}=0$ を満たし，$y(0)=-e$ であるような微分可能な関数 $y=y(x)$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および，2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x,y の有理式で表し，それらの $x=0$ における値を求めよ．

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty,a)$ とするとき，a の値を求め，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0}y(x)$ を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.27 次の重積分および 3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2d,dy,\quad D=\{(x,y):x^2+y^2\leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\quad V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.28 定義域を $0\leqq u\leqq 2\pi,\ 0\leqq v\leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v)=\left(\sqrt{1+v^2}\cos u,\sqrt{1+v^2}\sin u,v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.29 次の 3 次正方行列 A に対して，その行列式 $|A|$ および，その逆行列 A^{-1} を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(電気通信大 2001) (m20011006)

0.30 $3\times\ 3$ 行列 M が

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

と与えられたとして，次の (a)〜(d) の計算を考える．

(1) M^{-1} を求める．

(2) M を下三角行列 L と上三角行列 U の積 $M = LU$ に分解する．
但し，L または U のいずれかは，対角要素がすべて 1 に等しい行列とする．

(3) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．
$Mx_1 = e_1, Mx_2 = e_2, Mx_3 = e_3$ を満たすベクトル x_1, x_2, x_3 を求める．

(4) 連立方程式

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 + 4z_3 = 3 \\ z_1 + z_2 + 3z_3 = 2 \\ 2z_1 + z_2 + 6z_3 = 2 \end{cases}$$

を満たす z_1, z_2, z_3 を求める．

(1) (a)〜(d) のすべての計算を行う場合の，適切な計算の順序を示し，手順を簡単に説明せよ．

(2) 前問の解答の手順に従って，(a)〜(d) の各々の解を求めよ．

(電気通信大 2001) (m20011007)

0.31 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v \quad (x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<, >$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001) (m20011008)

0.32 次の問いに答えよ．

(1) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ の特異点をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2001) (m20011009)

0.33 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i \arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の２つの値を計算せよ．(答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること）

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.34 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X - \mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.35 A は 3 次正方行列で，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
を満たすとする. このとき, 行列 A および行列式 $|A|$ を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051001)

0.36 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

について以下の問に答えよ. ただし, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を表すものとする.

(1) 部分空間 W_1 , W_2 の基底および次元を求めよ.

(2) 部分空間 $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ の基底および次元を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051002)

0.37 (1) $xy-$平面内の曲線 $f(x,y)=x^3+3xy+4y^4-x-4=0$ 上の点 $(2,-1)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ.

(2) 点 (x,y) が条件 $y^2-x^2-1=0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x,y)=y^3+2x$ の極値を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051003)

0.38 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

(電気通信大 2005) (m20051004)

0.39 次の重積分の値を求めよ.

$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $D=\{(x,y)\ :\ 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 2,\ y \geqq\ |x|\}$

(電気通信大 2005) (m20051005)

0.40 次の各複素積分の値を求めよ.

ただし, 積分路は原点を中心として半径 1 の円周上を反時計回りに一周するものとする.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z(1+2z)}dz$

(電気通信大 2005) (m20051006)

0.41 次の実定積分について考える（ただし $a>1$ とする）.

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta+a-1} \qquad (*)$$

以下の設問 (1)〜(4) に従って答えよ.

(1) $z=e^{2i\theta}$ とおくとき, $\cos 2\theta$ を z を用いて表せ.

(2) 設問 (1) で示した変数変換 ($z=e^{2i\theta}$) によって, 式 $(*)$ の右辺を変数 z による複素積分にせよ. その際, 積分経路はどうなるかを説明せよ.

(3) 設問 (2) で示した複素積分において, 積分経路内での被積分関数の極と位数ならびに留数を求めよ.

(4) 留数定理を用いて, 実定積分 I の値を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051007)

0.42 物質 R_α は時間がたつにしたがって自然に減少していく. その減少する割合はその時点 t で残っている質量 x に比例する. その比例定数を $k(>0)$ とする.

(1) 質量 x と時点 t との関係を微分方程式で書け.

(2) 最初の質量を A とし, 上の微分方程式を解いて質量 x を表す式を求めよ.

(3) 一定の時間 T を経過するごとに質量は等比数列をなして減少することを示せ.

(4) 物質 R_α は, 質量が半減するのに 1600 年かかる. 800 年では初めの量のおよそ何%になるか.

(電気通信大 2005) (m20051008)

0.43 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) 2つのロットの中から1つのロットを選び, さらにその箱の中から1個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット1の製品である確率を求めよ.

(2) ロット2の製品を30個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と2項係数を使って表せ. ただし, 2項係数は

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n $$

で定義される.

(電気通信大 2005) (m20051009)

0.44 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)$ について，次の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ.

(2) $f'(x)$ を計算せよ. (3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061001)

0.45 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2}dxdy$, $D : y \geqq 0,\ x-y \geqq 0,\ x+y \leqq 1$.

(2) $\displaystyle\iiint_E xydxdydz$, $E : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1$.

(電気通信大 2006) (m20061002)

0.46 4次の単位行列を E とし，4次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．さらに λ を実数とし，$W(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = \lambda x\}$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) $\det(\lambda E - A)$ を求めよ.

(2) $W(\lambda) \neq \{0\}$ となるような λ をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた各 λ に対し，$W(\lambda)$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2006) (m20061003)

0.47 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ および未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ を次のようにおく.

$$ A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. $$

(1) 3つのベクトル $\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, A^2\boldsymbol{u}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(2) 3つのベクトル $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}$ が一次独立かどうか判定せよ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，3つのベクトル $A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, A^3\boldsymbol{x}$ は一次独立でないことを示せ.

(電気通信大 2006) (m20061004)

0.48 (1) 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$ の極をすべて求め，それらを複素平面上で図示せよ．

(2) (1) の関数 $f(z)$ について次の積分を計算せよ．

$$(a)\quad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz\ . \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)dz\ .$$

(電気通信大 2006)　　(m20061005)

0.49 次の手順によって，任意の正数 X の平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めることができる．

① $\sqrt{X}$ に近い数 x を選ぶ．

② x と $\dfrac{X}{x}$ の平均値 $x'=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{X}{x}\right)$ を計算する．

③ あらかじめ定めておいた小さい数 ℓ に対して，$|x-x'|<\ell$ となれば，x' を $\sqrt{X}$ の近似値とする．そうでない場合は，x' を新しい x として ② に戻り計算を繰り返す．

(1) この手順によって $\sqrt{X}$ の近似値が得られることを説明せよ．

(2) $X=7$ として，その平方根 $\sqrt{X}$ の近似値を求めよ．ただし，$\ell=0.001$, x の初期値を 3 とする．

(3) 区間 $[0,7]$ において，関数 $f(x)=A\sqrt{x}+B$ を一次関数 $g(x)=ax+b$ で最小二乗近似する．この時，$g(x)=\dfrac{\sqrt{7}}{7}x$ になるとすると，元の関数 $f(x)=A\sqrt{x}+B$ の A,B の値はいくらであるか？小数点以下三桁まで求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061006)

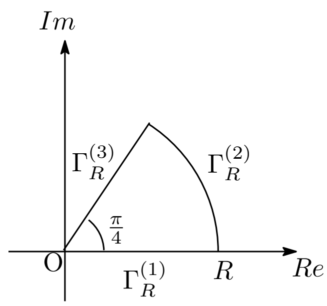
0.50 (1) 集合 $\{1,2,3\}$ の空でない部分集合をすべて書け．それらの部分集合を，3 を含むものと含まないものに分けよ。

(2) $n=3$ のとき $\{1,2,3\}$ のすべての空でない部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1\le k\le 3$ の和
$$\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_k}$$
を計算せよ（計算過程も書け）．

(3) $n(n\ge 1)$ に関する帰納法により $$\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_k}=n$$
を示せ．ただし，左辺は $\{1,2,\cdots,n\}$ の空でないすべての部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1\le k\le n$ に対して和を計算するものとする．

(電気通信大 2006)　　(m20061007)

0.51 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)},\Gamma_R^{(2)},\Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．
$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2}dz=0 \qquad ①$$
次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R=\int_0^R e^{-x^2}dx\ , \qquad\qquad P_R=\int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2}dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad\qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1),(2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.52 微分の定義に基づいて，次の各関数を x について微分せよ．

(1) $\cos x$　　(2) $\sqrt[3]{x}$

(電気通信大 2006)　　(m20061009)

0.53 $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{10}$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．但し，$f'(x)$ は $f(x)$ の x に関する 1 階の微分を表す．

(1) $f'(0)$　　(2) $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$　　(3) $f'(1)f'(-1)$

(電気通信大 2006)　　(m20061010)

0.54 コイン投げを 1 回行い，その結果に応じた X を

$$X = \begin{cases} 1 & （裏が出たとき） \\ 2 & （表が出たとき） \end{cases}$$

のように定めてから，偏りのないサイコロを X 回投げる．このときのサイコロの 1 の目の出現回数を Y とする．

コインの表の出る確率を p として．以下の問いに答えよ．

(1) X の確率 $P(X=i)$ $(i=1,2)$, X の期待値 $E(X)$, X の分散 $V(X)$ を p を使って表せ．

(2) 条件つき確率 ($X=i$ という条件の下での Y の確率) $P(Y=j \mid X=i)$ を可能な (i,j) の組み合わせに対しすべて求めよ．

(3) 条件つき期待値 ($X=i$ という条件の下での Y の期待値) $E(Y \mid X=i)$ $(i=1,2)$ を求めよ．

(4) Y の確率 $P(Y=j)$ $(j=0,1,2)$, Y の期待値 $E(Y)$ を p を使って表せ．

(電気通信大 2006)　　(m20061011)

0.55 次の 4 次正方行列 A, B に対して $A, B, A^{-1}B$ の行列式を求めなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2a+b & 2c+d & 0 & b \\ a+b & c+d & -a & b \\ -a-b & -c-d & 3a & b \\ -2a+b & -2c+d & a & b \end{bmatrix}$$

(電気通信大 2007)　　(m20071001)

0.56 次の 3 次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE-A)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$ と因数分解される．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(2) $V_1=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ (A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$, $V_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ (A-\lambda_2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ．

(3) $(A-\lambda_1E)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ．

(4) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.57 (1) 関数 $f(x)=x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(2) 関数 $g(x)=\log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ．

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x\sin x}$,　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\log(1+x)}{e^{x^2}-1}$

(電気通信大 2007)　　(m20071003)

0.58 関数 $y=f(x)$ のグラフ C が　$(x,y)=(\sin t,\ t\cos t)$,　$(0\leq t\leq\pi/2)$　と表されるとする．$t=\pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0,y_0)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x_0)$ を計算し，点 P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ．　　(3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071004)

0.59 複素平面の円 $|z+i|=\sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2+1}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^4-1}dz$

(電気通信大 2007)　　(m20071005)

0.60 $A=\begin{bmatrix}3&5&4\\5&9&7\\-8&-14&-11\end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ．

(3) $T_A(x)=Ax$ で定まる写像 $T_A:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\,T_A$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ．
（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\,T_A$ に属する．
注 : $\mathrm{Im}\,T_A=\{T_A(x)\mid x\in\boldsymbol{R}^3\}$,　$\mathrm{Ker}\,T_A=\{x\in\boldsymbol{R}^3\mid T_A(x)=0\}$.

(電気通信大 2008)　　(m20081001)

0.61 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$　とおく．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表されるか表されないかを判定し，表される場合は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(電気通信大 2008)　　(m20081002)

0.62 (1) $u = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく．$\sin x$, $\cos x$ を u を用いて表せ．

(2) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx\,,\quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081003)

0.63 C^2 級の関数 $f(x,y,z)$ が $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y,z) = g(r)$ と表されるとする．$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) Δf を $g'(r)$, $g''(r)$ を用いて表せ．

(2) $\Delta f = 0$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ のとき，$g(r)$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081004)

0.64 $f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極を極形式 $(re^{i\theta})$ の形で表せ．

(2) $z = \alpha$ を $f(z)$ の極とするとき，$f(z)$ の $z = \alpha$ における留数が $\dfrac{1}{6\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

(電気通信大 2008)　　(m20081005)

0.65 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ．

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ．

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ．

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.66 $V = \mathbb{R}^4$ とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{v}_2\,,\ \boldsymbol{v}_3\,,\ \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする．$f : V \to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2\,,\quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3\,,\quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1\,,\quad f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし，$g : V \to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\,,\quad g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\,,\quad g(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1\,,\quad g(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元，$\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求めよ．

(2) 線形写像 $g : V \to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ．さらに，行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) g は同型写像である．g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091002)

0.67 関数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x \quad (x > 0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)\,,\ \lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) $g(x) > 0 \ \ (x > 0)$ であることを示せ．

(4) $f(x)$ の値域 $\{f(x) \mid x > 0\}$ を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091003)

0.68 次の微分方程式を解け．

(1) $\sin x \cos^2 y - \dfrac{dy}{dx} \cos^2 x = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$

(電気通信大 2009)　　(m20091004)

0.69 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}\ , \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.70 A を下に定める $2\times\ 2$ 行列とし，M は A などを用いて下のように定義される $4\times\ 4$ 行列とする（I は単位行列，O は零行列）．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -I & 2A^{-1} \\ A & O \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) M の行列式 $\det M$，および M の逆行列 M^{-1} を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ について $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解を求めよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101001)

0.71 $\nu = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が 3 次元線形空間 V の基底であり，1 次変換 $f\ :\ V \to V$ が

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_3) = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ ,$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) f の基底 ν に関する表現行列 A を求めよ．

(2) 合成写像 $g = f \circ f$ の，基底 ν に関する表現行列 B を求めよ．

(3) $\mathrm{rank}A$, $\mathrm{rank}B$ を　それぞれ求めよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101002)

0.72 関数 $f(r)$ から決まる 2 変数関数

$$u(x,y) = f(r)\ , \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ を $f'(r)$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \dfrac{1}{r}f'(r)$ が成り立つことを示せ．

(電気通信大 2010)　　(m20101003)

0.73 次のそれぞれの重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy\ ,$　ただし，$D = \{(x,y)\ :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+3y)^2\,e^{x-y}\,dxdy\ ,$　ただし，$D = \{(x,y)\ :\ |x+3y| \leq 1\ ,\ |x-y| \leq 1\}$

(電気通信大 2010)　　(m20101004)

0.74 α を 0 でない複素数とし，

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\alpha)}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数 a, b を使って

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\alpha}$$

と書くとき，a, b を α の式で表せ．

(2) $f(z)$ を $z=0$ を中心として，領域 $0 < |z| < |\alpha|$ においてローラン展開せよ．

(3) $\alpha = 1+i$ とする．$z=0$ を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路に沿って $f(z)$ を積分したときの値を計算せよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101005)

0.75 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とし，I を 3 次の単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の逆行列があれば求めよ．

(2) 行列式 $\det(\lambda I - A)$ を λ に関する多項式の形に整理せよ．

(3) $A\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$ となる $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつような，実数 λ_0 を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ をひとつ答えよ．

(4) A^{2010} を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111001)

0.76 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める．ここで，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$, $f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111002)

0.77　つぎで定義される関数 $f(x,y)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x,y) = x^3 + 3axy + y^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

(1) $a \neq 0$ のとき，$f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $a = -1$ のとき，方程式 $f(x,y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111003)

0.78　次の重積分について，以下の問いに答えよ．

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4} \qquad (D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1)$$

(1) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ とおくとき，x, y の u, v に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(2) I の値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111004)

0.79　定積分

$$I = \int_o^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\sin\theta}\, d\theta$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z で表せ．ただし，i は虚数単位である．

(2) $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の形に表せ．ここで，積分路 C は円 $|z| = 1$ を正の向きに一周するものとする．

(3) I の値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111005)

0.80　3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121001)

0.81　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x + y - 2z = 0 \right\}.$$

線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元とその基底を 1 組求めよ.

(2) V の部分空間 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ. ただし, $\mathrm{Im}\, f$ は f の像を表す.

(3) V の基底 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$ で, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ を満たすものを 1 組求めよ.

(電気通信大 2012) (m20121002)

0.82 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ に対して, 極座標による変数変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\left[\dfrac{\partial z}{\partial r}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right] = \left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right] A$ を満たす行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を求めよ.

(2) x, y の r, θ に関するヤコビアン（ヤコビの行列式）$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算せよ.

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ を r, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を使って表せ.

(電気通信大 2012) (m20121003)

0.83 次の重積分, 3 重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)}\,dxdy\ , \quad D = \{(x, y)\ :\ |x+y| \leqq\ 1,\ |x-y| \leqq\ 1\}$

ただし, e は自然対数の底とする.

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ , \quad D = \Big\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ 2x,\ y \geqq\ 0\Big\}$

(3) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\,dxdydz\ , \quad V = \Big\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq\ 1\Big\}$

(電気通信大 2012) (m20121004)

0.84 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4 + 1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ のすべての極を極形式 $\big(re^{i\theta}$の形$\big)$ で表せ.

(2) α を $f(z)$ の極とするとき, $f(z)$ の α における留数が $\dfrac{1}{4\alpha}$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ.

(電気通信大 2012) (m20121005)

0.85 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ を計算せよ.

(2) 原点を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ.

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 A を求めよ.

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である.

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである.

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである.

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える. k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ.

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする. A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

0.86 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x + z = 0$ に関する対称移動とし, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y - z = 0$ に関する対称移動とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x + z = 0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき, 点 P の座標を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ を解け.

(4) 平面 $x + z = 0$ と平面 $y - z = 0$ のなす角 θ を求めよ, ただし, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる. 軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.87 関数 $u(x, y, t) = \dfrac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$ $\quad (t > 0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

以下では, $t > 0$ を定数とする.

(2) $u(x, y, t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x, y, t) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} u(x, y, t)\, dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.88 次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\sin^2(x - 2y)dxdy \quad D = \left\{(x, y)\ :\ 0 \leq x + 2y \leq \pi,\ 0 \leq x - 2y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \log\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy \quad D = \left\{(x, y)\ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\right\}$

(電気通信大 2013)　　(m20131004)

0.89 複素関数 $f(z)$ $\dfrac{z^2}{z^4 + z^2 + 1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.90 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため, 掲載を差し控えさせていただきます.

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ．

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.91 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 11 & -9 & 13 & -11 \\ 18 & -16 & 10 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$ および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker}\, f$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, f \subset V$ を示せ．

(3) V と $\mathrm{Im}\, f$ の共通部分 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141002)

0.92 次の関数 $f(x, y),\ g(x, y)$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)\ , \qquad g(x, y) = 3x^3 + y^3 + 2x^2y$$

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141003)

0.93 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y): x^2+y^2\leqq\ y\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy\,,\qquad D=\{(x,y): |x|+|y|\leqq\pi\}$

(電気通信大 2014)　　(m20141004)

0.94 複素関数 $f(z)=\dfrac{8}{2z^4+1-\sqrt{3}i}$ に対して，　以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{2}{3}} f(z)dz$ を求めよ．ただし，積分路は正の向きに一周するものとする．

(電気通信大 2014)　　(m20141005)

0.95 a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^4$ を次の通りとする．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}\,,\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\,f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\,f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ．

(2) $\dim(\mathrm{Im}\,f)=2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $\dim(\mathrm{Im}\,f)=2$ のとき，$\boldsymbol{b}\in\mathrm{Im}\,f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151001)

0.96 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，$p:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$，$q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix},\quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\,p\subset\mathrm{Ker}\,(g\circ f)$ を示せ．
ここで，$\mathrm{Ker}\,p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g\circ f)$ は合成写像 $g\circ f$ の核である．

(2) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，を条件 $g\circ p=q\circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.97 関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき，$f(x,y)=0$ を $r,\ \theta$ の式で表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,y):f(x,y)\leqq 0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ の面積 S を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151003)

0.98 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,,\qquad D=\{(x,y):0\leqq x-y\leqq x+y\leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz\,,\qquad v=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.99 以下の問いの答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくとき，$\sin\theta$ を z の式で表せ．

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4iz-1}$ の極をすべて求め，各極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151005)

0.100 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A=\begin{bmatrix}6&-18&3\\2&-6&1\\4&-14&3\end{bmatrix},\qquad P=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ x-2y+z=4\right\}$$

さらに，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定義する．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\,f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\,f$ と P の共通部分 $l=(\mathrm{Im}\ f)\cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x}\in P$ かつ $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.101 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を次式で定義する．

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2\qquad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i=1,2)$．
さらに，W を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g:W\to W$ を

$$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\qquad(f(\boldsymbol{x})\in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ の基底を求めよ．

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.102 (1) $z = f(x, y)$ を C^2 級関数とし，$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ であるとする．

(a) z_u を z_x, z_y, u, v を用いて表せ．

(b) z_{uu} を z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, u, v を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161003)

0.103 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x - y}{(x^2 - y^2)^2 + 1} dxdy$,　$D = \{(x, y)\ :\ 0 \leqq\ x + y \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ x - y \leqq\ 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$,　$D = \{(x, y)\ :\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 1\}$

(電気通信大 2016)　　(m20161004)

0.104 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ に対して，以下の各問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ で，e は自然対数の底とする．

(1) $f(z)$ のすべての極を求め，各極における留数を求めよ．

(2) $z = Re^{i\theta}$ $(R > 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|f(z)| \leqq \frac{1}{R^2 - 1}$$

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161005)

0.105 次の 3 次正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ -24 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171001)

0.106 p, q を実数とし，3 次正方行列 A, B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ に含まれるための x, y, z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ となるような p, q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(x) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f\}$ とする,.

(電気通信大 2017)　　(m20171002)

0.107 関数 $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) xyz 空間内の曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(2, -1, 0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $f(x, y) = 0$ が点 $(2, -1)$ の近くで定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ を $x = 2$ の近くで

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots$$

とテイラー展開したときの係数 a_0, a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.108 (1) 積分順序を交換することにより，次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{x \sin y}{y} dy$$

(2) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2 dxdydz\ , \qquad V = \left\{(x, y, z) : y \leqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2 + y^2 + x^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2017)　　(m20171004)

0.109 以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z| = 1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 I_1, I_2 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2}\ , \qquad I_2 = \int_{C_2} \frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I = \int_{|z-1|=1} f(z) dz \qquad \text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z) = \dfrac{1}{z(1 - \cos z)}$ の極 $z = 0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171005)

0.110 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181001)

0.111 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.112 関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 連立方程式 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 (a,b) をすべて求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181003)

0.113 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle \iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dxdy \quad D = \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle \iiint_E xyz\,dxdydz, \quad E = \left\{(x,y,z) : y \geqq x \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

0.114 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極を求めよ．

(2) $f(z)$ の極 $z = \alpha$ における留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を α を用いた簡単な式で表せ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181005)

0.115 次の 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 3 \\ -6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_n = A^n \boldsymbol{a} \ (n = 1,2,3,\cdots)$ と定義するとき，$\boldsymbol{a}_n$ を求めよ．

(電気通信大 2019)　　(m20191001)

0.116 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,　 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4) \ , \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 Ker f の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの Ker f の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 Im f の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\ f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\ f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.117 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x, y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x, y)\ dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.118 以下の各問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y' = y^2 - 1$ の解 $y = y(x)$ で，初期条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(2) 次の各微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．

(i) $y' + 2y\cos x = \cos x$　　　(ii) $y'' + 2y' + 2y = \cos 3x$

(電気通信大 2019)　　(m20191004)

0.119 $0 < a < 1$ を満たす実数 a に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素関数 $f(z)$ の特異点をすべて求め，$f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．　　$f(z) = \dfrac{1}{az^2 - i(a^2 + 1)z - a}$

(2) 次の定積分 $I(a)$ を求めよ．　　$I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 - 2a\sin\theta + 1}$

(電気通信大 2019)　　(m20191005)

0.120 a を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax\ (x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}f$ ついて，$\mathrm{Im}f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ．

(2) a が (1) で求めた値のとき，f の核 $\mathrm{Ker}f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker}f$ を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) a が (1) で求めた値のとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}f$ となる b の条件を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.121 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を次の通りとする．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の実数の固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}$, $A^2\boldsymbol{v}$ が 1 次独立でないことを示せ.

(3) $A^3\boldsymbol{v}$, $A^4\boldsymbol{v}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ の 1 次結合で表せ

(電気通信大 2020)　　(m20201002)

0.122 関数

$$f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z = f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．

ただし，$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x = \tan y \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ．

(3) 曲面 S と平面 $z = 0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.123 次の重積分の値をそれぞれ計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2)\,dxdy\ ,\quad D = \left\{(x,y) : 0 \leqq y \leqq x \leqq \sqrt{\pi}\right\}$

(電気通信大 2020)　　(m20201004)

0.124 (1) $z^4 + 1 = 0$ となる複素数 z を求めよ．

(2) $x = \sqrt{\tan\theta}\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対して，導関数 $\dfrac{dx}{d\theta}$ を x の式で表せ.

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201005)

0.125 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(2,1,3)$, $\mathrm{B}(1,1,2)$, $\mathrm{C}(3,0,1)$, $\mathrm{D}(2,-1,2)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ．

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211001)

0.126 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) I を 3 次単位行列とするとき，行列 $(A-2I)(A-3I)$ を求めよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) A の m 乗 A^m（m は非負整数）を

$$A^m = \lambda_1^m \, P_1 + \lambda_2^m \, P_2$$

という形に表せ．ここで，P_1, P_2 は 3 次正方行列であり，P_1, P_2 の各成分，および λ_1, λ_2 は，m に依存しない定数である．

(電気通信大 2021)　　(m20211002)

0.127 領域 D ： $-\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi$, $-\dfrac{\pi}{3} < y < \dfrac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x,y) = 2\sin^2 x - 2\sin x \sin y - \sin^2 y$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 $(a,b) \in D$ をすべて求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211003)

0.128 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dxdy$,　　$D = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leqq x \leqq y, \ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy \ \sin(xy) \, dxdy$,　　$D = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}, \ x|y| \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(電気通信大 2021)　　(m20211004)

0.129 次の微分方程式を解け．

(3) $y'' + 2y' + y = \sin 2x$

(電気通信大 2021)　　(m20211005)

0.130 (1) $z = e^{i\theta}$ とおくとき，$\cos\theta$ を z の有理式で表せ．ただし，i は虚数単位で，e は自然対数の底とする．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ の極をすべて求めよ．更に，絶対値が 1 より小さい極における留数を計算せよ．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ の値を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211006)

0.131 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-3y+\ 6z+4w \\ -3x+3y-\ 8z-4w \\ 2x+3y-\ 3z-4w \\ -5x+6y-15z-8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ．

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.132 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．

基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.133 xy 平面上の曲線 $C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases} \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，

これを $y = f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)\ \ (0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.134 次の重積分の値を求めよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} e^y \, dxdy, \qquad D_1 = \Big\{(x, y) \ : \ 0 \leqq x + y \leqq 1, \ \ 0 \leqq x - y \leqq 1\Big\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} x\sqrt{x} \, dxdy, \qquad D_2 = \Big\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqq x\Big\}$

(3) $I_3 = \displaystyle\iiint_V y\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} \, dxdydz, \quad V = \Big\{(x, y, z) \ : \ x \geqq 0, \ y \geqq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\Big\}$

(電気通信大 2022)　　(m20221004)

0.135 複素関数 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z - i)}$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z) \, dz$ （積分路は正の向きに 1 周）の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221005)