[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：東京工業大

0.1 $x^2+y^2=1$ のもとで，$f(x,y)=x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2$ の最大値，最小値，およびそれらを与える x, y を求めよ．

(東京工業大 1996)　(m19960801)

0.2 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 dx\,dy \qquad , \qquad D : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a,b>0)$$

を求めよ．

(東京工業大 1996)　(m19960802)

0.3 微分方程式

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$$

の一般解を求めよ．

(東京工業大 1996)　(m19960803)

0.4 $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 行列Ａの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする．
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X)=AX$$

と定義する．φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(東京工業大 1996)　(m19960804)

0.5 区間 $[-1,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ で，次の 2 条件 (1),(2) を同時に満たす例をあげよ．

(1) $f(0)=0,\ f(\frac{1}{n})=0 \quad (n=1,2,\cdots)$

(2) $f(x)$ は $0,\ \dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$ において微分可能で $f'(0)=0,\ f'(\frac{1}{n})=1\ (n=1,2,\cdots)$

(東京工業大 1997)　(m19970801)

0.6 実数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を満たすならば，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ となることを示せ．

(東京工業大 1997)　(m19970802)

0.7 3×3 行列 A が

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，次の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A^n を求めよ.

(東京工業大 1997)　　(m19970803)

0.8 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．θ を固定するとき，2次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ (c は 0 でない定数，${}^t v$ は v の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

0.9 (x, y) 平面内の領域 $D = \{ 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x^2 - y^2}\, dx\, dy$ を計算せよ.

(東京工業大 1998)　　(m19980801)

0.10 微分方程式 $(*)$　$\dfrac{dy}{dx} = y + xy^2$　を考える.

(1) $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ は どんな微分方程式を満たすか.

(2) $(*)$ の一般解を求めよ.

(東京工業大 1998)　　(m19980802)

0.11 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(2) 実直交行列 P で上の性質をもつものは存在するか？　YES ならば 例をみつけよ．NO ならば その理由を記せ.

(東京工業大 1998)　　(m19980803)

0.12 $\mathbf{0}$ でない どんな実ベクトル (x, y, z) に対しても

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & a \\ -a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > 0$$

となるのは，a が どんな実数のときか.

(東京工業大 1998)　　(m19980804)

0.13 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (\, x^{2n} + 2y^{2n} + 1\,)\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ の値を求めよ.

(東京工業大 1999)　　(m19990801)

0.14 2階線形微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = e^x$ に対して，初期値問題 $y(0) = p,\ y'(0) = q$ の解を求めよ.

(東京工業大 1999)　　(m19990802)

0.15 実 n 次正方行列 X で

$$X^k \neq E_n \ (1 \leq k < n)\ ,\ \ X^n = E_n$$

となるものの例を作れ．ここで E_n は単位行列を表す.

(東京工業大 1999)　　(m19990803)

0.16 n 次正方行列 $A = (\ a_{ij}\ )$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & (\ i = j\ ) \\ -1 & (\ |\ i - j\ | = 1\ ) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める． A の行列式を求めよ．

(東京工業大 1999) (m19990804)

0.17 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = (x+y)\, e^{-(x^2+y^2)}$ で定義する．

(1) f は $\mathbf{R}^2$ において最大値，最小値をもつことを示せ．

(2) f の最大値，最小値とそれらを与える点を求めよ．

(東京工業大 2000) (m20000801)

0.18 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

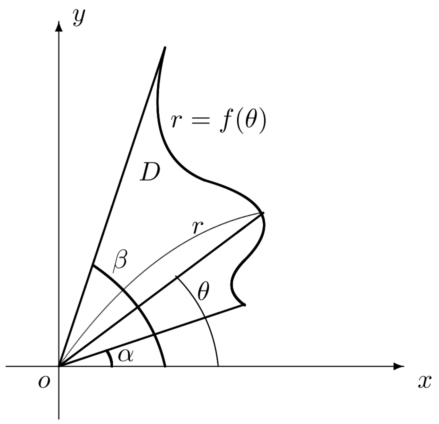
および，連続曲線

$r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000) (m20000802)

0.19 n を奇数とする， n 次正方行列 B が ${}^tB = -B$ を満たすならば，B は正則行列ではないことを証明せよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表すものとする．

(東京工業大 2000) (m20000803)

0.20 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2000) (m20000804)

0.21 (1) 関数 $x\cos x$, $\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項まで Maclaurin 展開せよ．

(2) 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$

(東京工業大 2001) (m20010801)

0.22 条件 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ の下で，
$F(x,y,z) = lx + my + nz$ $(l, m, n$ は定数) の最大値，最小値を求めよ．

(東京工業大 2001) (m20010802)

0.23 $G(x,y,t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x,y,t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (t > 0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t>0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y,t)\,dx\,dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.24 (1) 次の積分をせよ． $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D: 0\le x\le y\le 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2=4ay$, $x^2+y^2=ay$ に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.25 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010805)

0.26 行列 $A=\begin{bmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ について，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 固有値に対する基底ベクトルを求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010806)

0.27 次の行列の階数を求めよ．ただし，x は複素数とする．

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010807)

0.28 (1) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx$

(2) $\varphi(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^2)dx$ なる積分において，

(a) $2\varphi(a)=\varphi(a^2)$ が成り立つことを示せ．

(b) $\varphi(a)$ を求めよ．ただし，$|a|\neq 1$ とする．

(東京工業大 2002)　　(m20020801)

0.29 (1) 次の関数をマクローリン展開し，ゼロでない最初の 3 項を示せ． $\tan^{-1}x$

(2) 次の級数の収束域を求めよ． $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{3x}{2\cdot 4}+\dfrac{4x^2}{3\cdot 5}+\cdots\cdots$

(東京工業大 2002)　　(m20020802)

0.30 極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を考える．$(x,y)=(0,0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ について $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を r,θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.31 $a>0$ に対して積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020804)

0.32 a を実数とするとき，次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002)　　(m20020805)

0.33 A, B を２次正方行列とする．次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

(1) λ が A の固有値で，μ が B の固有値のとき，$\lambda\mu$ は AB の固有値である．

(2) A は正則行列とし，λ が A の固有値とすると，$\lambda \neq 0$ であり λ^{-1} は A^{-1} の固有値である．

(東京工業大 2002)　　(m20020806)

0.34 ２次曲面

$$2x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz - zx + 10x - 9 = 0$$

の標準形を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020807)

0.35 積分　$I = \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \int_0^x (x+y)e^{-(x+y)} \frac{dy}{2y+1} \right\} dx$　の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030801)

0.36 微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^x$ の解で，$y(0) = 1$, $y(1) = e/4$ を満たすものを求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030802)

0.37 次のような n 次正方行列の行列式を Δ_n とする．

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$ が成り立つことを示せ．

(2) Δ_n の値を求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030803)

0.38 A は３次複素正方行列で，$A^2 \neq O$, $A^3 = O$ を満たすとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) ３次元の複素列ベクトル $\overrightarrow{x}$ を $A^2\overrightarrow{x} \neq O$ ととる．このとき，$\{\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}, A^2\overrightarrow{x}\}$ は１次独立であることを示せ．

(2) 上で与えられた $\overrightarrow{x}$ に対して，３次正方行列 P を $P = (A^2\overrightarrow{x} \quad A\overrightarrow{x} \quad \overrightarrow{x})$ とおく．このとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$　であることを示せ．

(東京工業大 2003)　　(m20030804)

0.39 ２変数関数 $f(x, y)$ を次で定める．　$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$

(1) $f(x, y)$ は極値をもたないことを示せ．

(2) 閉円板 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+y^2\le 1\}$ の上で $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040801)

0.40　次の 2 つの積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\log(a+x)}{x^2}dx$　　（$a>0$ は定数）．

(2) $\displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{1}{xy(x+y)}dxdy$

(東京工業大 2004)　　(m20040802)

0.41　定数 a に対し，方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1+a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

が解をもつ a と一般解を求めよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040803)

0.42　$C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040804)

0.43　二変数 x,y の関数　　$z=xy(x^2+y^2-1)$　　の極値を求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050801)

0.44　a, b を正の数とするとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1}\left(\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}\right)dxdy$$

(東京工業大 2005)　　(m20050802)

0.45　行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ. A を対角化する正則行列 P も求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050803)

0.46　行列　　$B=\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$　　について

(1) 行列式を求めよ.　　(2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005)　　(m20050804)

0.47　$f(x,y)$ を $\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ 上の C^2- 級関数，　$x=r\cos\theta$，　$y=r\sin\theta$　を $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ の極座標とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

(2) $f(x,y)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数で，θ にはよらないとする．さらに f は条件
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,,\quad \text{および}\quad r=1\text{ のとき } f=0\,,\ r=2\text{ のとき } f=1$$
を満たすとする．このような f を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060801)

0.48 次を示せ．

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ．
$$\int_x^{x+p} f(t)dt=\int_0^p f(t)dt \quad (x\in\boldsymbol{R})\,.$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |\sin nx|dx=\frac{2(b-a)}{\pi}\quad (b>a)\,.$

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

0.49 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ と定める．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060803)

0.50 定数 a,b,c に対し，行列 B を　$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ a & 2 & -2 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$　と定める．B の階数を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060804)

0.51 (x,y) 平面の領域 $\{x>0,\ y>0\}$ で定義された関数　$f(x,y)=x^{\log y}$　について次の問いに答えよ．

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ．　(2) f は狭義の極値を持たないことを示せ．

(東京工業大 2007)　　(m20070801)

0.52 次の重積分の値を求めよ．ただし，$a>0,\ b>0$ とする．　$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}(ax^2+by^2)dxdy$

(東京工業大 2007)　　(m20070802)

0.53 次の行列の階数を求めよ．　$\begin{pmatrix} 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2007)　　(m20070803)

0.54 (1) 空間 $\boldsymbol{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\boldsymbol{R}^3\}$ 内の平面 $H=\{x+y+z=0\}$ の正規直交基底を一組求めよ．

(2) 写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を，ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，(1) の平面 H への $\boldsymbol{v}$ の正射影を対応させる線形写像とする．f を与える行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(東京工業大 2007)　　(m20070804)

0.55 関数 $\sqrt{1+x}\,\cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080801)

0.56 $u(x,y)=xy^2,\ v(x,y)=x+y$ とおく．次の積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\ ,\quad \left(K\ :\ \frac{x^2}{4}+y^2\leq a^2\right)$$

ただし，a は正の定数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080802)

0.57 $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&3&4\\2&4&3\end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値を求めよ．また，各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 次の条件をみたす実直交行列 T を用いて A を対角化せよ．T も具体的に求めよ．
条件： T の (i,j) 成分を t_{ij} とすると，$t_{12}=2t_{22}>0$ かつ $t_{11},\ t_{13}$ はともに正の数である．

(東京工業大 2008)　　(m20080803)

0.58 (1) a,b を実数とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+y-3z\\3x+ay+bz\end{pmatrix}$$

は線形写像であることを示せ．

(2) f の像が 2 次元となるとき，$a,\ b$ はどのような条件をみたすか答えよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080804)

0.59 実対称行列 A について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ．

(2) $A=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}$ に対し，適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090801)

0.60 $C:=\begin{pmatrix}3&2&1&-1\\-2&1&p&3\\1&-1&-1&-4\\-3&-2&1&-1\end{pmatrix}\ ,\ D:=\begin{pmatrix}3&4&q\\-1&1&-3\\-2&-5&1\\2&3&1\end{pmatrix}$ とおく．ただし，$p,\ q$ は定数である．

(1) C の行列式を求めよ．

(2) D および CD の階数を求めよ．必要に応じ $p,\ q$ の値で場合わけして答えよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090802)

0.61 $\beta,\gamma<0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする．

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)^{\beta}dxdy$　　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1}(x^2+y^2)^{\gamma}dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.62　実変数 t の関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}$$

を満たしている.

(1)　$t \to -\infty$ のとき，$x(t)$ は有限の値に収束することを示せ.

(2)　$t \to +\infty$ のとき，$x(t)$ が $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないならば，$x(t)$ は定数関数であることを示せ.

(東京工業大 2009)　　(m20090804)

0.63　n を整数として以下の設問に答えよ.

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, \cos nx \, dx$ を計算せよ.

(2)　$f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする. $f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(x) \cos nx \, dx = 0$$

が成り立つことを示せ.（ ここで a は任意の実定数とする.）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.64　次の二重積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2-y^2+2xy}}{1+(x+y)^2} \, dxdy$$

(東京工業大 2010)　　(m20100802)

0.65　a を定数とする.

連立一次方程式　$\left\{\begin{array}{l} x + \ y + \ z - \ w = \ 1 \\ -x - 2y - 2z + 2w = -2 \\ 2x - 2y - \ z + aw = -1 \\ 3x - 3y + az - \ w = -2 \end{array}\right.$

について，

(1)　この方程式の係数行列の行列式の値を求めよ.

(2)　この方程式を解け.（ a の値による場合分けになる.）

(東京工業大 2010)　　(m20100803)

0.66　$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1)　A の固有値と固有ベクトルを求め, A を対角化せよ.

(2)　A^n を求めよ.

(東京工業大 2010)　　(m20100804)

0.67　実数 a に対して，次の連立一次方程式が解を持つかどうか調べよ．また，解が一意でない場合には一般解を求めよ.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & ay & + & a^2z & + & a^3w & = & 1 \\ a^3x & + & y & + & az & + & a^2w & = & -1 \\ a^2x & + & a^3y & + & z & + & aw & = & 1 \\ ax & + & a^2y & + & a^3z & + & w & = & -1 \end{array}\right.$$

(東京工業大 2011)　　(m20110801)

0.68 実数 a,b,c,d に対し，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $\det B$ を $\det A$ で表せ.

(2) $\mathrm{rank}A=0$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}A=1$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ.

(4) $\mathrm{rank}A=2$ のとき $\mathrm{rank}B$ を求めよ.

(東京工業大 2011)　　(m20110802)

0.69 関数

$$f(x,y)=x^2+y^2-2xy+\log(x^2+y^2+2xy+1)$$

の極値を求めよ.

(東京工業大 2011)　　(m20110803)

0.70 球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ と円柱 $x^2+y^2\leq x$ との共通部分の体積 V を求めよ.

(東京工業大 2011)　　(m20110804)

0.71 関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x-y}$ の極値を求めよ.

(東京工業大 2012)　　(m20120801)

0.72 次の広義積分の値を求めよ.　$\displaystyle\iint_{x\geq 0,\ y\geq 0} e^{-x^2-xy-y^2}\,dxdy$

(東京工業大 2012)　　(m20120802)

0.73 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ.

(東京工業大 2012)　　(m20120803)

0.74 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく．A が逆行列を持つための条件を求め，更にその場合に逆行列を求めよ.

(東京工業大 2012)　　(m20120804)

0.75 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．ただし，a,b,c は複素数とする.

(東京工業大 2013)　　(m20130801)

0.76 複素数を成分とする 2 次の正方行列 A について，次の問に理由を付けて答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(A)>\mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(2) $\mathrm{rank}(A)<\mathrm{rank}(A^2)$ となることはあるか.

(3) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)\neq\mathrm{rank}(A^3)$ となることはあるか.

(東京工業大 2013)　　(m20130802)

0.77　関数 $x^2+2xy+y^2-2x^4-2y^4$ の極値を求めよ．

(東京工業大 2013)　　(m20130803)

0.78　楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，平面 $z=0$，曲面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ．ただし，a,b は正の実数とする．

(東京工業大 2013)　　(m20130804)

0.79　2 変数関数

$$f(x,y)=xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

の極値を全て求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140801)

0.80　2 つの円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$, $y^2+z^2\leqq a^2$ $(a>0)$ の共有部分の体積 V を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140802)

0.81　3 次の正方行列 M を次で定義する:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2+2a+3 & 2 & a^2-6a+7 \\ a^2-3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1)　$a=1$ のとき $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2)　$a=2$ のとき $Q^{-1}MQ$ が対角行列となるような正則行列 Q が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような Q が存在する場合は $Q^{-1}MQ$ を求めよ．

(3)　$a=3$ のとき $R^{-1}MR$ が対角行列となるような正則行列 R が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような R が存在する場合は $R^{-1}MR$ を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140803)

0.82　次の問に答えよ．

(1)　微分方程式 $y'+y=0$ の一般解を求めよ．

(2)　微分方程式 $y'+y=e^{-x}$ の一般解を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140804)

0.83　条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ のもとで，$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ の最大値，最小値を求めよ．

ただし，$a>b>c>0$ とする．

(東京工業大 2015)　　(m20150801)

0.84　(x,y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2=x,\quad y^2=3x,\quad xy=1,\quad xy=2$$

で囲まれた領域を D とする．

(1)　$u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=xy$ とするとき，D は (u,v) 平面内のどのような領域にうつるか．

(2) 積分

$$I = \iint_D e^{xy}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(東京工業大 2015)　　(m20150802)

0.85 実数 a, b に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(東京工業大 2015)　　(m20150803)

0.86 実変数 t の関数 $x(t)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

について，次の問に答えよ．ただし，c は実数とする.

(1) $x(0) = 0$ かつ $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $x(t) \geq 0$ となる恒等的に 0 でない $(*)$ の解 $x(t)$ が存在するための c に関する条件を求めよ.

(2) c が (1) の条件を満たし，かつ $(*)$ が条件

$$(**) \qquad x(0) = x(1) = 0,\ \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

を満たす解をもつとき，c の値を求めよ．更に $(*)$ と $(**)$ を同時に満たす解を求めよ.

(東京工業大 2015)　　(m20150804)

0.87 a を実数とするとき，連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ 2x + y + 2z + aw = 2 \\ 3x + y + 2z + aw = 2 \\ 2x + az + 2w = 1 \end{cases}$$

について次の問に答えよ.

(1) この方程式の係数行列の行列式の値を求めよ.

(2) この方程式を解け.

(東京工業大 2016)　　(m20160801)

0.88 2 変数関数 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^4 + 2}$ の極値を全て求めよ.

(東京工業大 2016)　　(m20160802)

0.89 全微分可能な関数 $f(x, y, z)$ に対し，$w = f(r - s,\ s - t,\ t - r)$ とするとき,

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

を求めよ.

(東京工業大 2016)　　(m20160803)

0.90 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{y^3}dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq\ x\leqq\ 1,\ \sqrt{x}\leqq\ y\leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xdxdy$,　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq\ x\right\}$

(東京工業大 2016)　　(m20160804)

0.91 p,q を実数とする．連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & qz & = & 1 \\ -2x & + & py & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

が解を持たないとき，点 (p,q) が pq 平面内で動き得る範囲を図示せよ．

(東京工業大 2017)　　(m20170801)

0.92

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2) 正の整数 n に対して A^n を求めよ．

(東京工業大 2017)　　(m20170802)

0.93 a を負でない実数とするとき，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4axy$ の極値を求めよ．また，極値をとる時の x, y の値を求めよ．

(東京工業大 2017)　　(m20170803)

0.94 c を正の実数とする．次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy \qquad D\ :\ x^2+y^2\leqq cx$$

(東京工業大 2017)　　(m20170804)

0.95 a を実数とする．x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} ax & +2y & +2z & = & a+3 \\ 2x & +\ y & +az & = & 4 \\ x & +\ y & -\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件を a で表せ．

(2) (1) で求めた条件を a がみたすとき，連立 1 次方程式の解を求めよ．

(東京工業大 2018)　　(m20180801)

0.96 次の条件 (i)，(ii) をみたす 3 次正方行列 A を求めよ．

(i) A の固有値はすべて正の実数である．

(ii) $A^2 = \begin{pmatrix} 27 & -26 & -10 \\ 13 & -12 & -5 \\ 10 & -10 & -1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2018)　　(m20180802)

0.97　条件 $x^2+y^2 \leqq 9$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(東京工業大 2018)　　(m20180803)

0.98　次の重積分を求めよ．ただし，a, b は正の実数とする．

$$\iint_D x^4 dxdy \qquad D : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

(東京工業大 2018)　　(m20180804)

0.99　x_1, x_2, x_3, x_4 に関する次の連立方程式が解をもつための条件を a, b, c, d を用いて表せ．また，その条件のもとで解をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & a \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = & b \\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & & = & c \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & = & d \end{cases}$$

(東京工業大 2019)　　(m20190801)

0.100　行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2019)　　(m20190802)

0.101　関数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-6x^2-6y^2+9x$ の極値を求めよ．

(東京工業大 2019)　　(m20190803)

0.102　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\right\}$ とするとき，次の重積分を求めよ．

$$\iint_D (2x^2+y^2)^2 y^2 dxdy$$

(東京工業大 2019)　　(m20190804)

0.103　a, b を実数とする．x, y, z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} x \ \ + y + az = b \\ x + ay \ \ + z = b \\ ax \ \ + y \ \ + z = b \end{cases}$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　この連立一次方程式が任意の実数 b に対して解をもつための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(2)　a が (1) の条件をみたすとき，解をすべて求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200801)

0.104 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 次正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めよ．

(2) 3 次正則行列 Q で，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものを求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200802)

0.105 $a > 0$ を定数とする．このとき 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ の $D = \left\{(x,y) \mid -a \leqq x \leqq a,\ \ -a \leqq y \leqq a\right\}$ における最大値を求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200803)

0.106 $D = \left\{(x,y) \mid |x| + |y| \leqq \pi\right\}$ とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{(x-y)^2+\pi^2}dxdy$$

(東京工業大 2020)　　(m20200804)

0.107 a, b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y + ay^2 - by$$

を考える．(x_0, y_0) が関数 $f(x,y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ を満たす任意の点 (x,y) について

$$f(x,y) \geqq f(x_0, y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b > 0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(2) $b = 0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(東京工業大 2022)　　(m20220801)

0.108 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z\cos z$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\ dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.109 n を自然数とする．次の n 次正方行列の行列式の値 D_n を求めよ．

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(東京工業大 2022)　　(m20220803)

0.110　n を自然数とし，実数を成分とする n 次正方行列 A が

$$A^2 = E, \qquad A \neq \pm E$$

を満たすとする．ただし，E は n 次の単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ で実数を成分とする n 次の縦ベクトル全体を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $V = \left\{(A+E)x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n\right\}$，$W = \left\{(A-E)x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n\right\}$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解されることを示せ．

(3) A は対角化可能であることを示せ．

(東京工業大 2022)　　(m20220804)