[選択項目]　年度：1991〜2023 年　大学：東京都立大

**0.1**　行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき．

(1)　行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2)　逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3)　平面 $-3x+2y+2z=1$ は，一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって，どのような図形に移るか．その方程式を示せ．

(首都大 2003)　　(m20035901)

**0.2**　次の行列式を因数分解せよ．

(1)　$\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$

(2)　$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

(首都大 2003)　　(m20035902)

**0.3**　行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき．

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(2)　行列 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような，行列 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(3)　$\boldsymbol{A}^k$ を求めよ．

(首都大 2003)　　(m20035903)

**0.4**　次式を示せ．ただし，$e^x$ のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty \qquad (\alpha : 定数)$$

(首都大 2003)　　(m20035904)

**0.5**　次の関数を積分せよ．

(1)　$x\bigl(x^2+1\bigr)^\alpha$

(2)　$\bigl(\cos x\bigr)^\alpha \sin x$

(首都大 2003)　　(m20035905)

**0.6**　次の微分方程式を解け（一般解を求めよ）．

(1) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=0$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+xy^2}{2y+x^2y}$

(首都大 2003)　　(m20035906)

**0.7** 次の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ，さらに，全ての固有値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ.

(首都大 2004)　　(m20045901)

**0.8** $m\times\ n$ 行列のランク（階数）はその行列の線形独立（一次独立）な列ベクトルの最大個数等しい.

このとき

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のランクを求めよ．解答には，その理由も述べよ.

(首都大 2004)　　(m20045902)

**0.9** $n\times\ n$ 正方行列 $A$ の特性多項式は

$$f_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

である.（ただし，係数 $a_{n-1},\cdots,a_0$ は定数であり，$I$ は単位行列である.）

ここでこの多項式の $\lambda$ に行列 $A$ を代入した行列多項式は

$$f_A(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

となる.（これをケイリーハミルトンの定理という）

<u>この定理を用いて</u>

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のときに, 次の行列をそれぞれ求めよ.

(1) $A^3$

(2) $A^{-1}$

<u>注意：この定理を用いたことがわかるように解答すること</u>

(首都大 2004)　　(m20045903)

**0.10** 関数 $f(x)=x^2\log_e\dfrac{1}{x^2}$ について以下の問に答えよ．ただし，$e$ は自然対数の底である.

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の最大値を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ

(首都大 2004)　　(m20045904)

**0.11** デカルト座標系 $(x,y)$ で，$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ.

(1) 極座標系 $(r,\theta)$ での関係式に変換せよ $(r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = y/x)$.

(2) グラフの概形を図示せよ.

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ.

(首都大 2004)　　(m20045905)

**0.12** (1) 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ を満たす行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ.
ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である.

(首都大 2005)　　(m20055901)

**0.13** $\boldsymbol{V}$ が 2 × 2 行列のベクトル空間であるとき, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{V}$ が線形従属であるか, または線形独立であるかを判定せよ（その理由も記述せよ）.

(首都大 2005)　　(m20055902)

**0.14** 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき，次の問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ.

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 二次形式 $\Phi=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の標準形が $\Phi = a{\xi_1}^2 + b{\xi_2}^2$ で与えられるとき，係数比 $\dfrac{b}{a}$ を求めよ.
ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)^T$ は直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする.

(首都大 2005)　　(m20055903)

**0.15** 次の微分方程式は完全形であることを示し, さらに一般解を求めよ，ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

$$(2x+y-4)y' = x-2y+3$$

(首都大 2005)　　(m20055904)

**0.16** 次の微分方程式について特性方程式を示し，さらに一般解を求めよ，ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

$$y''-y'-2y = 2x^2+2x$$

(首都大 2005)　　(m20055905)

**0.17** 次の関数の不定積分を求めよ.

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

(首都大 2005)　　(m20055906)

**0.18** 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

(首都大 2005)　　(m20055907)

**0.19** 直交座標系 $(x, y, z)$ における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -3, 0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(3) $(\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b})$ を方向ベクトルとし，点 $(3, 4, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた直線と平面 $2x + 3y - 2z - 6 = 0$ の交点を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075901)

**0.20** 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{C}^n$ を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075902)

**0.21** 関数 $\dfrac{1}{1 - x^2}$ を級数展開せよ．ただし，$-1 < x < 1$ とする．

(首都大 2007)　　(m20075903)

**0.22** 次の関数を積分せよ．

(1) $x \log x$　　(2) $\dfrac{x^2 - x + 1}{(x - 1)(x - 2)^2}$

(首都大 2007)　　(m20075904)

**0.23** 時刻 $t = 0$ で静止していた質量 $m$ の球体が自由落下するとき，落下速度 $v$ に比例した空気抵抗 $rv$ を受けるものとする．重力加速度を $g$ とすれば，この球体の運動方程式は

$$mg - rv = m\frac{dv}{dt}$$

と表される．この球体の任意の時刻 $t$ での落下速度 $v$ および落下距離 $z$ を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075905)

**0.24** (1) 連立方程式 $\begin{cases} (\lambda - 4)x + 2y - 15z = 0 \\ 2x + (\lambda - 1)y - 30z = 0 \\ 4x - 2y - 5(\lambda - 5)z = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつように，$\lambda$ の値を定めよ．

(2) 前問で定めた $\lambda$ の値の全てについて，それぞれに対応する自明でない解を求めよ．

(首都大 2008)　　(m20085901)

**0.25** ある直交座標系 $(x, y, z)$ における 3 次元の 2 つの実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ , $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を成分で表し，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が直交するための必要十分条件を示せ．

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ を成分で表せ．

(3) 外積 $\boldsymbol{a} \times \ \boldsymbol{b}$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ ともベクトル $\boldsymbol{b}$ とも直交することを証明せよ．

(首都大 2008)　　(m20085902)

**0.26** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の $x=0$ におけるテーラー展開を $x^4$ の項まで求めよ.

(首都大 2008) (m20085903)

**0.27** 次の微分方程式を解け. $\dfrac{dy}{dx} - y = \cos x - \sin x$ (首都大 2008) (m20085904)

**0.28** 次の不定積分を計算せよ. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}\,dx$ (首都大 2008) (m20085905)

**0.29** 次の二重積分を計算せよ. $\displaystyle\iint_{\substack{x+y \leqq 1 \\ x,y \geqq 0}} (x^2+y^2)\,dxdy$ (首都大 2008) (m20085906)

**0.30** 直交座標系 $(x,y,z)$ における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (-1,2,3)$ , $\boldsymbol{b} = (3,1,-2)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(首都大 2010) (m20105901)

**0.31** 次の連立一次方程式が解を持つための必要十分条件となる定数 $a,b,c$ の関係式を求めよ. またそのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x+2y+3z=a \\ 2x+3y+4z=2b \\ 3x+4y+5z=c \end{cases}$$

(首都大 2010) (m20105902)

**0.32** 行列 $A$ を $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^n$ を求めよ. 但し $n$ は正の整数とする.

(首都大 2010) (m20105903)

**0.33** 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ (2) $y = 2^{3x}$

(首都大 2010) (m20105904)

**0.34** 次の微分方程式を解け.

$$x\frac{dy}{dx} + (y+5) = 0$$

(首都大 2010) (m20105905)

**0.35** $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ.

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ.

(首都大 2010) (m20105906)

**0.36** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin 2x \, \sin 4x \, dx$ (2) $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\,dx$

(首都大 2010) (m20105907)

**0.37** 次の連立一次方程式がただ一組の解を持つように $a$ の値を定め，そのときの解を求めなさい.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + ay + z = 2 \\ 2x - 2y + (a+3)z = a - 5 \end{cases}$$

(首都大 2011)　　(m20115901)

**0.38** 次の問題に答えなさい.

(1) 二平面 $x + 2y - z - 4 = 0$ と $x - y + 2z - 4 = 0$ の交線の方程式を求めなさい.

(2) (1) の交線と点 (0, 1, 0) とを通る平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2011)　　(m20115902)

**0.39** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列 $P$ を求め，行列 $A$ を対角化しなさい.

(首都大 2011)　　(m20115903)

**0.40** 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = xe^{-x^2}$　　(2) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

(首都大 2011)　　(m20115904)

**0.41** 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

(首都大 2011)　　(m20115905)

**0.42** 関数 $f(x) = e^x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $x = 0$ におけるテイラー展開を $x^2$ の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $e^{0.03}$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2011)　　(m20115906)

**0.43** 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(首都大 2011)　　(m20115907)

**0.44** 行列 $A$ を $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A^2$ を求めなさい.

(2) 逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(3) 転置行列 ${}^tA$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125901)

**0.45** 直交座標系における 2 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ -2 \end{bmatrix}$　$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための $k$ を求めなさい.

(2) この $k$ を用いて $\boldsymbol{a}$ のノルム（大きさ）$||\boldsymbol{a}||$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125902)

**0.46** 行列 $A$ を $A=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値をすべて求めなさい.

(2) $A$ の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 $P$ と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125903)

**0.47** 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=(2x-x^2)^6$　　(2) $f(x)=\sin^{-1}x^2$

(首都大 2012)　　(m20125904)

**0.48** 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y}$$

(首都大 2012)　　(m20125905)

**0.49** 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を $x^3$ の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.02)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125906)

**0.50** 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\left(\log x\right)^2}{x}\,dx$

(首都大 2012)　　(m20125907)

**0.51** 行列 $A$ を $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，$x_1$ と $x_2$ を求めなさい.

(首都大 2013)　　(m20135901)

**0.52** 直交座標系 $(x,y,z)$ における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,1,2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい.

(3) $(0,0,0)$, $(2,-2,1)$, $(1,1,2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135902)

**0.53**　行列 $A=\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ と行列 $B=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $AB$ と $BA$ を求めなさい.

(2) $A$ の固有値と大きさ 1 の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(3) $A,\ B,\ AB$ を同一の正則行列を用いてそれぞれ対角化しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135903)

**0.54**　次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$　　(2) $f(x)=\sin^4 x\ \cos 3x$

(首都大 2013)　　(m20135904)

**0.55**　次の微分方程式を解きなさい.

$$\Big(x^2+2xy\Big)dx+\Big(x^2-y^2\Big)dy=0$$

(首都大 2013)　　(m20135905)

**0.56**　関数 $f(x)=e^x\sin x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を $x^3$ の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.03)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2013)　　(m20135906)

**0.57**　次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \sin^{-1}x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

(首都大 2013)　　(m20135907)

**0.58**　3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は内積，$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は外積である.

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が線形従属（1 次従属）となるとき，$k$ の値を求めなさい.

(3) 点 $(0,0,0)$ を通り，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ で張られる平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2014)　　(m20145901)

**0.59**　$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\ \ ,\ \ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 $Q$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{x}^T$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である.

(2) $A$ の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(3) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(首都大 2014)　　(m20145902)

**0.60**　$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値，および各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求めて，$A$ を対角化しなさい．

(3) $A^n$ の各成分を $n$ を用いた式で表しなさい．ただし，$n$ は自然数である．

(首都大 2014)　　(m20145903)

**0.61** 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = (2x-1)\,e^x$

(2) $f(x) = \log|\sin x| \qquad (x \neq n\pi,\ n$ は整数)

(3) $f(x) = x^x \qquad (x > 0)$

(首都大 2014)　　(m20145904)

**0.62** 次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい．

$$(x - y + 1)dx + (y - x + 1)dy = 0$$

(首都大 2014)　　(m20145905)

**0.63** 次の文章中の $\boxed{\ ①\ }$～$\boxed{\ ⑤\ }$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい．

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を $x^4$ の項まで求めると，$1 + \boxed{\ ①\ }x^2 + \boxed{\ ②\ }x^4$ が得られる．

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を $x^5$ の項まで求めると，$x + \boxed{\ ③\ }x^3 + \boxed{\ ④\ }x^5$ が得られる．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ の極限値は，$\boxed{\ ⑤\ }$ である．

(首都大 2014)　　(m20145906)

**0.64** 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int x\,(\log x)^2\,dx$

(首都大 2014)　　(m20145907)

**0.65** 行列 $A$ について以下の (1),(2) に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めなさい．

(首都大 2015)　　(m20155901)

**0.66** ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について以下の (1),(2) に答えよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6-k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6+k \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための $k$ の条件を求めなさい．

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立であるための $k$ の条件を求めなさい．

(首都大 2015)　　(m20155902)

**0.67** 行列 $A$ について以下の (1),(2) に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $A$ を対角化しなさい．

(首都大 2015) (m20155903)

**0.68** 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (2) $f(x) = \sin^2(x^2+1)$

(首都大 2015) (m20155904)

**0.69** 次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい．

$$(y - 3x^2 + 2)dx + (x - y^2 + 2y)dy = 0$$

(首都大 2015) (m20155905)

**0.70** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を $x^3$ の項まで求めなさい．

(首都大 2015) (m20155906)

**0.71** 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ を求めなさい．

(首都大 2015) (m20155907)

**0.72** 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int x \log x \, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

(首都大 2015) (m20155908)

**0.73** 下を満たす $x, y, z$ の値をそれぞれ求めなさい．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(首都大 2016) (m20165901)

**0.74** 行列 $A$ について下記の (1),(2),(3) に答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) すべての固有値とそれぞれの固有値の固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ と $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) $A^5$ を求めなさい．

(首都大 2016) (m20165902)

**0.75** ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める．下記の (1), (2), (3) に答えなさい．ただし，$u$ は正の実数である．

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための $u$ を求めなさい.

(首都大 2016)　(m20165903)

**0.76** 次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x)=\sqrt{3-2x^2}$　(2) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$　(3) $f(x)=\tan^{-1}(1-x)$

(首都大 2016)　(m20165904)

**0.77** 次の微分方程式が完全形であることを示し，一般解を求めなさい.

$$\left(x^3+\log y\right)dx+\frac{x}{y}dy=0$$

(首都大 2016)　(m20165905)

**0.78** 次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に入れるのに最も適当な数を答えなさい.

$-\log(1-3x)$ のマクローリン展開を $x^3$ の項まで求めると, $\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}x^2+\boxed{\text{ウ}}x^3$ が得られる.

(首都大 2016)　(m20165906)

**0.79** 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$ を求めなさい.

(首都大 2016)　(m20165907)

**0.80** 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int 8x\left(4x^2-1\right)^{10}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

(首都大 2016)　(m20165908)

**0.81** 次の 4 次正方行列 $A$ について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

(1) ${}^tA$ を $A$ の転置行列とするとき，積 ${}^tAA$ を計算せよ.

(2) (1) の結果を用いて，$A$ の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(首都大 2016)　(m20165909)

**0.82** (1) 次の 2 次正方行列 $A$ の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ．ただし，実数の範囲で扱うものとする.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 $P$ が直交行列であるとき，$a,b,c$ の値をすべて求めよ.

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016)　(m20165910)

**0.83** $t(0 < t < 2\pi)$ の関数 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$a$ は 0 でない定数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．　　(2) (1) の結果を用いて，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165911)

**0.84** 陰関数 $x^2 + xy + y^2 = 3$ で定まる $x$ の関数 $y$ の極値および極値を与える $x$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を $x$ と $y$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ を満たす点 $(x, y)$ をすべて求めよ．

(3) (2) において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の符号を調べることによって，$y$ の極値および極値を与える $x$ の値を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165912)

**0.85** ベクトル場 $\overrightarrow{a} = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$ と曲線 $C$： $\overrightarrow{r} = (\cos^2 t)\overrightarrow{i} + (\sin^2 t)\overrightarrow{j}$　$\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $d\overrightarrow{r}$ を計算せよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r}$ を計算せよ．

(3) (2) の結果を用いて，$C$ に沿う線積分 $I = \displaystyle\int_C \overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r}$ の値を求めよ．

(首都大 2016)　　(m20165913)

**0.86** 次の関数を微分しなさい．解答は答えのみでよい．

(1) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$　　(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$　　(3) $f(x) = \cos^{-1}(\log x)$

(首都大 2017)　　(m20175901)

**0.87** 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

(首都大 2017)　　(m20175902)

**0.88** 関数 $f(x) = e^x \cos x$ のマクローリン級数を $x^3$ の項まで求めなさい．

(首都大 2017)　　(m20175903)

**0.89** 無限積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{-1}{x(1+x^2)}dx$ を求めなさい．

(首都大 2017)　　(m20175904)

**0.90** 次の不定積分を求めなさい．　　$f(x) = \displaystyle\int \cos^2 x\ dx$

(首都大 2017)　　(m20175905)

**0.91** $xyz$ 座標系において，$A(-1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 0)$ の 3 点がある．以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 2 点 $A$, $B$ を通る直線の方程式を求めなさい．

(3) 3 点 $A$, $B$, $C$ を含む平面の方程式を求めなさい．

(首都大 2018)　　(m20185901)

**0.92** 実数 $x$, $y$, $z$ に関する連立 1 次方程式について，以下の問いに答えなさい.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \\ -x + ky + z = 0 \end{cases}$$

(1) 連立 1 次方程式が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつための定数 $k$ の値を求めなさい.

(2) $k$ が (1) の値を取るときの解を求めなさい．ただし，$z = t$（任意の実数）とおいてよい.

(首都大 2018)　　(m20185902)

**0.93** 平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を $f$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 $f$ の表現行列 $A$ を求めなさい.

(2) $x^2 - y^2 = 1$ を線形変換 $f$ により移した曲線の方程式を求めなさい.

(3) (2) で求めた曲線の概形を描きなさい.

(首都大 2018)　　(m20185903)

**0.94** 次の関数を微分しなさい．ただし，$a$ は正の実数とする.

(1) $x^x \quad (x > 0)$　　(2) $x\sqrt{x^2 + a} + a\log(\sqrt{x^2 + a} + x)$

(首都大 2018)　　(m20185904)

**0.95** 次の微分方程式が完全系であることを示し，一般解を求めなさい.

$$(2e^{2x}y - 4x)dx + e^{2x}dy = 0$$

(首都大 2018)　　(m20185905)

**0.96** 関数 $\sqrt{1 + x} + \log(1 + x)$ のマクローリン級数を $x^3$ の項まで求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185906)

**0.97** 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ を求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185907)

**0.98** 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^5 x \, dx$

(首都大 2018)　　(m20185908)

**0.99** 点 $A(5, 3, 1)$ と平面 $\alpha$ : $x + 2y + 2z = 4$ を考える.

(1) 点 $A$ から平面 $\alpha$ に下ろした垂線の足 $H$ の座標と垂線の長さを求めなさい.

(2) 平面 $\alpha$ 上に点 $(0, -1, 3)$ を中心とした半径 1 の円 $C$ を描く．点 $P$ は円 $C$ 上の点で，線分 $AP$ の長さが最大となるものとする．このとき点 $P$ の座標と，線分 $AP$ の長さを求めなさい;

(3) 3 点 $A$, $P$, $H$ を通る平面を求めなさい.

(首都大 2019)　　(m20195901)

**0.100** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ とその逆行列を求め，行列 $A$ を対角化しなさい．

(3) $A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は任意の自然数とする．

(首都大 2019)　　(m20195902)

**0.101** 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$　　(2) $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$　(ただし，$-2 < x < 2$)

(首都大 2019)　　(m20195903)

**0.102** 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

(首都大 2019)　　(m20195904)

**0.103** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開を求めなさい．ただし，$-1 < x < 1$ とする．

(首都大 2019)　　(m20195905)

**0.104** 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log(\sin x)$

(首都大 2019)　　(m20195906)

**0.105** 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \log x dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

(首都大 2019)　　(m20195907)

**0.106** 直交座標系 $(x, y, z)$ において，直線 $\ell : x - 1 = -y + 3 = -z - 5$ および点 $A(4, 5, 2)$ に対し，以下の問いに答えなさい．

(1) $\ell$ および $A$ を含む平面を $\alpha$ とする．$\alpha$ の方程式を求めなさい．

(2) $A$ から $\ell$ に垂線 $AH$ を引くとき，$H$ の座標を求めなさい．

(3) 原点 $O$ から $\alpha$ に垂線 $OH'$ を引くとき，$H'$ の座標を求めなさい．

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

**0.107** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ をひとつ示し，$A$ を対角化しなさい．

(3) $A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は任意の自然数とする．

(東京都立大 2020)　　(m20205902)

**0.108** 次の関数を微分しなさい．

(1) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{3}}}$　　(2) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

(東京都立大 2020)　　(m20205903)

**0.109** 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$$

(東京都立大 2020)　　(m20205904)

**0.110** 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン級数を $x^3$ の項まで求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205905)

**0.111** 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}$ を求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205906)

**0.112** 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx$

(東京都立大 2020)　　(m20205907)

**0.113** 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする.

このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $^T$ は, 行列の転置を表す.

(1) 行列 $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^TAP$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値を $\lambda_1$, $\lambda_2$ とするとき, 以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 $B$, $C$ を求め, 以下の条件を満足していることを示せ.

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T$, $C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times 2}$, なお, $\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ は, すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す.

(d) $B^2 = B$, $C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

**0.114** 座標空間内に原点 $O(0,0,0)$, および 4 点 $A(1,-1,0)$, $B(-1,3,2)$, $C(2,1,3)$, $D(-1,0,3)$ がある.
このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の 1 次結合として表せ.

(2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

(東京都立大 2020)　　(m20205909)

**0.115** (1) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$,　$y = b\tan\theta$ （ $a$, $b$ は定数, ただし, $a \neq 0$ ）

(2) 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.　$y = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x\right)$

(3) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

(東京都立大 2020)　　(m20205910)

**0.116** $-\infty < x < \infty$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $-\infty < x < \infty$ に対して，$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ を求めよ.

(2) $-\infty < x < \infty$ に対して，$g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)f(x-t)dt$ を求めよ.

(3) $-\infty < x < \infty$ に対して，(2) で求めた $g(x)$ を用いて $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ を求めよ.

(東京都立大 2020)　　(m20205911)

**0.117** 実数 $x \geq 0$ に対する実関数 $f_k(x)$ について，以下の微分方程式の初期値問題が与えられている.

$$\frac{df_k(x)}{dx} + 2f_k(x) = f_{k-1}(x), \quad f_k(0) = 1$$

ただし，$k$ は自然数である．また，すべての実数 $x \geq 0$ に対して $f_0(x) = 0$ とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $f_k(x)$ を $k$ を用いて表し，以下を求めよ.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

(東京都立大 2020)　　(m20205912)

**0.118** (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し，逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする.

$\overrightarrow{b} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} w_j \overrightarrow{a}_j$ と定めたとき，$w_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$ となるための必要十分条件を $x, y, z$ を用いて表せ.

(東京都立大 2021)　　(m20215901)

**0.119** 3 次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および

3 点 $A(0,\ 2+2\sqrt{3},\ 0)$, $B(2-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$, $C(2+2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ がある.

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ.

(2) 三角形 $ABC$ の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ において，三角形 $ABC$ を底面としたときの高さを求めよ.

(東京都立大 2021)　　(m20215902)

**0.120** (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について，偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 関数 $z = f(ax+by)$ について，$b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ.　　($a$, $b$ は定数)

(3) 関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ について,

$$(\triangle u =) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ．ここで，$\triangle$ はラプラシアンである．

(東京都立大 2021)　　(m20215903)

**0.121**　0 以上の整数 $n$ に対し，$C_n$，$S_n$ を

$$C_n = \int_0^\pi x^n \cos x dx$$

$$S_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) $C_0$，$S_0$ を求めよ．

(2) $C_n$ を $S_{n-1}$ を用いて表せ．

(3) $S_n$ を $C_{n-1}$ を用いて表せ．

(4) 前問 (1)〜(3) の答えを用いて $S_3$ を求めよ．

(東京都立大 2021)　　(m20215904)

**0.122**　実数 $y$ は，実数 $x$ の関数であり，その関係は式 (I) と (Ⅱ) で表される．以下の問いに答えよ．

$$y = xp - e^p \qquad \text{(I)}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \qquad \text{(Ⅱ)}$$

(1) 式 (I) を $x$ で微分して $p$, $p'$, $x$ の関係を求めよ．ただし，$p' = \dfrac{dp}{dx}$ である．

(2) 前問 (1) で得られた関係を $p$ と $p'$ について解け．解答は $x$ を含んでもよい．

(3) 前問 (2) で得られた関係を利用して $y$ を $x$ で表せ．

(東京都立大 2021)　　(m20215905)

**0.123**　(1) 以下の行列 $A$ に関して行列式 $\det A$ を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 前問 (1) の行列 $A$ に関して余因子行列 $\mathrm{adj}A$ および逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(3) 以下の行列 $B$ に関して 余因子行列 $\mathrm{adj}B$ の行列式 $\det(\mathrm{adj}B)$ を求めよ．

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & a & b \\ c & a & 0 & b & c \\ a & b & c & a & b \\ c & a & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2022)　　(m20225901)

**0.124** $10,000,000$ 人の集団があり，そのうち $100,000$ 人がウイルスに感染している．この集団に対して検査方法 $X$ を用いて，ウイルスに感染しているどうかを判定する．検査方法 $X$ では感度（感染者が正しく陽性と判定される率）が $\dfrac{7}{10}$ であり，偽陽性の確率（非感染者が間違って陽性と判定される率）が $p\ (0 < p < 1)$ である．この検査を受けて陽性と判定されたとき，その人が感染者である確率を $f(p)$ とする．

(1) 感染者であるかどうかを示す事象を $A = \{\text{infected, uninfected}\}$，検査の判定結果を示す事象を $B = \{\text{pos, neg}\}$ とするとき，以下の確率を求めよ．

1. $P(\text{infected})$
2. $P(\text{uninfected})$
3. $P(\text{pos} \mid \text{infected})$
4. $P(\text{pos} \mid \text{uninfected})$
5. $P(\text{pos})$
6. $P(\text{neg})$

(2) 前問 (1) で得られた確率とベイズの定理を用いて $f(p) = P(\text{infected} \mid \text{pos})$ を計算し，$f(p) \geq \dfrac{1}{2}$ となるような $p$ の範囲を求めよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225902)

**0.125** $f(x) = \log \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ を $x$ について微分せよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225903)

**0.126** (1) $(x,\ y)$ が $(0, 0)$ に近づくとき，$f(x,\ y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{xy}$ の極限を求めよ．

(2) $f(x,\ y) = xy^2 - x^2y - 2 = 0$ のとき，極値を求めよ．

(東京都立大 2022)　　(m20225904)

**0.127** 不定積分

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x} dx$$

について 以下の問いに答えよ．

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ として置換し，上記の不定積分を $I = \displaystyle\int g(t)dt$ の形で表せ．

(2) 前問 (1) で得られた式を用いて不定積分 $I$ を求めよ．なお，解は $\tan \dfrac{x}{2}$ を含む式でよい．

(東京都立大 2022)　　(m20225905)

**0.128** $x^2 + (y-2)^2 = k^2$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし $0 < k < 2$ とする．

(東京都立大 2022)　　(m20225906)

**0.129** (1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

(2) 前問 (1) で得られた解を用いて以下の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x$$

(東京都立大 2022)　　(m20225907)