[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：鳥取大

0.1 $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ の微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ が次式で与えられることを証明せよ．ただし，a は定数で $a > 0$ である．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(鳥取大 1997)　(m19973901)

0.2 $f(x) = ax^5 - x^4 + x^3 + b$ は $x = 1$ のとき極大値 2 をもつという．

(1) a, b の値を求めよ．

(2) $f(x)$ が，他に極大，極小を持っているならば，それを与える x の値と極値を求めよ．

(3) $f(x)$ のグラフの概形を書け．

(鳥取大 1997)　(m19973902)

0.3 $I = \displaystyle\int_0^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$ を求めよ．

(鳥取大 1997)　(m19973903)

0.4 関数 $z = \dfrac{u^2(x, y)}{v(x, y)}$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ．

(鳥取大 1997)　(m19973904)

0.5 マクローリンの定理により，関数 $f(x, y) = e^{ax-by}$ を 2 次の項まで展開せよ．ただし，a, b は定数である．

(鳥取大 1997)　(m19973905)

0.6 次の積分を計算せよ．ただし，a は定数で，$a > 0$ である．

$$\iint_D x^2 y \, dxdy \qquad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(鳥取大 1997)　(m19973906)

0.7 次の不定積分を計算せよ.（積分定数は省略してよい）

(1) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x(x^2 - 1)}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}dx$

なお，必要であれば，公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ を用いてもよい．

(鳥取大 2000)　(m20003901)

0.8 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(鳥取大 2000)　(m20003902)

0.9 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ がべき級数展開可能であるとき，$f(x)$ を点 a のまわりでテイラー級数に展開せよ．

(2) (1) で求めた結果を利用して，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるための必要条件と十分条件を示し，その理由を説明せよ．ただし，$f''(a) \neq 0$ とする．

(3) $f(x) = \sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー級数展開せよ．

(鳥取大 2000)　(m20003903)

0.10 $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, f は C^1 級なるとき，次式を証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000)　　(m20003904)

0.11 次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_K y\,dxdy\ ,\quad K : 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$$

(鳥取大 2000)　　(m20003905)

0.12 次の各積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(鳥取大 2001)　　(m20013901)

0.13 自然数 n に対し，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j = 0, 1, ..., n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n$ は x^2-1 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$
を用いてよい．

(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.14 (1) $x > 0$ において，不等式 $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ を証明せよ．

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け．

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ を求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013903)

0.15 $x^2 - xy + y^2 = 1$ のとき，関数 $z = x + y$ の最大値および最小値を求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013904)

0.16 次の積分を求めよ．ただし $a > 0$ とする．$\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqq 2ax}(x^2+y^2)^2\ dxdy$

(鳥取大 2001)　　(m20013905)

0.17 微分方程式　$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$　の解のうちで，多項式で表わされるものを求めよ．

(鳥取大 2001)　　(m20013906)

0.18 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次式で与えられる．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

このことを用いて, 次の問いに答えなさい．

(1) $y = \log_e x$ の導関数を求めなさい. ただし, $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とする.

(2) $y = x^n$ の導関数を求めなさい. ただし, n は正の整数とする.

（鳥取大 2004） (m20043901)

0.19 次の積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ ただし, L は正で, n, m は正の整数をとるものとする.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-ax+b}dx$ ただし, a は正とする.

（鳥取大 2004） (m20043902)

0.20 $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$ の 3 つの直線に囲まれた領域で次の積分を計算しなさい.

$$\iint \left(x^2 - xy\right) dxdy$$

(鳥取大 2004) (m20043903)

0.21 次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(鳥取大 2004) (m20043904)

0.22 飛行している物体の時刻 t での位置座標 (x, y, z) が次式で与えられる.

$x = a\sin t$

$y = a\cos t$

$z = bt$

ただし, a, b は定数である. 次の問いに答えなさい.

(1) この物体の速度の大きさを求めなさい.

(2) この物体が $1 \leq t \leq 3$ の間に飛行した軌跡の長さを求めなさい.

（鳥取大 2004） (m20043905)

0.23 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}(2x+3)^n$ (2) $\dfrac{d}{dx}\sin^2(x/3)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(鳥取大 2005) (m20053901)

0.24 次の計算をせよ.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

(鳥取大 2005) (m20053902)

0.25 次の計算をせよ.

$$\iint_D (1-x^2-y^2)dxdy \quad \left(\text{ただし } D = \{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}\right)$$

(鳥取大 2005) (m20053903)

0.26 $f(x)$ は x の 2 次以上の多項式である． $f(x)$ を $(x-2)^2$ で割った余りを $\alpha x+\beta$，商を $g(x)$ とする（ すなわち $f(x)=(x-2)^2g(x)+\alpha x+\beta$ ）． $f(2)=3$，$f'(2)=4$ の場合，α，β の値を求めよ．

(鳥取大 2005)　　(m20053904)

0.27 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる（ $f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの ） これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0,\cdots,a_5$ と $b_0,\cdots,b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$

$$\cos x \text{ の近似式} = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5$$

(鳥取大 2005)　　(m20053905)

0.28 負でない整数 n に対し， $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_0 および I_1 を求めよ.

(2) $n\geq 2$ に対し, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.

(3) I_n を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053906)

0.29 y は x の関数とする, 次の微分方程式を解け.

(1) $y'=xy$， $y(0)=2$．

(2) $y''-2y'+2y=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=0$．

(鳥取大 2005)　　(m20053907)

0.30 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$ のとき， $2(A+B)+X=A+3B$ となる行列 X を求めよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053908)

0.31 $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$ について， ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ.

(鳥取大 2005)　　(m20053909)

0.32 n 次の対称行列 A, B に対して, AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB=BA$ であることを示せ.

(鳥取大 2005)　　(m20053910)

0.33 次の連立一次方程式を消去法（掃き出し法）によって解け.

$$\begin{cases}x-y+2z=4\\x+y+z=1\\3x+y+4z=6\end{cases}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053911)

0.34 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2005)　　(m20053912)

0.35 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ.

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 ： $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 ： $y'(x) = \cos(x)$　ただし, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006)　　(m20063901)

0.36 (1) $Z = f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, $x = e^t$, $y = \log_e(t)$ のとき, dZ/dt を t の関数として求めよ.

(2) xy 平面上の点 (x, y) が　$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$　で表される曲線上を動くとき, 関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$　が極値をとる点 (x, y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）.

(鳥取大 2006)　　(m20063902)

0.37 次の積分を計算せよ.

(1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{a^2x^2 - b^2} dx$, $a > 0$, $b > 0$　　(2) $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$, $a > 0$

(鳥取大 2006)　　(m20063903)

0.38 $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ $(a > 0)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) I_1 を求めよ.

(2) $n \geq 2$ に対し,　$I_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2} \left\{ \dfrac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right\}$　が成り立つことを示せ.
（ヒント：I_{n-1} を部分積分すれば, I_n との関係が求まる.）

(3) 上の結果を用いて, I_3 を求めよ.

(鳥取大 2006)　　(m20063904)

0.39 質量 m の雨の粒子が落ちはじめてから t 秒後の速度を $v(t)$ とすると,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - cv(t) \quad (m, g, c \text{ は定数})$$

が成り立つ. この微分方程式を満たす $v(t)$ を変数分離法で求めよ. ただし, 初期条件は, $t = 0$ で $v = 0$ とする.

(鳥取大 2006)　　(m20063905)

0.40 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,　$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ のとき,　$X + Y = A$,　$X - Y = B$ となる行列 X, Y を求めよ.

(鳥取大 2006)　　(m20063906)

0.41 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について, ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算せよ．なお ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列を意味する．

(鳥取大 2006)　　(m20063907)

0.42 正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき A は交代行列であるという．A が対称行列であり交代行列でもあるとき, $A = O$（零行列）であることを示せ．

(鳥取大 2006)　　(m20063908)

0.43 次の連立一次方程式を消去法（掃き出し法）によって解け． $\begin{cases} 2x - y + z &= 2 \\ 4x - 2y + z &= 3 \\ -2x + y + 3z &= 1 \end{cases}$

(鳥取大 2006)　　(m20063909)

0.44 次の行列式を因数分解せよ． $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006)　　(m20063910)

0.45 次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2006)　　(m20063911)

0.46 次の行列 A に対して $A = X + Y$ となる対称行列 X と交代行列 Y を求めなさい．

（行列 M の転置行列を M' で表すとき, 対称行列とは $M = M'$ となる行列で, 交代行列は $-M = M'$ となる行列である．交代行列の対角成分は 0 である．交代行列は歪対称行列とも呼ばれる）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2006)　　(m20063912)

0.47 次の連立方程式を解きなさい． $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2006)　　(m20063913)

0.48 次の行列 A に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ． $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルは第一成分（x 成分）が 1 のものを求めよ．

(2) 行列 A を用いて, 2 変数関数 $f(x, y)$ を以下の式で定義する．

$$f(x, y) = (x \;\; y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して　$f(x, y) = a(x+y)^2 + b(x-y)^2$　となるように a, b を求めよ．

(鳥取大 2006)　　(m20063914)

0.49 次の関数の導関数を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $y=(2-x^2)^3$ (2) $y=\log\sin x$ (3) $y=x^x$

(鳥取大 2007) (m20073901)

0.50 次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax}\quad (a\neq 0,\ b\neq 0)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$

(鳥取大 2007) (m20073902)

0.51 半径 r の円形の紙から扇形を切り取って直円錐形の容器を作り，その容積を最大にしたい．切り取る扇形の中心角 θ はいくらにすればよいか求めよ．ただし，容器の接合部は無視する．

(鳥取大 2007) (m20073903)

0.52 次の定積分の値を求めよ．(注 ： 対数の底は e（自然対数）とする.)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

(鳥取大 2007) (m20073904)

0.53 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\quad (a,b>0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0,y_0,z_0), $(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ．

(鳥取大 2007) (m20073905)

0.54 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1\quad (a,b>0)\right\}$ のとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$ の値を求めよ．

(鳥取大 2007) (m20073906)

0.55 二つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}=(2,1,5)$ と $\boldsymbol{B}=(1,3,1)$ があるとき，以下の問いに答えよ. 但し，(a,b,c) の a,b,c はそれぞれ $x-$ 成分，$y-$ 成分，$z-$ 成分を表す．

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $J=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ を求めよ．

(2) xy 平面上にあり，$\boldsymbol{A}$ に垂直で長さが 1 で，x 成分が負のベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})/|\boldsymbol{A}|^2$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ の間の角度を計算せよ.

(鳥取大 2007) (m20073907)

0.56 以下の行列式 u,v をそれぞれ計算せよ．

(1) $u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (2) $v=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073908)

0.57 以下に示す行列 A の固有値 λ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．但し，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は A を掛けたときに定数 λ を比例係数として元の $\boldsymbol{x}$ に比例するような（すなわち，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となるような）A に固有のベクトルである．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073909)

0.58 次の行列式の値を求めよ． $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073910)

0.59 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ． $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073911)

0.60 以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $(3x + y + 3)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$ (2) $y'' - 4y' + 3y = 2x$

(鳥取大 2007) (m20073912)

0.61 位置ベクトル, $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお, $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ および $\vec{\boldsymbol{k}}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを, O は原点を表す.

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073913)

0.62 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta)$ (2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007) (m20073914)

0.63 3 行 4 列の行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073915)

0.64 2 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073916)

0.65 クラメルの公式を用いて次の連立方程式を解け. $\begin{cases} 3x + 6y \quad + z = 4 \\ 4x + 9y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

(鳥取大 2007) (m20073917)

0.66 次の行列式を計算せよ. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

(鳥取大 2007) (m20073918)

0.67 次の 3 つのベクトルが 1 次従属となるように m の値を求めよ. $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$

(鳥取大 2007) (m20073919)

0.68 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値およびその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073920)

0.69 7 人の大学新入生の身長を測り、次のデータが得られた.

$\{170,\ 176,\ 172,\ 168,\ 178,\ 173,\ 174\}$ （ 単位は cm ）

(1) 平均を求めなさい.　　(2) 分散を求めなさい.

(鳥取大 2007)　　(m20073921)

0.70 確率変数 N はポアソン分布　$P(N=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$

に従うとする. このとき, N の期待値を求めなさい（ 注意 ： $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ が成り立つ ）

(鳥取大 2007)　　(m20073922)

0.71 (1) $x = \tan y$ のとき, 逆関数 $y = \tan^{-1} x$ が定義できる. このとき, 逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $y = x^4 e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ. ただし, $x > 0$ とし, また log の底は e とする.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

(鳥取大 2008)　　(m20083901)

0.72 次のような関数が与えられている. ただし, $x > 0$ とする.　$y = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$

(1) 1 階および 2 階の導関数 y', y'' をそれぞれ求めよ.

(2) この関数の極値を求めるための関数値の変化表を作成し, その極値を求めよ.

(鳥取大 2008)　　(m20083902)

0.73 次の関数の与えられた領域における最大値と対応する座標を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 1} + \sin x$,　$0 \leq x \leq \pi$.

(2) $g(x, y) = -x^2 - x - y^2$,　$- \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$.

(鳥取大 2008)　　(m20083903)

0.74 次の平面領域 D における二重積分 $\displaystyle\int_D y^2 dxdy$ を計算せよ.

(1) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ \dfrac{1}{2}x + y < 1$.　　(2) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1$.

(鳥取大 2008)　　(m20083904)

0.75 (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(3) 次の連立一次方程式を解け.　$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 2 \end{array} \right.$

(鳥取大 2008)　　(m20083905)

0.76 行列 $\boldsymbol{B}$ について以下の問いに答えよ. $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 固有ベクトルを利用して行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化せよ.

(鳥取大 2008) (m20083906)

0.77 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = \sin 2x$

(鳥取大 2008) (m20083907)

0.78 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す.

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \ .$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) 1 次変換 f について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in \boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい.

(鳥取大 2008) (m20083908)

0.79 ある工業製品の故障の発生時間 X は，次式の確率密度関数をもつ指数分布に従っているという.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.0005e^{-0.0005x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

(1) 故障の発生時間 X（単位は時間 (hours)）の平均値を求めなさい.

(2) この製品が 2000 時間以内に故障が発生しない確率を求めなさい．ただし，$e \fallingdotseq 2.718$ とする.

(鳥取大 2008) (m20083909)

0.80 ある製品の切断寸法は，正規分布に従っているという．いま，9 個の切断寸法を測定して，次のデータを得た（単位は cm）.

$$\{4.8 \quad 5.3 \quad 4.7 \quad 5.5 \quad 5.6 \quad 4.9 \quad 5.8 \quad 5.1 \quad 4.5\}$$

(1) 平均値を計算しなさい. (2) 分散を計算しなさい.

(3) 切断寸法のねらい値は 5.0(cm) である．また，切断寸法の分散 σ^2 は従来から $\sigma^2 = 0.4^2$ であるという．切断寸法の平均値がねらい値どおりと言えるかどうか，危険率 5%で検定しなさい．ただし，危険率 5%のときの標準正規分布における検定の棄却域 z は，$|z| > 1.96$ である.

(鳥取大 2008) (m20083910)

0.81 方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解を求めよ.

(鳥取大 2009) (m20093901)

0.82 方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ の特殊解を定数変化法を用いて求めよ.

(鳥取大 2009) (m20093902)

0.83 方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x(1-x)$ を初期条件 $x(0) = x_0\ (>0)$ の下で解け．

(鳥取大 2009)　　(m20093903)

0.84 ５つ行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

(鳥取大 2009)　　(m20093904)

0.85 次を証明せよ．

(1) 対称行列 A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ．ただし，A が対称行列とは A が実正方行列であって $A^T = A$ が成立することをいう．

(2) 直交行列 A を係数行列としてもつ１次変換（直交変換）$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ はベクトルの内積を不変に保つことを証明せよ．ただし，A が直交行列とは A が実正方行列であって $A^T = A^{-1}$ が成立することをいう．

(鳥取大 2009)　　(m20093905)

0.86 次を求めよ．ただし，$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$ である．

(1) $\nabla(x^2 + y + z^3)$

(2) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)$　（ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

(3) $\nabla\times\ (x^2 i + xy^2 j)$

(鳥取大 2009)　　(m20093906)

0.87 直交座標系に関して，３つのベクトルを $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 2)$，$\overrightarrow{OB} = (k, 4, 1)$，$\overrightarrow{OC} = (2, 1, 3)$ とする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ の長さ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交するとき，k の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093907)

0.88 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093908)

0.89 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $2x^2y\dfrac{dy}{dx} + xy^2 + x = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x + 6e^{3x}$

(鳥取大 2009)　　(m20093909)

0.90 2 次式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ を考える．任意の a_2, a_1, a_0 に対し，以下の式が成立するように実数 α, β $(\alpha < \beta)$ の値を定めよ．

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(\alpha) + f(\beta)$$

(鳥取大 2009)　　(m20093910)

0.91 $f(x)$, $g(x)$ を x についての 2 回微分可能な 1 変数関数とするとき，時刻 t, 座標 x における 2 変数関数 $\phi(t, x)$ を $\phi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$ と定める．ただし，c は定数とする．このとき，関数 ϕ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

(鳥取大 2009)　　(m20093911)

0.92 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ を求めよ．

(2) 関数 $\dfrac{1}{1 - x^2}$ の n 階の導関数を求めよ．

(3) 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093912)

0.93 次の各積分を求めよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{|x| \leq y \leq 1} \sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy$

(鳥取大 2009)　　(m20093913)

0.94 以下の (1)(2)(3) の関数について, それぞれ x で微分せよ．ただし a, b は正の定数とする．

(1) $\sin(ax + b)$,　　(2) $\sin^{-1}(ax)$,　　(3) $x^x \quad (x > 0)$,

(鳥取大 2010)　　(m20103901)

0.95 2 次元において直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) には,

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\sin\theta$$

の関係式がある $(r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi)$; これについて, 以下の問に答えよ．

(1) r を x, y のみの関数として表せ. また, θ を x, y のみの関数として表せ.

(2) 以下の偏微分をそれぞれ計算せよ．

$(2a)$ $\dfrac{\partial x}{\partial r}$　　$(2b)$ $\dfrac{\partial r}{\partial x}$　　$(2c)$ $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

(鳥取大 2010)　　(m20103902)

0.96 $f(x) = \cos(x)$ は x が十分小さい範囲で,

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{1}$$

と 4 次式近似できる. ただし $f^{(n)}(x)$ は n 次導関数とする. これについて, 以下の問に答えよ

(1) $f(x),\ f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x),\ f^{(4)}(x)$ を計算し, 式 (1) 右辺の具体的関数形を書け.

(2) 関数 $g(x)$

$$g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \tag{2}$$

について, (1) で求めた $\cos(x)$ の近似式を用いることで, $g(x)$ の近似式を求めよ.

(3) (2) で得られた近似式より, $g(0.1)$ の近似値を計算せよ. 必要なら $1/24 \approx 0.042$ を用いて良い.

(鳥取大 2010)　　(m20103903)

0.97 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2-4x+7}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x}}$

(鳥取大 2010)　　(m20103904)

0.98 サイクロイド：$x = a(t-\sin t)\ ,\ \ y = a(1-\cos t)\quad (a>0\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$ の長さ L を求めよ.

(鳥取大 2010)　　(m20103905)

0.99 関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s>1$ に対して
$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 2010)　　(m20103906)

0.100 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の導関数を求めよ．ただし，a は定数である．　$\dfrac{1}{\tan(ax)}$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし，log は自然対数である．　$\log(1+x)$

(3) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$

(鳥取大 2011)　　(m20113901)

0.101 次の問に答えよ.

(1) 陰関数 $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 = 0$ において，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 次の関数の極値を求めよ．また，それは極大値か極小値か答えよ.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y + 9$$

(鳥取大 2011)　　(m20113902)

0.102 次の不定積分を求めよ．ただし，log は自然対数である.

(1) $\displaystyle\int x\,\log x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$

(鳥取大 2011)　　(m20113903)

0.103 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1-\cos\theta\quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y=2x^2$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113904)

0.104 関数 $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$ の極値を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113905)

0.105 不定積分 $\displaystyle\int e^x \sin x dx$ を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113906)

0.106 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式の値を求めよ.

(2) 逆行列を求めよ.

(3) 固有値を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113907)

0.107 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=1-y^2$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=\cos x$

(鳥取大 2011)　　(m20113908)

0.108 x の関数 y に関する，次の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $(x+3)y'+xy^2=0$

(2) $y''-6y'+8y=x^2+1$

(鳥取大 2012)　　(m20123901)

0.109 行列と行列式に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 次の行列式の値を計算せよ.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2012)　　(m20123902)

0.110 点 O を原点とする直交座標系 (x,y,z) において，位置ベクトル，$\overrightarrow{OA}=4\vec{i}+3\vec{k}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\overrightarrow{OC}=2\vec{j}+\vec{k}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{i}$，$\vec{j}$ および $\vec{k}$ はそれぞれ x，y および z 方向における単位ベクトルを表す.

(1) 外積 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ を計算せよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大 2012)　　(m20123903)

0.111 偏導関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ の偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 df を求めよ.

(2) 関数 $z = f(v)$ および $v = g(x, y)$ は, 連続かつそれぞれの変数に関して 2 階微分可能であるとする. このとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を表す式を書きなさい.

(鳥取大 2012)　　(m20123904)

0.112 曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ および直線 ℓ : $x = \dfrac{a}{2}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において, 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において, 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2013)　　(m20133901)

0.113 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有ベクトルを用いて, 行列 A を対角化せよ.

(3) A のべき乗 A^n (n は正の整数) を求めよ.

(鳥取大 2013)　　(m20133902)

0.114 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x^2 + 2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 4e^{-x}$

(鳥取大 2013)　　(m20133903)