[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：豊橋技科大

0.1 連立方程式 $\begin{cases} 2x+y=kx \\ 2x+3y=ky \end{cases}$ が $x=y=0$ 以外の解をもつような定数 k の値を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　(m19962701)

0.2 $x+y=2$ のとき，$\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　(m19962702)

0.3 $x+2y \leqq 4$，$2x+y \leqq 4$，$x+y \geqq 1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす，
すべての x，y に対して，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．　(豊橋技科大 1996)
(m19962703)

0.4 集合 $\{a,b,c\}$ から集合 $\{p,q,r,s\}$ への写像は全部で何個あるか．

(豊橋技科大 1996)　(m19962704)

0.5 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \int_x^{\sqrt{3}x} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ．

(2) $F(x)$ の最大値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　(m19962705)

0.6 ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角 θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ を満たすとき，点 (x,y) の存在する領域を x，y に関する不等式で表せ．

(豊橋技科大 1996)　(m19962706)

0.7 x，y，z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の重心を G，$\overrightarrow{OG}=\boldsymbol{g}$ としたとき，$\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表せ．

(2) $\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ．

(3) 四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　(m19962707)

0.8 $\sin 2\alpha$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ．

(豊橋技科大 1997)　(m19972701)

0.9 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　(m19972702)

0.10 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{\ 1\ } - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{\ 2\ }}{h}$$

ここで， $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 3\ }}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{\ 4\ }}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{\ 5\ }$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし， $x > 0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{\ 6\ }$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{\ 7\ } = \boxed{\ 8\ } + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\ 9\ } + 1$$

この式から， y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{\ 10\ }$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.11 関数 $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 40$ の $0 \leqq x \leqq 5$ における最大値と最小値を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972704)

0.12 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I = \int_0^\pi \bigl(f(x) - g(x)\bigr)^2\,dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2\,dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて， $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4)　$g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．

公式 $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.13　関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される．

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \cdots$$

ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n = 2$ まで表せ．

(1)　$f(x) = \sin x$

(2)　$f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997)　　(m19972706)

0.14　行列 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の (1) P^2 (2) P^{-1} を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972707)

0.15　箱の中に 7 個の白球と 7 個の黒球が入っている．

(1)　この箱から無作為に 4 個の球を取り出す．ただし，一度取り出した球は戻さない．

(a)　4 個の球が全て黒球である確率を求めよ．

(b)　4 個の球の色が全て同じである確率を求めよ．

(2)　1 個の球を取り出して，色を調べた後，元の箱に戻す操作を 4 回繰り返すとする．4 回の試行により取り出された球が全て黒球である確率を求めよ．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972708)

0.16　次の連立方程式を解け．$\begin{cases} 2^{y-x+1} = 8 \\ 4^x + 60 = 4^y \end{cases}$　(豊橋技科大 1998)　　(m19982701)

0.17　$\sin A + \cos A = \sqrt{2}$ のとき，$\sin A \cos A$ および $\sin^4 A + \cos^4 A$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982702)

0.18　以下の二つの問に答えよ．

(1)　次の 3 点が一直線上にあるように定数 a の値を定めよ．

$(3-2a,\ 4)$，$(3,\ a)$，$(1,\ 3)$

(2)　原点を通り，上の直線に直交する直線の方程式を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982703)

0.19　直線上を運動する点 P の出発してから t 秒後の位置が，$x = e^{-\pi t}\cos \pi t$ で表されるとき，出発してから 3 秒後の速度を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982704)

0.20　$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982705)

0.21　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(豊橋技科大 1998)　　(m19982706)

0.22 以下の問いに答えよ.

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより，n が 2 以上の整数ならば $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ.

(2) 解答用紙中に記したア〜エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線
$x=a\cos^3\theta$ ，$y=a\sin^3\theta$ （ただし，$a>0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略)

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982707)

0.23 $x>0$ であるとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) $\log(x+1)<x$

(2) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-1<\displaystyle\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

(豊橋技科大 1998)　　(m19982708)

0.24 半径 a の球に内接し，体積が最大になる直円柱の高さ，および直径を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982709)

0.25 以下の問に答えよ.

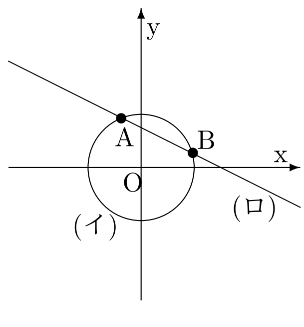
(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，円と直線の交点をそれぞれ A，B とする.

$x^2+y^2=5$ $\cdots$ （イ）

$x+2y=3$ $\cdots$ （ロ）

(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ.

(b) 線分 AB の長さを求めよ.



(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている.

$x^2+y^2+z^2=4$ $\cdots$ （ハ）

$x+2y+3z=7$ $\cdots$ （ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ.

(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982710)

0.26 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ とするとき，

A の転置行列 ${}^tA$ と A^2 および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982711)

0.27 平面上で直線 $y=3x+2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ.

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

0.28 (1) 親と子が各々一つずつサイコロを振り，親の出した目と同じ目を子が出せば子が勝ち，親の出した目と子の出した目が異なると親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数 (目) が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 3 回勝負し，子が勝ち越す確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 1 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(2) 親は二つのサイコロを振り，子は一つのサイコロを振るものとする．親の出した目の少なくともどちらか一つと同じ目を子が出したときに子の勝ち，それ以外のときに親の勝ちとする．ただし，サイコロは 1 から 6 までの整数（目）が各々 $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする．

(a) 子が勝つ確率を求めよ．

(b) 子が勝てば子に 2 点与えられ，親が勝てば子の点が 1 点減ぜられる．このとき，子の得る点の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 1998） (m19982713)

0.29 $a \neq 0$ のとき，以下の不等式の解を求めよ．

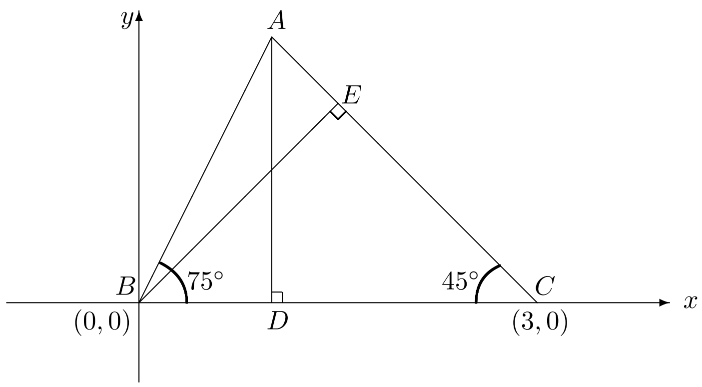
$$a - \frac{2}{a} < 1$$

(豊橋技科大 1999） (m19992701)

0.30 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ．

(1) $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ を加法定理を用いて求めよ．

(2) 点 C の座標を $(3, 0)$, 点 A , B より辺 BC , AC に下ろした垂線を AD , BE とする．このとき，辺 AE , EC の長さを求めよ．



(3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999） (m19992702)

0.31 以下の連立不等式が表す領域の面積 S を求めよ．

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ xy \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 1999） (m19992703)

0.32 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

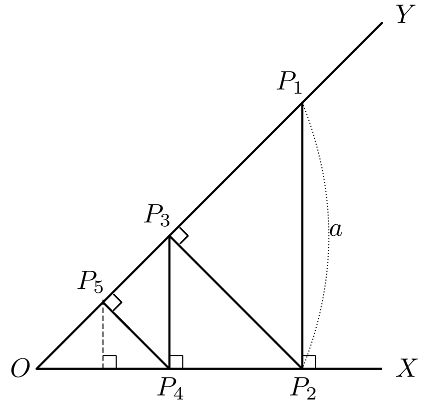
(a) $\dfrac{3}{1}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{9}{10}, \dfrac{11}{13}, \cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2} - \sqrt{1}, \sqrt{4} - \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{3}, \cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY = \pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.33 以下は微分方程式の解き方のあらすじである．それについて以下の (1)〜(3) の各問に答えよ．

次の方程式を満たす y を求める．

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad （イ）$$

$P(x)$, $Q(x)$ は， x のみの関数である．まず u , v を x の関数として，

$$y=uv \qquad （ロ）$$

とおく．ここで

$$v=e^{-\int P(x)dx} \qquad （ハ）$$

とすると

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0 \qquad （ニ）$$

となる．次に du/dx を求め，これを $F(x)$ とすると

$$\frac{du}{dx}=F(x) \qquad （ホ）$$

これから

$$u=\int F(x)dx+C \quad (C \text{ は任意定数}) \qquad （ヘ）$$

と書けるので， y が求まる．

(1) （イ）（ロ）（ハ）を用いて

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0$$

であることを示せ．

(2) （イ）（ロ）（ハ）を用いて du/dx を求めることにより， $F(x)$ を $P(x)$, $Q(x)$ で表せ．

(3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\log x$ を満たす y を求めよ．ただし，$\log$ は自然対数を表す．

(豊橋技科大 1999)　(m19992705)

0.34 平面上の点 $A(1,2)$ を，点 $B(3,4)$ を中心として時計回りに 90 度回転させた．回転後の点 A の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　(m19992706)

0.35 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の関係を満たす行列 X, Y をそれぞれ求めよ．

$$AX = YA = B$$

(豊橋技科大 1999)　(m19992707)

0.36 式（イ）,（ロ）,（ハ）に関して各問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の A の行列式を求めよ．

(2) 式（ロ）の固有値 λ を求めよ．

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) x, y, z で表される 2 次曲面（ハ）を x, y, z に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す．

(豊橋技科大 1999)　(m19992708)

0.37 硬貨を投げると表または裏がそれぞれ $1/2$ の確率で出るとする．あなたが硬貨を投げ，表が出続ける限り投げ続けることができ，裏が 1 度でも出たらそこで終了するものとする．表が出た回数を k とする．例えば，表表裏と出れば $k=2$ であり，いきなり裏が出れば $k=0$ である．(ただし，$2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1.048576 \times 10^6$, $2^{30} = 1.073741824 \times 10^9$, $2^{40} \fallingdotseq 1.0995 \times 10^{12}$ である．)

(1) $k \geq 3$ となる確率を求めよ．

(2) $k \geq n$ となる確率を n を使った式で表せ．

(3) $k = n$ となる確率を n を使った式で表せ．

表が出た回数 k に応じてあなたは賞金 2^k 円が貰えるとする．

(1) 1000 円以上貰える確率を求めよ．

(2) あなたが貰える金額の期待値は何円か．

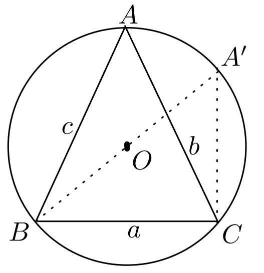
(3) 賞金は 2^{40} 円しか用意していないため，賞金が 2^{40} 円を超えた場合は貰える金額は 2^{40} 円になるものとする．賞金が 2^{40} 円を超えない場合は賞金の金額がそのまま貰える．あなたが貰える金額の期待値は何円か．

(豊橋技科大 1999)　(m19992709)

0.38 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a, b, c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A, B, C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき，$\angle BA'C = \angle BAC$, $2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ.

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S = \dfrac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ.



(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.39 はじめ，容器には 10 %の食塩水が 500 g 入れてある．以下の問いに答えよ.

(1) 容器から食塩水を 100 g 取り出して捨て，次に容器に 5 %の食塩水を 100 g 入れて，よく攪拌（かくはん）するという操作を考える．この操作を n 回行ったときの容器中の食塩水の濃度を a_n %とする．a_1 を求めよ．また，a_n と a_{n+1} との間の関係式を求めよ.

(2) a_n を n を用いて表せ．また，(1) で示した操作を無限回行った極限では，容器中の食塩水の濃度はどのようになるか答えよ.

(豊橋技科大 2000)　　(m20002702)

0.40 関数 $y = -\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) この関数のグラフの概形を書け.

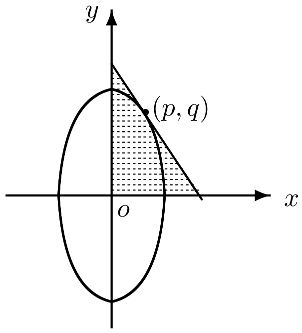
(2) この関数が描く曲線と直線 $y = mx$ とが交わるような m の範囲を求めよ.

(豊橋技科大 2000)　　(m20002703)

0.41 以下の各問いに答えよ.

(1) $4x^2 + y^2 = 4$ で表される楕円上の点 (p, q) における接線の方程式は，$4px + qy = 4$ となることを示せ.

(2) $p > 0, q > 0$ のとき，問 (1) の接線と x 軸および y 軸で囲まれる面積（下図の斜線部）を最小にしたい．この面積が最小になる楕円上の点 (p_0, q_0) を求める場合の計算方法を示し，その点 (p_0, q_0) の値を示せ.



(豊橋技科大 2000)　　(m20002704)

0.42 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を示せ．ただし，任意定数として新たな記号を用いた場合には，その記号が任意定数であることを明記せよ．また，$i=\sqrt{-1}$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002705)

0.43 次の連立一次方程式に対して，解が存在するための定数 b の条件を求めよ．また，その条件のもとで，この連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x+2y+3z &= b \\ 2x+3y-2z &= 2 \\ -x-y+5z &= 1 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002706)

0.44 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とするとき，以下の二つの問いに答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{d}$ をベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 一次変換 f に対して，

$$f(\mathbf{a})=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},\qquad f(\mathbf{b})=\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix},\qquad f(\mathbf{c})=\begin{pmatrix}-1\\-6\\-5\end{pmatrix}$$

であるとき，$f(\mathbf{d})$ を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002707)

0.45 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002708)

0.46 白球が 5 個，黒球が 3 個，赤球が 2 個入った袋がある．以下の問いに答えよ．

(1) 同時に 3 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(a) 全ての球が同じ色である確率．

(b) 全ての球が異なる色である確率．

(2) 順番に一つずつ球を取り出すとき，次の確率を求めよ．ただし，取り出した球は袋に戻さないものとする．

(a) 1 個目に赤球，2 個目に白球が出る確率．

(b) 2 個目に黒球が出る確率．

(3) 同時に 2 個取り出すとき，赤球と白球が一つずつであれば 250 円，赤球と黒球であれば 300 円，赤球二つであれば 1100 円の賞金がもらえるとする．ただし，これ以外の組み合わせでは賞金はもらえない．このときの賞金の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002709)

0.47 $\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ を部分分数に分解せよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012701)

0.48 2 次方程式 $x^2 - ax + 9 = 0$ が，以下のような二つの異なる実数解を持つように a の値の範囲を求めよ．

(1) 共に 1 より大きい実数解となる．

(2) 共に 1 より小さい実数解となる．

(3) 1 より大きい実数解と小さい実数解を一つずつ持つ．

(豊橋技科大 2001) (m20012702)

0.49 放物線 $y = x^2 + x + 2$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動したところ，$y = x^2 - 3x + 5$ になった．a, b の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012703)

0.50 (1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$ のとき，$x + x^{-1}$ の値を求めよ．

(2) $(321)^a = 1000, \quad (3210)^b = 1000$ のとき，$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$ の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012704)

0.51 $\alpha,\ \beta$ が共に鋭角であり，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3},\ \sin\beta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan(\alpha + \beta)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012705)

0.52 以下に示す関数について次の各問に答えよ．

$$f(x) = \cos x + x \sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) $[-2\pi,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け．

(3) $[-2\pi,\ 0]$ および $[0,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012706)

0.53 次の極限値を求めよ． $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}\right)$$

(豊橋技科大 2001) (m20012707)

0.54 2 直線 $A : y = mx,\ B : y = -mx\ (m > 0)$ と，y 軸上 $(y > 0)$ に中心をもつ円を考える．

(1) 半径 r_0 の円を 2 直線に接するように描くとき，その中心の座標 $(0, y_0)$ を求めよ．

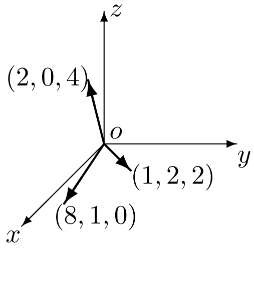
(2) 上の円の下に，この円と 2 直線に接するように半径 r_1 の円を描くことができる．この円の半径 r_1 を求めよ．

(3) 上の操作を順次行えば，無限個の円を描くことができる．$r_0 = 1$ から始めたとき，すべての円の面積の総和を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012708)

0.55 3 本のベクトル：

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

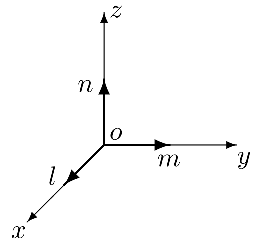


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A=(a,b,c)=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l,m,n) を用いて，上と同様に行列 $B=(l,m,n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA=B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012709)

0.56 トランプの中からスペードの 1 から n までとハートの 1 から n までの合計 $2n$ 枚取り出して以下の遊びをする（ n は 13 以下の自然数）． $2n$ 枚の中から無作為に 2 枚取り出して，その 2 枚が同じ数字である場合には「ペア」と呼び，2 枚が同じマーク（すなわち 2 枚ともスペードであるか，2 枚ともハートであるかのどちらか）である場合には「フラッシュ」と呼び，2 枚が「1 と 2」，「2 と 3」，$\cdots$，「$n-1$ と n」のように続きの数字である場合には「ストレート」と呼ぶことにする．ただし，$n\neq 2$ の場合は，「n と 1」はストレートとは考えない．なお取り出した順番は関係ない．ストレートとフラッシュが同時に起こることもある．以下の問に答えよ．

(1) ペアになる確率を n を用いて表せ．

(2) ストレートになる確率を n を用いて表せ．

(3) フラッシュになる確率を n を用いて表せ．

(4) ペアになる確率とストレートになる確率とが等しくなるような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ．

(5) ペアになる確率よりストレートになる確率が高く，かつ，ストレートになる確率よりフラッシュになる確率が高いような n が存在するか否かを調べ，存在する場合はその n の値を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012710)

0.57 次の等式を (1),(2) に従って証明せよ．ただし，$a>0\ (a\neq 1)$，$b>0\ (b\neq 1)$，$Q>0$ とせよ．

$$\log_a Q=\frac{\log_b Q}{\log_b a}$$

(1) $x=\log_a Q$ のとき，Q を指数関数で表現せよ．

(2) 上で求めた式の両辺に対して，底を b とする対数をとることで，$\log_a Q=(\log_b Q)/(\log_b a)$ になることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032701)

0.58 次の不等式を満たす x の最大の整数を (1)，(2) に従って求めよ．

$$(x^2-3x-6)^2-6(x^2-3x-6)+8\leq 0$$

(1) $t=x^2-3x-6$ として，$t^2-6t+8\leq 0$ を満たす t の範囲を求めよ．

(2) t の範囲を満たす x の最大の整数を求めよ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032702)

0.59 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ について答えよ．

(1) $x = 0$ で極大となり，点 $(1, 3)$ に変曲点を持つ．このとき a, b, c の値を求めよ．

(2) 極小点の座標を求めよ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032703)

0.60 曲線 $y = x^3 - 2x^2 + 3$ について答えよ．

(1) $y = x + 1$ の条件の下で，この曲線の y 座標が最大となる点の座標を求めよ．

(2) x の閉区間 $[-1, 2]$ に対して，平均値の定理が成立する点の x 座標をすべて求めよ．

[平均値の定理] $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

であるような c が (a, b) の中に少なくとも一つ存在する．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032704)

0.61 関数 $f(t) = ae^{-bt}\sin(\omega t + c)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a, b, c, ω は正の定数とする．

(1) $t \geq 0$ での関数 $f(t)$ の概略図を描け．

(2) 関数 $f(t)$ の極大，極小が $\tan(\omega t + c) = \dfrac{\omega}{b}$ を満たす t のときに生ずることを示せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032705)

0.62 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて，列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ を表せ．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032706)

0.63 次の連立 1 次方程式が非自明解 ($x = y = 0$ 以外の解) をもつように k の値を定め，その一般解を求めよ．

$$\begin{cases} 3x + (2 - k)y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2003)　　(m20032707)

0.64 列ベクトル $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x, y) に対応するとき，次の行列 A を用いて $A\mathcal{X}$ で表される 1 次変換について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 平面上の点 $(1, 2)$ はどんな点に移るか．

(2) 平面上の直線 $x + 4y - 1 = 0$ はどのような直線に移るか．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032708)

0.65 サイコロを 3 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出た目の最大値が 3 以下となる確率．

(2) 出た目の最大値が 3 になる確率．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032709)

0.66 あるサッカー選手のシュートの成功する確率が $1/3$ のとき，この選手が 4 回シュートをしたとき次の確率を求めよ．

(1) シュートが3回成功する確率.

(2) シュートが少なくとも1回成功する確率.

(豊橋技科大 2003)　　(m20032710)

0.67 次の連立不等式の解を求めよ. また, 連立不等式を満たす最大の整数を求めよ.

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ x^2 - 10x + 21 < 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004)　　(m20042701)

0.68 次の有理式を整式と, 分子の次数が分母の次数より小さい分数式との和で表せ.

$$\frac{4x^2 - 13x + 9}{2x - 3}$$

(豊橋技科大 2004)　　(m20042702)

0.69 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2004)　　(m20042703)

0.70 方程式 $\cos^2 x + \sin x + a = 0$ について x の範囲を $0 \leq x < 2\pi$ とする.

(1) この方程式を満たす実数 a の範囲を求めよ.

(2) 実数 a の値に対する方程式の解の個数を調べよ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042704)

0.71 2次曲線 $y = x^2 + (m+2)x + (m^2+4)$ の接線のうち, 原点を通る傾き k_1, k_2 の2本の直線のなす角を θ とする. θ が最大となるときの m の値を求めたい. ただし, m は実数, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan(\alpha - \beta)$ を $\tan\alpha,\ \tan\beta$ を用いて表せ.

(2) k_1 , k_2 を m を用いて表せ.

(3) $\tan\theta$ を m を用いて表せ.

(4) θ が最大となるときの m の値と $\tan\theta$ の値を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042705)

0.72 空間の直交座標軸上に3点 $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ がある. 以下の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ を成分で表し, それぞれの大きさを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 3点を通る平面を α とするとき, 原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042706)

0.73 行列 F によって点 (x, y) を点 (x', y') に移す次の1次変換

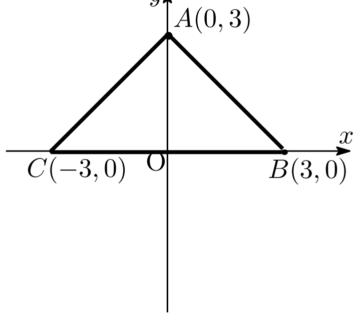
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この1次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 F を求めよ.

(2) 行列 F の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) 下図の点 A, B, C に対して, 行列 F による 1 次変換を n 回行って移る点をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする. $n=1$ および $n=2$ のとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.



(4) 三角形 $A_nB_nC_n$ の面積を S_n とするとき, S_n を n を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042707)

0.74　複素数 $-2+2\sqrt{3}i$ について,

(1) 絶対値を求めよ.

(2) 偏角を求めよ.

(3) 2 乗根を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042708)

0.75　$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^8$ を計算すると, $A+Bi$ となる. A および B を求めよ. ただし, A と B は実数とする.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042709)

0.76　以下の問いに答えよ.

(1) 1 つのサイコロを 4 回振るとき, 次の確率を求めよ.

(a) 1 の目が 2 回出る確率.

(b) 1 の目が少なくとも 2 回出る確率.

(c) 1 の目が出る回数と 6 の目が出る回数の合計が 2 回となる確率.

(2) A 君と B 君がサイコロを交互に振るゲームをする. いま,A 君から振り始めるとし, 最初に 1 または 6 の目が出た方を勝ちとする. A 君の勝つ確率を求めよ.

(3) 1 つのサイコロを 2 回振るゲームをする. 以下の 2 つの場合のどちらかが起こるときを成功とする.

- 1 回目に 1 または 6 の目が出て, 2 回目も 1 または 6 の目が出た場合.
- 1 回目に 1 と 6 以外の目が出て, 2 回目に 1 が出た場合.

このゲームに成功したとき, 1 回目に出た目が 1 または 6 であった確率を求めよ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042710)

0.77　$\left(\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}\right)^2$ を計算すると, $A+Bi$ となる. A および B を求めよ. ただし, i は虚数単位, A と B は実数とする.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052701)

0.78　$\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$ を計算せよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052702)

0.79　次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x^2+2xy-15y^2=0 \\ 2x+xy-15y-30=0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2005)　　(m20052703)

0.80 3 次元直交座標系における点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = (1,4,3)\,,\ \boldsymbol{b} = (2,3,1)\,,\ \boldsymbol{c} = (3,p,q)$$

とする. $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p, q の関係式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから, もう一つの p, q の関係式を求めよ.

(3) 以上の関係式から p, q の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ.

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ.

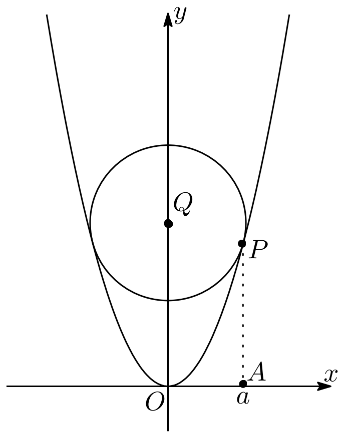
(8) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052704)

0.81 次式で表される放物線がある.

$$y = x^2$$

図に示すように, y 軸上にある点 Q を中心とする円がこの放物線に接している. $x > 0$ の領域における接点を P とし, 点 P から x 軸に下ろした垂線の x 軸との交点を A とし, その x 座標を a とする. 以下の問いに答えよ.



(1) 点 P を通り, 放物線に接する直線の方程式を a を用いて表せ.

(2) 点 P を通り放物線の法線となる直線の方程式を a を用いて表せ.

(3) 点 Q の y 座標を a を用いて表せ.

(4) 原点 O から点 Q までの距離 $\overline{OQ}$ と点 A までの距離 $\overline{OA}$ の比 $r = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$ が最小となる a の値を求めよ.
また, そのときの r の値を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052705)

0.82 (1) 2 組の事象群 $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ がある. それぞれの事象群の要素は互いに排他的である. また, x_i が起こる確率を $P(x_i)$, y_j が起こる確率を $P(y_j)$ としたとき, $P(x_1)+P(x_2) = 1$ および $P(y_1)+P(y_2)+P(y_3) = 1$ が成立する. x_i と y_j が同時に起こる確率（同時確率）を $P(x_i, y_j)$ で表す. さらに, x_i を条件としたとき y_j が起こる確率（条件付き確率）を $P(y_j\,|\,x_i)$ で, 逆に y_j を条件としたとき x_i が起こる確率を $P(x_i\,|\,y_j)$ で表す. 同時確率 $P(x_i, y_j)$ が下表で示すように与えられている. このとき次の問いに答えよ.

(a) $P(x_2)$ を求め, ついで $P(y_1\,|\,x_2)$, $P(y_2\,|\,x_2)$ および $P(y_3\,|\,x_2)$ を求めよ.

(b) $P(y_1)$ を求め, ついで $P(x_1\,|\,y_1)$ および $P(x_2\,|\,y_1)$ を求めよ.

(c) $P(y_j\,|\,x_i)$ を $P(x_i)$, $P(y_j)$ および $P(x_i\,|\,y_j)$ で表す式を導け. ただし, $P(x_i) \neq 0$ とする.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.2	0.3
x_2	0.2	0.1	0.1

(2) 1 回の試行で 1 から 10 までの整数からなる一つの乱数を発生する装置がある.

(a) 3 回の試行で得た 3 個の整数がいずれも異なる確率を求めよ.

(b) 試行回数を増やすと, 得た整数の中に重複するものが存在する確率が次第に増加する. この確率が初めて 50 %を超えるのは何回目か.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052706)

0.83 複素数 $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ について，次の値を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を，$|z|$ は z の絶対値を表す.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2$$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062701)

0.84 放物線 $y = x^2$ から点 $A(10, 2)$ までの最短距離を次の方法に従って求めよ.

(1) この放物線上の点 $P(x_p, x_p^2)$ における法線の方程式を求めよ.

(2) 上で求めた法線が点 A を通ることから x_p を求め，点 P と点 A の距離を計算せよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062702)

0.85 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$

(豊橋技科大 2006)　　(m20062703)

0.86 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $(\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b})X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立であることを示せ.

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表せ.

(4) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル全体のなす集合 $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から作れ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062704)

0.87 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である．以下の問に答えよ.

(1) A の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ.

(2) 固有値 λ_1 に対する固有空間 W_1 の基底と次元を求めよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062705)

0.88 以下に示す関数について次の問いに答えよ.　$f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ.

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け.

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{q \to \infty} S(q)$ を求めよ.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062706)

0.89 袋の中に白玉 4 個と赤玉 6 個が入っている．以下の値をそれぞれ求めよ．ただし，解答は既約分数にせよ．

(1) 1 個取り出しては袋に戻す試行を 5 回行う場合，赤玉が丁度 4 回出る確率.

(2) 取り出した玉を戻さない場合，5 個取り出した中に赤玉が丁度 4 個ある確率.

(3) 取り出した玉を戻さない場合，4 個目を取り出した直後において，はじめて袋の中の白玉と赤玉の個数が同じになる確率.

(4) 同時に 2 個の玉を取り出す場合，同じ色の玉が出る確率.

(5) 取り出した玉を戻さずに，1 個ずつ取り出し，赤玉が出たら取り出しを止めるゲームをする．最終的に取り出すことができた白玉の個数を得点とする時，このゲームの得点の期待値.

(豊橋技科大 2006)　　(m20062707)

0.90 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．
ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

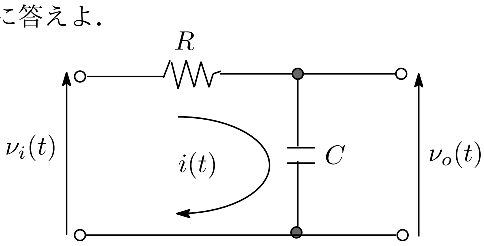
(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．



(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．

(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.91 箱の中に N 個の玉が入っている．これについて以下の問題文を読み，各問いに答えよ．

(1) N 個の玉を 4 人に分け与える方法を考える．

(a) 各自に最低 1 個の玉を渡すとする．$N = 8$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(b) 玉をもらえない人がいてもよいとする．$N = 4$ のとき，玉を 4 人に分ける方法は何通りあるか答えよ．

(2) 何回かに分けて箱から玉を取り出し，箱を空にしたい．1 回に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかとする．たとえば $N = 3$ のとき，箱を空にする方法は「1 回で 3 個」,「1 回目に 2 個，2 回目に 1 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 2 個」,「1 回目に 1 個，2 回目に 1 個，3 回目に 1 個」という 4 通りである．

(a) $N = 5$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(b) $N = 10$ のとき，箱を空にする方法は何通りあるか答えよ．

(3) 次のルールでゲームをする．2 人で交互に箱の中から玉を取っていって，最後の玉をとった人（箱を空にした人）が「負け」とする．一度に取り出せる個数は 1 個，2 個，3 個のいずれかで，最低 1 個は取り出さなければならない．ただし箱の中にある玉の個数以上は取り出せないので，箱の中の玉が 2 個ならば，1 個あるいは 2 個を取り出すこととする．

(a) $N = 6$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，
以下の選択肢 A〜E から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(b) $N = 123$ になったとき，自分の番がきた．勝つためには何個取ればよいか，
以下の選択肢 A〜E から一つ選んで答えよ．

A. 1 個

B. 2 個

C. 3 個

D. 1 個でも，2 個でも，3 個でも良い（最終的に勝てる）

E. 1 個でも，2 個でも，3 個でも，最終的に負ける．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062709)

0.92 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\sum_{i=1}^{N} ({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\text{ケ}}\right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例 : $\cos\frac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.93 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A| = 6$ のとき，a の値を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき，A の転置行列 ${}^tA$ と B の積 ${}^tA \cdot B$ を求めよ．

(3) B の逆行列 B^{-1} を求めよ．

(4) B の固有値をすべて求めよ．

(5) (4) で求めた固有値のうち最大のものに対する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとする．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072701)

0.94 1 から 10 までの数字の書かれたカードが 1 枚ずつ入っている袋から，無作為に 1 枚ずつカードを取り出す．以下の問いに既約分数で答えよ．

(1) カードを取り出すたびに袋に戻す場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ．

(2) カードを取り出すたびに袋に戻す場合，3 回取り出したときの数字の和が 28 以上である確率を求めよ．

(3) カードを袋に戻さない場合，2 回取り出したときの数字の和が 11 以上である確率を求めよ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072702)

0.95 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ．

(3) 接線 h と直線 $x = 0$，$x = 1$，および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする．

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ．

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 h，および直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072703)

0.96 (1) 球面 S : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z + 5 = 0$ の中心 P の座標と半径を求めよ．

(2) 直線 : $x = 2y - 2 = -z + 1$ と直交し，点 $(a, 0, 0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ．

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ．

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072704)

0.97 二つの封筒 A, B と，1 から 9 までの番号のいずれか一つが記されたカードの集合がある．封筒 A には，1 から 9 までそれぞれ 1 枚ずつ全部で 9 枚のカードを入れる．封筒 B には，1 から 9 までそれぞれ m 枚 $(m \geq 1)$ ずつ全部で $9m$ 枚のカードを入れる．以下の問いに答えよ．

(1) 封筒 A から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(2) 封筒 B から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(3) 封筒 A から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせと，封筒 B から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせが一致する確率を，$m = 3$ および $m \to \infty$ の場合について求めよ．

(4) 封筒 A と封筒 B それぞれから無作為に n 枚 $(1 \leq n \leq 9)$ ずつカードを引く．A から引いたカードと B から引いたカードの両方に，同じ番号のカードが少なくとも 1 枚含まれるための必要十分条件を，m と n を用いて示せ．

(豊橋技科大 2007) (m20072705)

0.98 1 から 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから 2 枚のカードを取り出して並べ，2 けたの数字を作る．ただし，1 枚目に引いたカードを十の位，2 枚目に引いたカードを一の位とする，以下の問いに答えよ．

(1) 2 けたの数字は全部で何通りできるか求めよ．

(2) 2 けたの数字が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 2 けたの数字が 3 の倍数である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 2 けたの数字の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2008) (m20082701)

0.99 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求めよ，ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ．

(2) 各固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，a と b を求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ を用いて，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する． このとき，$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ．

(5) 自然数 n に対して，$\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008) (m20082702)

0.100 不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\, dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，積分定数は省略すること．

(1) I_0 と I_2 を求めよ．

(2) $I_4 = \dfrac{1}{4}\left(\sin t \cos^3 t + 3I_2\right)$ であることを示せ．

(3) $n \geq 2$ のとき，I_n を I_{n-2} を用いた式として求めよ．

(4) 定積分 $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt \quad (n = 0, 2, 4, \cdots)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008) (m20082703)

0.101 (1) 次の関数の極限値を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

(2) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \neq 0$ とする． $\exp\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x \pm a \neq 0$ とする． $\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

(豊橋技科大 2009) (m20092701)

0.102 定積分 $I(n,a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\,dx$ について以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 または正の整数，a は実数とする．

(1) $n=0,\ a=1$ のとき，$I(0,1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である．

$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ．

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n,a)$ を n と a の関数として表せ．ただし，n は 1 以上とする．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092702)

0.103 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y=x^2$ の上の点 (x,y) は，曲線 $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$ の上の点 (x',y') に移される．$a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x,y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092703)

0.104 3 個のサイコロを同時に投げる．以下の問いに答えよ．

(1) 3 個のサイコロの目の数が $1,2,3$ のいずれかであり，かつ互いに異なっている確率を求め，既約分数で答えよ．

(2) 3 個のうち，少なくとも 2 個のサイコロの目の数が同じである確率を求め，既約分数で答えよ．

(3) 3 個のサイコロの目の数の和が 6 以上である確率を求め，既約分数で答えよ．

(4) 3 個のサイコロの目の数の和の期待値を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092704)

0.105 赤い玉, 白い玉, 青い玉を不透明な袋の中に入れる. 以下の問いを読んで, 既約分数で答えよ.

(1) 袋の中に赤い玉 3 個, 白い玉 5 個, 青い玉 8 個が入っている.

(a) 袋の中から玉を 1 個取り出し, 色を確認してから袋に戻す. 袋の中をよくかき混ぜてから, 改めて玉を 1 個取り出したとき, 取り出された玉が最初に取り出した玉と同じ色である確率を答えよ.

(b) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が赤 1 個と白 1 個である確率を答えよ.

(c) 袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が異なる色である確率を答えよ.

(2) 袋の中に赤い玉 $3n$ 個, 白い玉 $5n$ 個, 青い玉 $8n$ 個が入っている（n は自然数）. この袋の中から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉が同じ色である確率を $p(n)$ と表すことにする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p(n)$ を答えよ.

(豊橋技科大 2010)　　(m20102701)

0.106 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A^{-1} を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 x_1 と x_2 を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$ として, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解が $x_1 = 0, x_2 = 0$ 以外の解を持つように, 定数 k の値を求めよ.

(4) 行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ として, ADF を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102702)

0.107 次の関数について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

(2) $f(x)$ の一次導関数を $f'(x)$ とする. $f'(0)$ の値を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102703)

0.108 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ.

$$x = \sqrt{3}\sin t$$
$$y = \sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$ である.

(1) $t = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102704)

0.109 以下の問いに答えよ. 答えは既約分数で示せ.

(1) 4 人でジャンケンをする. それぞれが, グー, チョキ, パーを出す確率は等しいものとする. 1 回ののジャンケンで勝者 1 人が決まる確率を求めよ.

(2) つぼの中に白い玉 5 個と黒い玉 5 個が入っている. このつぼから無作為に一度に 4 個の玉を取り出したとき, 取り出した白い玉と取り出した黒い玉の個数がちがう確率を求めよ.

(3) つぼの中に玉が 4 個入っており, そのうち白い玉が何個であるかは分からないとする. このつぼから玉を 1 個取り出したところ, 白い玉であったという. もともとつぼの中に白い玉が 3 個入っていた確率を求めよ.

(豊橋技科大 2011) (m20112701)

0.110 下記の式で表される楕円 C_1 を反時計回りに 45° 回転して得られる像を C_2 とする.

$$c_1 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(1) C_1 を C_2 に写す一次変換を表す行列 A を求めよ.

(2) 図形 C_2 を表す式を求めよ.

(3) 図形 C_2 上の点 $P(x,\ y)$ において, P が C_2 上を移動する時, $x,\ y$ がそれぞれとる値の範囲を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112702)

0.111 次の連立一次方程式が解をもつための条件（a の値）を求め, その条件のもとでの一般解を示せ.

$$\begin{cases} x+\ \ y-2z+\ \ u=2 \\ -x-2y+3z-\ \ u=3 \\ 2x+\ \ y-3z+2u=a \end{cases}$$

(豊橋技科大 2011)　　(m20112703)

0.112 n 行 n 列の行列 B の第 $i,\ j$ 成分 b_{ij} が $b_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}\quad(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ のように与えられるとき, この行列 B は唯一の固有値を持つ. それでは, $n=3,\ (w_1,\ w_2,\ w_3)=(3,\ 2,\ 1)$ のときの B の固有値を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112704)

0.113 (1) 次式が成り立つような定数 a の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+a-\sqrt{x^2+x+1}\right)=1$$

(2) 次の関数を微分せよ.

$$f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

(豊橋技科大 2011)　　(m20112705)

0.114 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int\frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x=2(\theta-\sin\theta),\ y=1-2\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\ 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y\geqq\ 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y\geqq\ 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112706)

0.115 　中の見えない袋が 10 袋あり，それぞれに 10 個の玉が入っている．袋にはタイプA，タイプB，タイプCの 3 種類があり，タイプAは 2 袋，タイプBは 7 袋，タイプCは 1 袋であることが分かっている．ここでタイプAには白玉が 9 個，赤玉が 1 個入っている．タイプBには白玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている．タイプCでは白玉が 5 個，赤玉が 5 個入っている．このとき以下の問いに答えよ．ただし答えは分数で示すこと．

(1) 袋を無作為に一つ選び，玉を無作為に一つ取り出す．その袋がタイプAであり，かつ取り出された玉が白玉である確率を求めよ．

(2) 袋を無作為に一つ選ぶ．その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う．このとき，その袋がタイプAであり，かつ取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ．

(3) 袋を無作為に一つ選ぶ．その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行う．このとき，取り出された玉が 3 回とも白玉である確率を求めよ．

(4) 袋を無作為に一つ選び，その袋に対して，玉を一つ取り出してまた袋に戻すことを 3 回行った．取り出された玉は 3 回とも白玉であった．このとき，この袋がタイプCであった確率を求めよ．

(豊橋技科大 2012)　　(m20122701)

0.116 以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} = (1,\ 0,\ -2)$, $\boldsymbol{b} = (3,\ 2,\ -2)$, $\boldsymbol{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ がある．ただし，c_1, c_2, c_3 は実数である．$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交し，$\boldsymbol{c}$ の大きさは 9 である．$\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(2) 直交座標空間内に，点 $D(3,\ -4,\ 2)$ を通りベクトル $\boldsymbol{p} = (1,\ -1,\ 0)$ に平行な直線がある．さらに点 $E(5,\ -6,\ 4)$ を中心とした半径 6 の球がある．直線と球との交点の座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2012)　　(m20122702)

0.117 行列要素がすべて実数である正方行列 A に，0 ではない実数である一つの固有値 μ があるとする．一つの固有値には少なくとも一つの固有ベクトルがある．そこで，ベクトル $\boldsymbol{y}$ を固有値 μ に対応する固有ベクトルとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ において，ベクトルの各成分をそれに共役な複素数に置き換えて得られるベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ と表すことにする．ベクトル $\boldsymbol{y}^*$ は固有値 μ に対応する固有ベクトルであることを示せ．さらに，固有値 μ に対応する固有ベクトルで，ベクトルの成分がすべて実数であるベクトルが少なくとも一つはあることを示せ.

(豊橋技科大 2012)　　(m20122703)

0.118 次の関数を微分せよ．

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad (x \neq n\pi,\ n \text{ は整数})$$

(豊橋技科大 2012)　　(m20122704)

0.119 以下の問いに答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{2x-9}{(x-2)(x+3)}\, dx$$

(2) 楕円 $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$ の $x \geq 0,\ y \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい．以下の問いに答えなさい．

(a) 領域における x の最大値を答えよ．

(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ.

(c) 面積 S を計算せよ．

(豊橋技科大 2012)　　(m20122705)

0.120 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{2x(3-x)}$$

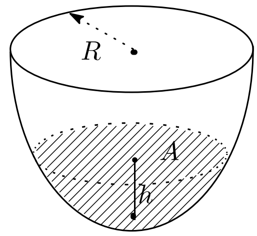
(豊橋技科大 2013)　　(m20132701)

0.121 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^x \cos \pi x dx$$

(豊橋技科大 2013)　　(m20132702)

0.122 半径 R の上に開いた半球があり，上面が地面に対して平行になるように置かれている．この半球に水が入っており（下図の斜線部分），半球の底から測った水面の高さを h とする．次の問いに答えよ．ただし，$h \leq R$ とする．



(1) 水面の面積 A を h の関数として表せ.

(2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ.

(3) 最下部に微小な小穴を開けた．単位時間当たりの水の体積 V の変化，すなわち dV/dt を示せ．ただし，小穴の大きさは十分に小さく，小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい.

(4) (3) の状況において，流体に関する基本定理から，単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積（体積速度）は $Sk\sqrt{h}$ で表される（S は微小な小穴の面積，k は正の定数）．単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が，半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて，高さ h と時間 t の関係式（微分方程式）を示せ．さらに，$t=0$ において $h=R$ であったとし，水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132703)

0.123 円 $x^2+y^2=4$ 上の直交座標系の点 $P(x,y)$ は，つぎの 1 次変換 f によって，円 $u^2+v^2=16$ 上の点 $Q(u,v)$ に移される．以下の問いに答えよ.

$$f:\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 点 $P(x,y)$ の座標を，偏角 θ を用いて表せ．ただし，偏角とは原点 O を円の中心として，半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である.

(2) $a\ (>0)$ の値を求めよ.

(3) 点 $P(x,y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0,4)$ へ移されたとき，点 $P(x,y)$ の座標を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132704)

0.124 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132705)

0.125 1 から 9 までの自然数を 1 つずつ書いた 9 枚のカードがある．以下の問いに答えよ.

(1) この 9 枚のカードから同時に 2 枚のカードを無作為に取り出す.

(a) 出た数字の差が 5 以下である確率を求め，既約分数で答えよ.

(b) 出た数字の和が偶数である確率を求め，既約分数で答えよ.

(2) X と Y の二人がこの 9 枚のカードを使ったゲームを行う．司会者 Z がカードを 1 枚無作為に取り出し，$1,2,3,4,5,6$ のいずれかの数字が出たときは X の勝ち，$7,8,9$ のいずれかの数字が出たときは Y の勝ちとし，勝った方にその数字の分だけの得点が与えられる．カードを元に戻してこの対戦を繰り返し，先に 3 回勝った方を勝者とする.

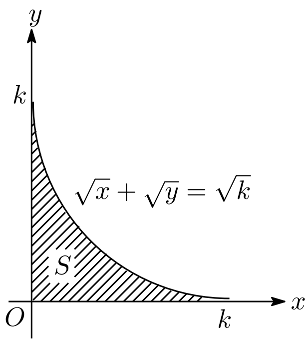
(a) X が 3 勝 1 敗で勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ．

(b) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，Y が勝者となる確率を求め，既約分数で答えよ．

(c) 最初に Y が 2 連勝したとする．この先，X か Y のどちらかが勝者となった時点の X の得点合計の期待値を求め，既約分数で答えよ．

(豊橋技科大 2013)　(m20132706)

0.126 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}\quad(k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け．



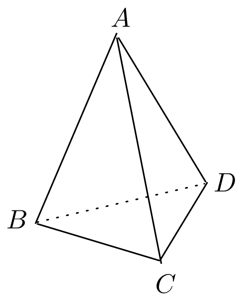
(2) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4$ と表されることを示せ．

(4) 立体 V の体積を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　(m20142701)

0.127 右図のように，四面体 $ABCD$ には，三角形の面が 4 つあり，辺が 6 つある．ここで，各辺を独立に，赤か青の色に等確率で（つまり，確率 1/2 で）塗ることを考える．3 辺が同じ色で塗られた三角形を，単色三角形と定義して，以下の問いに答えよ．



(1) すべての辺が青色で塗られる確率を求めよ．

(2) 三角形 ABC が単色三角形となる確率を求めよ．

(3) 三角形 ABC と ACD のどちらか，あるいは両方が単色三角形となる確率を求めよ．

(4) 四面体 $ABCD$ の中に単色三角形が 2 個のみ現れる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　(m20142702)

0.128 以下の連立一次方程式を解け，ただし，計算過程を解答用紙に明記すること．

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+5y+3z=13 \\ x+8z=-5 \end{cases}$$

(豊橋技科大 2014)　(m20142703)

0.129 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ (n 次の行列式，対角成分は a でその他の成分は b である)

(豊橋技科大 2014) (m20142704)

0.130 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015) (m20152701)

0.131 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ．

(2) 行列 B の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 B^2 の固有値をすべて求めよ．

(4) 行列 B^5 の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2015) (m20152702)

0.132 N 人に呼びかけて行事を実施する．この行事は，ある日時に N 人のうちの n 人以上が参加できる場合に実施できるとする．呼びかけられた人が参加できる確率は，行事を実施する日時によらず p である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，ある日時に行事が実施できる確率を求めよ．

(2) 行事を実施する日時として 2 つの候補を設定する．$p=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $N=3$ のとき，いずれの日時においても行事が実施できない確率を求めよ．

(3) 行事を実施する日時の候補数を k とする．$n=1$ のとき，少なくとも 1 回は行事が実施できる確率を N, p, k を用いて表せ．

(豊橋技科大 2015) (m20152703)

0.133 次の関数 $f(t)$ と $g(t)$ について，以下の問いに答えよ．ここで，e は自然対数の底である．

$f(t)=5e^{-t}$, $\qquad g(t)=t^2+t+1$

(1) $\dfrac{df}{dt}$, $\dfrac{dg}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) t を媒介変数とする媒介変数方程式

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

に対し，以下の問いに答えよ．

ア．$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数で表せ．

イ．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数で表せ．

(3) $z(t) = f(t)g(t)$ とし，以下の問いに答えよ．なお，答えは e を含んだままでもよい．

ア．$z(t)$ に関して，すべての極値を求めよ．また，そのときの t も示せ．

イ．$\displaystyle\int_0^1 z(t)dt$ を求めよ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162701)

0.134 合宿で 11 人を 3 つの定員 4 人の部屋に割り振りたい．ここで 11 人中特定の 2 人は必ず別々の部屋になるようにしたい，なお，11 人は区別できる個人として扱うが，3 つの部屋は同等に扱い，区別しない．部屋割りは何通りあるか．場合の数を求めよ．

(豊橋技科大 2016)　　(m20162702)

0.135 行列を $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，次の式を計算せよ．

ア．AC　　　　イ．$(3C)A - C(2B)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162703)

0.136 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162704)

0.137 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下を求めよ．

ア．内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

イ．それぞれの大きさ $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$

ウ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交し，かつ大きさが 6 であるすべてのベクトル $\boldsymbol{c}$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162705)

0.138 次の値を求めよ．ただし，オ．において，1 以上 100 以下の整数を全体集合とし，$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$ とする．また，$n(A)$ は集合 A の要素数を表し，$\overline{A}$ は集合 A の補集合を表す．

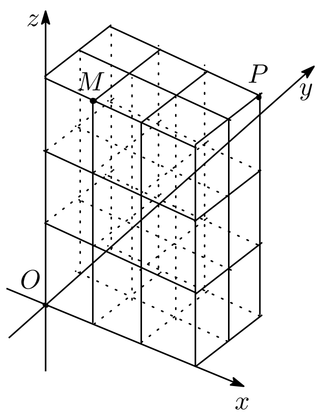
ア．3!　　イ．0!　　ウ．${}_5P_2$　　エ．${}_7C_2$　　オ．$n\left(\overline{A \cup \overline{A}}\right)$

(豊橋技科大 2016)　　(m20162706)

0.139 ある工場は午前 4 時間，午後 6 時間，夜間 2 時間の合計 12 時間稼動し，稼動中はいつも製品 X を時間当たり一定の個数生産している．生産後にすべての製品 X を検査し，ある基準値以上の性能があれば高価な S 級として，それ以外を通常の E 級として出荷している．午前に生産した製品 X は $\dfrac{1}{2}$ が S 級となる．同様に午後は $\dfrac{1}{3}$ が S 級となり，夜間は $\dfrac{3}{4}$ が S 級となる．この工場から出荷された E 級の製品 X のある一つが，午前に生産されたものである確率を求めよ．答えは規約分数で記せ．

(豊橋技科大 2016) (m20162707)

0.140 下図のように，空間上に点 $O(0,0,0)$ と点 $P(3,2,3)$，および点 $M(1,0,3)$ がある． ロボット A は点 O から点 P に，ロボット B は点 P から点 O に， それぞれ最短経路（8 ステップ）で移動する． ただし，1 ステップの移動は，x 軸，y 軸，z 軸のいずれか 1 方向に長さ 1 だけの移動とする． 以下の問いに答えよ．



(1) 点 O から点 P に移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(2) 点 O から点 P に，点 M を通って移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(3) ロボット A と B はそれぞれ独立に，すべての可能な最短経路の中から無作為に一つを選択する．選択した経路に沿って，それぞれの出発点からロボット A と B が同時に出発し，同時に 1 ステップずつ移動していくとき，点 M で両者が出会う確率を求め，既約分数で答えよ．

(豊橋技科大 2017) (m20172701)

0.141 次の行列 A, B に関して，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 B が対称行列であるとき，定数 a, b を求めよ．

(3) (2) のとき，行列 B の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2017) (m20172702)

0.142 以下の条件※で定義される n 次正方行列 C_n について次の問いに答えよ． ただし，n は正の整数とし，C_n の i 行 j 列の成分を c_{ij} とする．

条件※ i と j の少なくとも一方が 1 ならば $c_{ij} = (-1)^{i+j+1}$

その他の場合には $c_{ij} = 0$

(1) C_1 および C_3 の行列式をそれぞれ求めよ．

(2) ${C_3}^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172703)

0.143 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(豊橋技科大 2017)　　(m20172704)

0.144 xy 平面上の曲線 $y=\cos(x-\pi)+1\ \ (0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$ と直線 $y=0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.145 箱の中に 7 本の「はずれ」と 3 本の「当たり」が入っているくじがあう．以下の設問に答えよ．なお，1 回につき，くじは 1 本引くものとする．　また，特に断らない限り，続けてくじを引く場合，一度引いたくじは箱の中に戻すものとする．

(1) このくじを 1 回引いて，当たりが出る確率を求めよ．

(2) このくじを 3 回引いて，1 回も当たりが出ない確率を求めよ．

(3) このくじを 3 回引いて，1 回以上当たりが出る確率を求めよ．

(4) このくじを 3 回引いて，1 回だけ当たりが出る確率を求めよ．

(5) このくじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(6) 一度引いたくじを箱の中に戻さないようにする．このとき，くじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182701)

0.146 以下に示した不定積分を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$　　(2) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$　　(3) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

(豊橋技科大 2018)　　(m20182702)

0.147 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．また，最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182703)

0.148 xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ．

(3) 領域 R の面積 S を求めよ．．

(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182704)

0.149 関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0$ をみたしており，

さらに $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$ とする．$t = 0$ のとき，

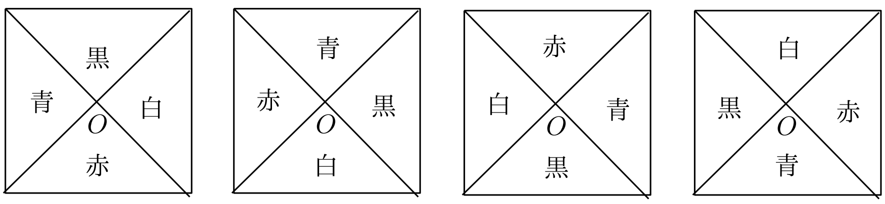
単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.150 (1) ある平面上に正方形があり，その対角線の交点を O とする．対角線によりこの正方形を 4 等分してできる 4 つの直角二等辺三角形を塗装する．辺を共有する隣り合う三角形が異なる色となるように塗装することを考える．ただし，この平面上で点 O を中心に，この正方形を回転させると一致する塗装の仕方は同じものと考える．たとえば，下図で示されている 4 つの塗装は同一の塗装の仕方である．

ア．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 2 色を選択し，塗装する方法は何通りかを求めよ．

イ．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 3 色を選択し，その 3 色全てを使用して塗装する方法は何通りかを求めよ．



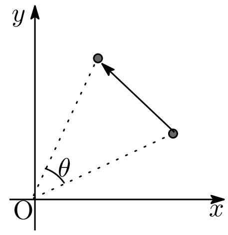
(2) 2 つのサイコロを同時に投げ，出た目の和が奇数とんる事象を事象 A，1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を事象 B とするとき，確率 $P(A \cap B)$ を求めよ．

(3) 白玉 3 個，赤玉 4 個が入った袋の中から玉を 1 つずつ取り出し，取り出した順に左から右へ一列に並べる． ただし，一度取り出した玉は袋に戻さないものとする．7 個全ての玉を順に取り出し並べるとき，白玉が隣り合わない様な並び方となる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192702)

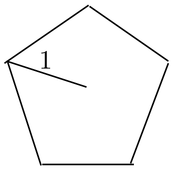
0.151 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．



(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.152 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の逆行列を求めよ．

(3) BA を求めよ．

(4) $ABABA^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202701)

0.153 5 個の白い玉と 3 個の赤い玉が入っている袋がある．この袋から無作為に玉を取り出すとき，以下の問いに答えよ．ただし，答が分数となる場合は既約分数で求めよ．

(1) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個の玉の色が異なる確率を求めよ．

(2) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも白い玉である確率を求めよ．

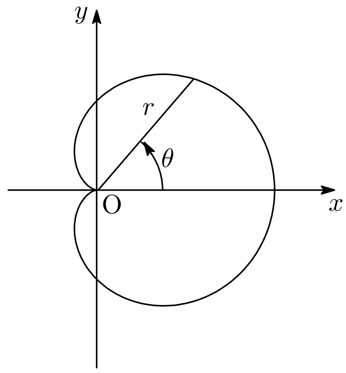
(3) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，3 個とも同じ色の玉である確率を求めよ．

(4) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき， 赤い玉が隣り合わない並び方になる確率を求めよ．

(5) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき， 赤い玉が 3 個連続して並ぶ確率を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202702)

0.154 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ．

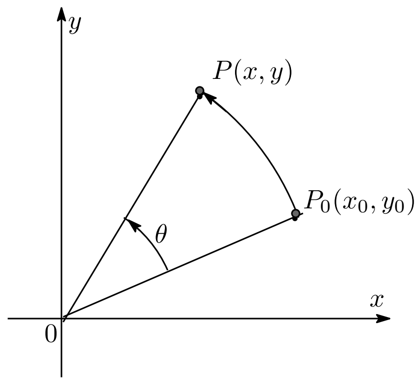
(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ．

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ．

(4) 曲線の全長を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.155 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.156 次の偏微分を計算せよ．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy) \quad \Big(x > 0,\ y > 0\Big)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212702)

0.157 次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{x+y}dxdy \quad \left(D = \Big\{(x,y)\ \Big|\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\Big\}\right)$$

(豊橋技科大 2021)　　(m20212703)

0.158 次に示す関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 10$$

(1) 関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, 7)$ における接線 $y = g(x)$ と曲線 $y = f(x)$ が囲む領域のうち，領域 $\Big\{(x,y)\ \Big|\ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}$ に含まれる部分の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212704)

0.159 $n = 1, 2, 3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある．以下の設問に答えよ．

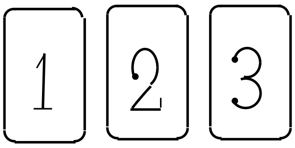
$$A_1(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\quad A_2(x) = \sin x,\quad A_3(x) = \sin^3 x \quad (\pi/3 \leq x \leq \pi/2)$$

$$B_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x)dx$$

(1) $\pi/3 < x_0 < \pi/2$ のとき，$A_1(x_0)$, $A_2(x_0)$, $A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ．

(2) 定積分 B_1, B_2, B_3 をそれぞれ求めよ．

(3) 図のように，3 枚のカードに 1 から 3 までの数字が 1 つずつ書かれている．この 3 枚のカードの中から無作為にカードを 1 枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする．この操作を 2 度行うとき，少なくとも 1 度は $B_n > 1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ．ただし，1 度目の操作後に選んだカードは元に戻し，2 度目でも 1 度目と同じ操作を行うものとする．



(豊橋技科大 2021)　　(m20212705)

0.160 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x,y,z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x,y,z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

0.161 関数 $f(x,y)=e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ． ただし，a,b は実数の定数とする．

ア．2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ．

イ．$f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222702)

0.162 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$,　　$D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.163 1, 2, 3, 4 のうち 1 つの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 4 枚のカードが箱の中に入っている．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は既約分数で答えよ．

(1) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，4 回とも同じ数字のカードを取り出す確率を求めよ．

(2) 箱からカードを 1 枚取り出して箱に戻すことを 4 回続けて行うとき，同じ数字のカードを 2 回以上取り出す確率を求めよ．

(3) 箱からカードを 1 枚ずつ順に 4 枚すべてを取り出すとき，最初に偶数，最後に奇数が書かれたカードを取り出す確率を求めよ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222704)

0.164 (1) $x=0$ のとき $y=4$ を満たす微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{16}y^2$ の解を求めよ．

(2) xy 平面上で，アで得られた解が表す曲線と，$x=0$，$x=4$，$y=0$ の 3 つの直線で囲まれる領域に含まれる点 (x,y) のうち，x，y が共に自然数となる点の数を求めよ．ただし，境界上の点は含まないものとする．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222705)

0.165 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ_1，λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$A^{n+1}=3A^n-2A^{n-1}$ が成り立つことを示せ．ただし，$A^0=E$ とする．

(3) 実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を

$$A^{n+1}-\lambda_1A^n=a_nA+b_nE,\qquad A^{n+1}-\lambda_2A^n=c_nA+d_nE\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．ただし，λ_1，λ_2 を (1) で求めた A の固有値とする．このとき，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(豊橋技科大 2023)　　　(m20232701)

0.166 関数 $f(x,y)=(2y^2+3y-2)\sin\bigl((2x+y)\pi\bigr)$ について答えよ．

(1) 偏導関数 f_x，f_y をそれぞれ求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ において，$f_x(x,\ y)=f_y(x,\ y)=0$ をみたす点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　　(m20232702)

0.167 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D y\sin(x+y)dxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ x+y \leqq \pi,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy,\quad D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \left|x-\frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 1,\ \left|x+\frac{1}{\sqrt{3}}y\right| \leqq 2\right\}$

(豊橋技科大 2023)　　　(m20232703)

0.168 赤玉 3 個，青玉 3 個，白玉 4 個が入った袋がある．次の問いに答えよ．ただし，答えが分数になる場合は，既約分数で答えよ．

(1) 袋から 1 個ずつ順に 3 個の玉を取り出す．ただし，取り出した玉はもとに戻さない，このとき，取り出した 3 個の玉が赤，青，白の順で取り出される確率を求めよ．

(2) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，取り出された 3 個の玉がすべて同じ色である確率を求めよ．

(3) 赤玉を 1 点，青球を 2 点，白玉を 3 点として，袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，取り出された 2 個の玉の点数の合計が偶数である確率を求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　　(m20232704)

0.169 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=e^x y^2$ を解け．

(2) (1) で得られた解の中で $x=0$ のとき $y=1$ をみたす関数の $-1 \leqq x \leqq 0$ における最小値を求めよ．

(豊橋技科大 2023)　　　(m20232705)