[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：筑波大

0.1 $\dfrac{1}{\cos x - \sin x}$ を積分せよ．

(筑波大 1998)　(m19981301)

0.2 $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(筑波大 1998)　(m19981302)

0.3 ω は 1 の立方根で $\omega \neq 1$ であるとする．

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{3}i$$ を証明せよ．

(筑波大 1998)　(m19981303)

0.4 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする．

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 5, \\ (t-6)^2, & 5 \leq t \leq 6. \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[0,6]$ 上の f のグラフを描け．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ．

(3) $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき，すべての t に対して $F(t)$ を求め，区間 $[0,6]$ 上の F のグラフを描け．

(4) 区間 $(0,6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(5) 関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する．

$$F_1(t) = \int_2^t f(s)ds \ , \ F_2(t) = \int_3^t f(s)ds \ .$$

このとき，$F_1(t) - F_2(t)$ を求めよ．

(筑波大 2000)　(m20001301)

0.5 テーラー展開を用い， $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ の関係があることを示せ．

(筑波大 2000)　(m20001302)

0.6 $f(x,y) = r^n$ とするとき， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を次の手順に従って求めよ．

ただし， $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ， n は整数とする．

変数の組 (x,y) を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により， (r,θ) の組に変数変換することを考える．

(1) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ および $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ であることに注意し，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta \, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r} \, \frac{\partial f}{\partial r}$$

であることを示せ．

同様に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ についても求め，整理することにより，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \, \frac{\partial}{\partial r}\Big(r \, \frac{\partial f}{\partial r} \Big)$$

となる．

(3) $f(x, y) = r^n$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を具体的に計算せよ．

(筑波大 2000)　　(m20001303)

0.7 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z = z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし，$-c < z_0 < c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000)　　(m20001304)

0.8 X をベクトル空間とする．n 個のベクトル $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が X で線形独立（1 次独立ともいう）とする．このとき，要素 $x \in X$ が $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の線形結合（1 次結合ともいう）で表せるとすると，その線形結合の係数は一意に定まることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001305)

0.9 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2000)　　(m20001306)

0.10 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2000)　　(m20001307)

0.11 正方行列 A に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $A \neq O$ であるとき，A が $A^2 = O$ を満足するなら（つまり，A がべき零行列なら），$I + A$ は正則である（逆行列を持つ）ことを示せ．ただし，行列 O，I はそれぞれ零行列，単位行列である．

(2)　A として次のような 2 行 2 列の行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

この行列の固有値を求めよ．ただし，a, b, c, d は一般には複素数である．

(3)　(2) において，A の固有値が重根となるための条件を示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ．

(4)　(2) における行列 A が，べき零行列であるための条件を求めよ．この条件と (3) の結果に基づいて，A の固有値は重根 0 となることを示し，これに対する規格化された固有関数をすべて求めよ．

(筑波大 2000)　　(m20001308)

0.12　2 次曲線 $-{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 = 1$ を行列で表すと

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdots (*)$$

となる．以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ．

(2)　固有値 λ_1, λ_2 について，それぞれの正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めよ．

(3)　行列 $P = [\,\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2\,]$ を用いた変換

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}\ , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

によって，式 $(*)$ を $y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2$ のみで表せ．

ヒント: P が直交行列（${}^tP = P^{-1}$，上付き添字の t は行列の転置 ）であることを利用する．

(4)　式 (1) で表される図形の種類は何か．

(筑波大 2000)　　(m20001309)

0.13　(1)　X をベクトル空間とする．S, T を X の部分空間とする．このとき，$S \cap T$ が X の部分空間となることを示せ．

(2)　X をベクトル空間とする．S, T を X の部分空間とする．このとき，$S \cup T$ は必ずしも X の部分空間とならない．そのような X, S, T の例をあげ，部分空間にならないことを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001310)

0.14　$\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ であることを利用して，その逆関数である $\arcsin z$ が

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

と表されることを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001311)

0.15　(1)　サイコロを投げたとき表に出る数字を X で表現することにしよう．また，このサイコロには歪みがなく，各面が表に出る確率は同等に等しいとしよう．このとき，X が従う確率分布を記しなさい．また，X の期待値を計算しなさい．

(2) ある母集団について，分散が 4 であり，分布が正規分布に従うことが分かっているとしよう．また，この母集団から，任意抽出法によって大きさ 4 の標本 13.8, 10.6, 8.2, 11.4 を得たとしよう．このとき，信頼係数 95% の，母平均 μ の信頼区間を求めなさい．ただし，解答に際しては，標準正規分布に従う確率変数 Z に関して

$$P(Z > 1.96) = 0.025\ ,\ P(Z > 1.64) = 0.05\ ,\ P(Z > 1.28) = 0.10$$

が成立するという性質を用いても良い．

(筑波大 2000)　　(m20001312)

0.16 面積が a 平方センチメートルの正方形がある．この正方形の四隅から合同な 4 つの正方形を切り取り，残りの部分を折り曲げて接合することにより，上部の開いた箱を作ることにする．箱の容量（体積）を最大化するためにはどうすればよいか．また $a = 36$ のときの最大容量を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011301)

0.17 関数 $f(x) = a\sin x \quad$ (ただし，$-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$) を考える．

(1) $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を求めよ．

(2) 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011302)

0.18 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(筑波大 2001)　　(m20011303)

0.19 $f(x) = \log(a^2 + x^2)$ のマクローリン展開の一般項を求め，収束半径を計算せよ．ただし，$a > 0$ とする．

（筑波大 2001）　　(m20011304)

0.20 $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad$ (ただし，$a > 0,\ b > 0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1) 体積を求めよ．　　(2) 表面積を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011305)

0.21 (1) 次の積分の値を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a(x^2 + y^2)\}dxdy$$

(2) 関数 $f(a)$ を $f(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^{\infty} x^2\exp(-x^2)dx \qquad\qquad \int_0^{\infty} x^{2n}\exp(-x^2)dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.22 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ が 1 次独立か否かを判定せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011307)

0.23 実数の定数 $\alpha,\ \beta$ に対し，行列 $A,\ P$ を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) P^n $(n \geqq 2)$ を求めよ．

(2) A, A^2 を α, β, I, P, P^2 を用いて表せ．ただし，I は 3 次の単位行列を表す．

(3) A^n $(n \geqq 2)$ を n, α, β, I, P, P^2 を用いて表せ．A^n はどのような行列になるか．

(4) $\exp A$ を α, β を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ．ただし，$\exp A$ は，

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す．

(5) $\exp(-A)$ を α, β, I, P, P^2 を用いて表し，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011308)

0.24 次の行列式の値を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2001)　　(m20011309)

0.25 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ に関して，以下の問に答えよ．ただし，$0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化する必要はない．

(2) 上で求めた固有ベクトルのもとで行列 A を対角化したときの対角行列 B を求めよ．

(3) 行列 A の対角化を用いて，A^n を求めよ（n は自然数）．

(筑波大 2001)　　(m20011310)

0.26 すべての成分が実数の 4 次元ベクトルの全体はベクトル空間となる．この空間を R^4 で表す．このときに

(1) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，$x_1 = 2x_2$, $x_3 = x_4 = 0$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ．

(2) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ．

(筑波大 2001)　　(m20011311)

0.27 今Ａ社とＢ社の株式 1 株を今から 1 ヶ月保有したときに得られる収益率をそれぞれ R_A, R_B とする．R_A は平均 μ_A%，標準偏差 σ_A% の正規分布に，R_B は平均 μ_B%，標準偏差 σ_B% の正規分布に従い，R_A と R_B の相関係数を ρ とする．h を $1 \geq h \geq 0$ の実数として，Ａ社の株式を h，Ｂ社の株式を $(1-h)$ の比率で保有したときに得る収益率 $(R_A h + R_B(1-h))$ の平均と標準偏差を求めよ．(単位はパーセントとする.)

(筑波大 2001)　　(m20011312)

0.28 x が限りなく正の無限大に近づくとき，次の式の値を小さい順に並べよ．

$$\frac{x}{\log x}\,,\ \sqrt{x}\,,\ \frac{1}{\sin(1/x)}$$

(筑波大 2003)　　(m20031301)

0.29 次の問いに答えなさい．

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ で定義される．
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい．

(筑波大 2003)　(m20031302)

0.30 定積分 $\quad I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq 0\,,\ \beta \neq 0)$
をパラメータ β について微分することにより $\quad \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \mathrm{sign}(\beta) \frac{\pi}{2}$ を導け．
ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する．

(筑波大 2003)　(m20031303)

0.31 (x, y) 直交座標系において $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3} \quad (\alpha > 0)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(筑波大 2003)　(m20031304)

0.32 次式をグラフに描いたときに，この曲線と x 軸で囲まれる面積を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で求めよ．

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

(筑波大 2003)　(m20031305)

0.33 次の定積分を行え． $\quad \displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(筑波大 2003)　(m20031306)

0.34 不定積分 $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　(m20031307)

0.35 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ を計算したい．誤差を 0.002 以下にするには，何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ．

(筑波大 2003)　(m20031308)

0.36 $e^{kx} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ と表したときの a_n を求めなさい．

(筑波大 2003)　(m20031309)

0.37 数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ は

$$f_0 = 0\,,\ f_1 = 1\,,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という漸化式によって生成される．k が十分大きな値になると，$\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか．

(筑波大 2003)　(m20031310)

0.38 以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) $f(x, y) = \tan x + \tan y - \tan(x + y) \quad (0 \leq x < \pi\,,\ 0 \leq y < \pi)$ の極値を求めなさい．

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか．

(筑波大 2003)　(m20031311)

0.39 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x = b\cos(\omega t + \phi)$，$y = b\sin(\omega t + \phi)$ で表すことができる．ここに，ω, ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ が得られる．$\overrightarrow{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\overrightarrow{\alpha}$ と $\overrightarrow{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{v}$ の絶対値 $|\overrightarrow{\alpha}|$, $|\overrightarrow{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003) (m20031312)

0.40 n 次行列 A について，次のことを証明せよ．ただし，E を n 次の単位行列とする．

(1) $A^k = E$ となる自然数 k があれば，A は正則である．

(2) $A^2 = A$, $A \neq E$ であれば，A は正則でない．

(筑波大 2003) (m20031313)

0.41 二次行列 A が $A^2 = E$ $(E:$ 単位行列 $)$ を満たすとき，A を求めよ．

(筑波大 2003) (m20031314)

0.42 n 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $((i, n-i+1)$ 成分のみ 1, 他の成分は 0) について，

A^{-1} , A^k $(k:$ 自然数 $)$ を求めよ．

(筑波大 2003) (m20031315)

0.43 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ を考えよう．ここで，パラメータ p, q の変動範囲は $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ．

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ．

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(筑波大 2003) (m20031316)

0.44 正方行列の固有値，固有ベクトルに関する以下の 2 つの問いに答えよ．

(1) 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の正方行列 B の固有値とその転置行列 ${}^tB$ の固有値とは同じであることを証明せよ．

(筑波大 2003) (m20031317)

0.45 次の行列の逆行列と固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2003) (m20031318)

0.46 次の表は，学生 10 人の数学と英語のテストの成績である．数学と英語の成績に相関関係があるか判断せよ． (筑波大 2003) (m20031319)

学生番号	数学	英語
1	58	60
2	35	50
3	65	50
4	42	60
5	85	70
6	30	42
7	45	60
8	46	50
9	90	98
10	45	60

0.47 次の等式を証明せよ.（n は自然数）　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(筑波大 2004)　(m20041301)

0.48 3 次方程式 x^3-5x^2+px+q の 3 つの解の比が $2:3:5$ であるとする.

(1) このとき, p, q の値を求めよ.

(2) 3 つの解の値を求めよ.

(筑波大 2004)　(m20041302)

0.49 a が 3 で割り切れない奇数であるならば, a^2-1 は 24 で割り切れることを示せ.

(筑波大 2004)　(m20041303)

0.50 友人数人が旅行の相談をし, 次の条件 (a)〜(d) をすべて満たす場所を選ぶことにした.

(a) 温泉地であること

(b) 紅葉が見られるか, または湖があること

(c) 海辺ではないこと

(d) 所要時間が 3 時間以内であること

「温泉地である」,「紅葉が見られる」,「湖がある」,「海辺がある」ことをそれぞれ命題 A, B_1, B_2, C とし,「所要時間が x 時間以内である」ことを命題 $t \leqq x$ で表す.

下表のように候補地 1〜10 に対し, 命題 A, B_1, B_2, C の真偽（それぞれ T と F で表す）, および所要時間が与えられているとき, 以下の問に答えよ.

(1) 上記の (a)〜(d) をすべて満たすという命題を, A, B_1, B_2, C, $t \leqq x$ および命題結合記号 $\vee (OR)$, $\wedge (AND)$, $\neg (NOT)$ を使って表せ.

(2) (a) と (b) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(3) (a),(b) および (c) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(4) (a)〜(d) をすべて結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ

候補地	命題 A	命題 B_1	命題 B_2	命題 C	所要時間
1	T	F	T	F	2
2	F	T	T	T	2
3	F	T	F	T	3
4	T	T	F	T	3
5	T	T	T	F	3
6	T	F	F	T	3
7	F	T	F	T	4
8	T	F	T	F	4
9	T	F	F	T	5
10	T	T	T	F	5

(筑波大 2004)　　(m20041304)

0.51　関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の増減の状態を調べ，その結果に基づき，2 つの実数値 e^π と π^e の大小を比較せよ．

(筑波大 2004)　　(m20041305)

0.52　$2 \leq x \leq 2$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \\ 0 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1)　容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.

(2)　水面の上昇速度 (v) を求めなさい.

(3)　水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

（筑波大 2004）　　(m20041306)

0.53　以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1)　$|x| < 1$ のとき，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい．また，これを用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい．

(2)　次の不等式が成立することを証明しなさい．ただし，$n > 2$ とする．

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

(筑波大 2004)　　(m20041307)

0.54　$f(x) = x \ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to +0} x \ln x$ を求めよ.

(2)　$x \geq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y = f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3)　x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004）　　(m20041308)

0.55 $y = x^2 - 2x - 8$ の曲線を x 軸に対して回転させて囲まれる部分の体積を求めよ.
ただし, 求める部分は $x^2 - 2x - 8 = 0$ の解 x_1 , x_2 の間のみとする ($x_1 \leqq x \leqq x_2$).

（筑波大 2004）　(m20041309)

0.56 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ を計算しなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ を計算しなさい.

（筑波大 2004）　(m20041310)

0.57 xy 平面上に 2 本の曲線 $y = x^2 - 1$ と $y = -(x - k)^2 + (k + 1)$ が与えられているとする.

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ.

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ を公式として用いてよい.

（筑波大 2004）　(m20041311)

0.58 $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$　　(式 1)
について, 次の問に答えなさい.

(1) 項別微分を行ない導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 微分方程式 $f(x) = f'(x)$ 満たす関数を $f(x) = \exp(x)$ と定義するとき (式 1) はこの定義を満足することを説明しなさい.

(3) 新しい関数 $ch(x)$, $sh(x)$ を

$$ch(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$
$$sh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

で定義するとき, $ch(x)$ および $sh(x)$ の間には

$$sh'(x) = ch(x)$$
$$ch'(x) = sh(x)$$
$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

なる関係があることを示しなさい.

（筑波大 2004）　(m20041312)

0.59 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2\sqrt{x + y} + \sqrt{2}$ とすると, この関数は $0 < x, y < \infty$ において下に凸である. $f(x, y)$ が最小値をとるときの x, y の値, および関数の最小値を求めよ.

（筑波大 2004）　(m20041313)

0.60 (1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を導け.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx$　($a > 0,\ n$ は自然数)　を求めよ.

(筑波大 2004)　(m20041314)

0.61 $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ. また, 点 $(2, 1)$ における $g(x, y)$ の勾配の大きさを求めよ.

(2) $\displaystyle\iint_D g(x, y)dxdy$ を求めよ. ただし, $D : x^2 + y^2 \leq 1$ とする.

(筑波大 2004)　　(m20041315)

0.62 次の微分方程式を解け.

$$x^4\frac{dy}{dx}+y^2=0$$

(筑波大 2004)　　(m20041316)

0.63 ある量 y は現在時刻 t における量 $y(t)$ の 3 倍に比例して減少する.

(1) この量を時間の関数 $y(t)$ として記述せよ.

(2) $t=0$ における $y(t)$ の値が 1 であったとき, $t=1$ における $y(t)$ の値を求めよ.

(筑波大 2004)　　(m20041317)

0.64 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の組に実数（スカラー）値を対応させる演算 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が以下を満たすものとする.

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{x}=0$ の場合に限る.

さらに $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$ が成り立つ.　このことを証明済みとして, $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqq|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ を示せ.

（筑波大 2004）　　(m20041318)

0.65 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である.

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \lambda\end{pmatrix}$$

また,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とする. x,y,z もすべて実数である.

(1) x,y,z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

が自明でない解を持つための, パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

を考える. パラメータ λ に応じた場合分けをして, 解が存在するか否かを調べよ. 存在する場合には, 一意性に注意して, その解を求めよ.

(筑波大 2004)　　(m20041319)

0.66 (1) 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+2z &=& 4 \\ 4x+3y+2z &=& 5 \\ 1x+2y+2z &=& 3 \end{array}\right.$$

(2) 次の連立方程式が解を持つための係数 a の条件を求めよ.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+az &=& 4 \\ 4x+3y+2z &=& 5 \\ ax+2y+2z &=& 3 \end{array}\right.$$

(筑波大 2004) (m20041320)

0.67 次の微分方程式を解くために，以下の設問に答えよ.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}x_1 &=& 2x_1-2x_2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 &=& -x_1+3x_2 \end{array}\right.$$

(1) 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め，行列 A を対角化せよ.

(3) ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく．$\mathbf{x}$ と A を用いて，上の微分方程式を表せ.

(4) ベクトル $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく．$P\mathbf{y}=\mathbf{x}$ として，これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ．また，この y_1, y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ.

(5) x_1, x_2 の一般解を求めよ.

(6) $t=0$ における初期値 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1, x_2 の，$t\to\infty$ における振る舞いを調べよ.

(筑波大 2004) (m20041321)

0.68 行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) ある正則行列 P を用いて, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$ と対角化することは可能か. 可能であれば, P の成分と $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の値を求めよ. 対角化不可能であれば, その理由を説明せよ.

(筑波大 2004) (m20041322)

0.69 線形空間 U の 1 次独立なベクトル a_1 , a_2 , a_3 によって張られる部分空間を V，ベクトル a_1-a_2 , a_2-a_3 , a_3-a_1 によって張られる部分空間を W とするとき，以下の 2 つの問いに答えよ.

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) W の次元を求めよ.

(筑波大 2004) (m20041323)

0.70 いまごくまれにおこるある特別の病気を発見するのに, ある検査法が有効であるとする. 実際にその病気にかかっている人にこの検査法を適用すると, 95 %の確率で, 病気を発見できるとする. また, それと似た症状を示すがはるかに軽微ですむ病気にかかっている人にこの検査法を適用すると, その 10 %がその病気にかかっているという誤った検査結果 (false positive) がでるものとする. また健康な人にこの検査法を適用すると, その 5 %がその病気にかかっているという誤った検査結果 (false positive) がでるものとする.

いまごくまれにおこる特別な病気にかかっている人, それと似た症状を示すがはるかに軽微ですむ病気にかかっている人, および健康な人の割合は, 母集団においてそれぞれ 1%, 4%, 95%であるとする.

この母集団から無作為に選ばれた一人がこの検査を受けて, その病気にかかっているという検査結果が出た場合, その人が本当にその病気にかかっている確率を求めなさい.

(筑波大 2004)　　(m20041324)

0.71 1 年を 365 日とし（うるう年のことは考えない），人が生まれる確率はどの日も同じとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 任意の 2 人が出会ったとき，この 2 人の誕生日が異なる確率を分数で求めよ．

(2) これに 1 人が加わって 3 人になったとき，3 人の誕生日がいずれも異なる確率を求めよ．答は数式のままとし，分数や小数の値を求める必要はない．

(3) N 人が出会ったとき，それらの誕生日がすべて異なる確率 $P(N)$ を表す式を求めよ．

(4) 整数 x が 1 より十分大きければ，次の近似を用いることができる（Stirling の公式）．

$$\log_e x! \fallingdotseq x\log_e x - x \qquad (e \text{ は自然対数の底})$$

この式を利用して $\log_e P(N)$ に対する近似式を求めよ．ただし， N は 365 より十分小さいものとする．

(筑波大 2004)　　(m20041325)

0.72 関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x-2} & x > 2 \text{ のとき} \\ b & x \leqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$

がすべての点において連続となるように, 定数 a と b の値を決めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051301)

0.73 曲線 $y = 2x^2\sqrt{x} - 5x^2 \quad (x \geqq 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) y が最小値をとる x の値と, その最小値は何か?

(2) y の変曲点における x の値は何か?

(3) y が上に凸である x の範囲と, 下に凸である x の範囲を示せ.

(4) y のグラフの概形を描き, その上に, x 軸と交わる点, 最小値をとる点, 変曲点の座標をそれぞれ示せ.

(5) このグラフの x 軸の下にある部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051302)

0.74 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A が正則であるための a, b の条件を述べよ.

(2) $a = -1$, $b = 1$ のとき, 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051303)

0.75 ２つの確率変数 X と Y の結合確率分布 $P\{X=m\,,\ Y=n\}$ $(m=0,1,2,3\,;\ n=0,1,2,3,4)$ が下の表のように与えられている.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	c	0	0	0
$Y=1$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$Y=4$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0

ただし, c は定数である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 c の値を決めよ.

(2) X だけの確率分布 $P\{X=m\}$ $(m=0,1,2,3)$ を求めよ.

(3) X の平均 $E[X]=\displaystyle\sum_{m=0}^{3} mP\{X=m\}$ を求めよ.

(4) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ.

(5) XY の平均 $E[XY]$ を求めよ.

(6) X と Y が独立であるかどうかを, 理由を示して判定せよ.

(筑波大 2005)　　(m20051304)

0.76 関数 $f(x,y)=xy(x+y-1)$ について以下の設問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ が極値を取る可能性のある点 (x,y) を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の 2 次偏導関数 f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.　　注 : 極値は極大値と極小値の総称

(筑波大 2005)　　(m20051305)

0.77 ベクトル $\boldsymbol{u}=(1,-2,-1)$, $\boldsymbol{v}=(2,3,1)$, $\boldsymbol{w}=(0,1,1)$ について以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が線形独立であることを示せ.

(2) ベクトル (a,b,c) が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の線形結合で表されるとき a , b , c の関係を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051306)

0.78 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}t+1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\t+1\\2\end{pmatrix}$ と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 3 点 A, B, C を考える. ただし, t は実数である. 以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, t の値によらず常に一次独立であることを示せ.

(2) 外積 $(\mathbf{b}-\boldsymbol{a})\times\ (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ を計算せよ.

(3) 3 点 A, B, C を通る平面 Π の方程式を求めよ.

(4) 実数 t が変化するとき, 平面 Π が通らない点の集合を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051307)

0.79 (1) 関数 $f(x)=xe^{ax}$（a は定数）の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+4}{(x-1)(x^2+1)}$ の不定積分を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051308)

0.80 $f(x)$ を $x\geqq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leqq \sum_{i=1}^n f(i) \leqq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^n f(i)\,,\quad n=1,2,\cdots$$

と定義する. $f(x)=x^\alpha$（$\alpha>0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

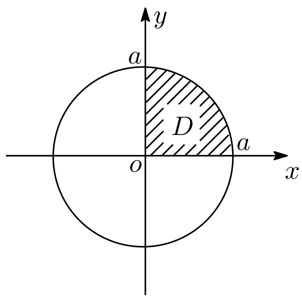
(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.81 2 変数関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051310)

0.82 (1) 積分 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
ただし, 積分領域 D は
$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq a^2\,,\ x\geqq 0\,,\ y\geqq 0\}$ $(a>0)$ とする.

(2) (1) の結果を利用し, 領域 $D_\infty=\{(x,y)\mid x\geqq 0\,,\ y\geqq 0\}$ における広義積分 $\displaystyle\iint_{D_\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.



(筑波大 2005)　　(m20051311)

0.83 未知数 $x_1,\cdots x_n$ についての連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える. ここで,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}$$

である. さらに, A の第 i 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とおくことにより $A=[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ と表す. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されることである. このことを示せ.

(2) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{b}]$ が成り立つことである. このことを示せ. ここで, $[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{b}]$ は A の右側に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えた m 行 $n+1$ 列の行列を表す.

(3) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

(4) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 7 \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 13x_4 = -12 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 21x_4 = 19 \end{cases}$$

(筑波大 2005) (m20051312)

0.84 $f(x) = e^{-x}\sin x$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f'(x)$ を求め，$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる点をすべて挙げなさい.

(2) $y = f(x)$ の概略図をグラフで示しなさい. (3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めなさい.

(筑波大 2006) (m20061301)

0.85 環境中における生物の増殖速度は条件が良好な場合，個体数濃度 (x) に比例する．すなわち，比例定数（マルサス指数）を m として，

$$\frac{dx}{dt} = mx \qquad (式 1)$$

と書くことができる．この数理モデルについて以下の問いに答えなさい．

(1) (式 1) を初期条件 $t = 0$ において $x = x_0$ として解き，グラフに図示しなさい．

(2) 環境容量の有限性を考えると (1) の答えは，時間が経過していくと不合理である．この場合，増殖速度は個体数濃度 (x) と空き容量 $(K - x)$ の積に比例するとして

$$\frac{dx}{dt} = mx(K - x) \qquad (式 2)$$

と変更される．K は環境容量を表す定数．(式 2) を初期条件 $t = 0$ において $x = x_0$ として解き，x の時間変化の概略をグラフに示し，$x \to \infty$ の挙動を説明しなさい．

(筑波大 2006) (m20061302)

0.86 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式 $\Delta\phi = 0$

を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006) (m20061303)

0.87 関数 $f(x) = \exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x) = 0$ となる x の値を示せ．

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，$f''(x) = 0$ となる x の値を示せ．

(筑波大 2006) (m20061304)

0.88 関数 $f(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$ の値を，条件 $x + y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ のもとで最大化する x と y の値を求めよ．

(筑波大 2006) (m20061305)

0.89 積分 $\displaystyle\iint_D (4 - x - y)dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0\}$ の値を計算せよ．

(筑波大 2006) (m20061306)

0.90 3つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，a 及び b は実数値パラメータとする．

(1) この3つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底になるための a と b の条件を求めよ．

(2) この3つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の直交基底になるように a と b の値を定めよ．

(3) (2) のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ をこの3つのベクトルの線形結合で表せ．

(筑波大 2006)　　(m20061307)

0.91 あるコインを投げるとき，確率 p で表，確率 $1-p$ で裏が出るものとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，$0<p<1$ とする．

(1) このコインを3回投げるときに表が出る回数 X の確率分布 $P(X=k)$, $k=0,1,2,3$ を求めよ．

(2) X の平均 $E[X]$ を求めよ．

(3) X の分散 $E\Big[\big(X-E[X]\big)^2\Big]$ を求めよ．

(4) 同様にして，このコインを n 回投げるときに表が出る回数 Y の確率分布を示せ．

(5) Y の平均を導出せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061308)

0.92 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$ であるとする．このとき，次式が成立することを証明せよ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006)　　(m20061309)

0.93 2次元 $x-y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 a の円の第一象限内にある部分を D とする．このとき，次の二重積分を求めよ．　$\displaystyle\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006)　　(m20061310)

0.94 単位行列とは異なる n 次の正方行列 A に対し，A^k $(k=1,2,\cdots)$ を k 個の A の積 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$ と定義する．次の2つの問いに答えよ．

(1) $A^2=A$ ならば，A は正則ではないことを証明しなさい．

(2) A が正則ならば，任意の自然数 $k(=1,2,\cdots)$ に対して A^k も正則となり，A^k の逆行列 $(A^k)^{-1}$ は A の逆行列 A^{-1} を使って　$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$　と表せることを証明しなさい．ただし，$(A^{-1})^k$ は A^k の定義と同様に k 個の A^{-1} の積を表すものとする．

(筑波大 2006)　　(m20061311)

0.95 $x=\cos t$, $y=\sin t$ のとき，次の関数を t で微分せよ．ただし，$f(x,y)$ は x,y に関して偏微分可能な関数である．

(1) $\cos x+\cosh y$　　(2) $f(x,y)$

(筑波大 2006)　　(m20061312)

0.96 正方行列 M の対角成分の和を $tr(M)$ と表すとき，n 次正方行列 A, B に対して $tr(AB) = tr(BA)$ であることを示せ．

(筑波大 2006)　　(m20061313)

0.97 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ．

(3) $x \leq 0$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か，理由をつけて答えよ．

(筑波大 2006)　　(m20061314)

0.98 集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f : P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ．

(2) f が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061315)

0.99 (1) $f(x) = \ln(1+x)$，$(-1 < x \leq 1)$ のテイラー展開を x^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）．$\ln x$ は x の自然対数を示す。

(2) $g(x) = \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)$，$(|x| < 1)$ のテイラー展開を x^n の項まで求めよ（剰余項は含まない）．

(3) $\ln 2$ を近似する場合，少ない数の展開項で誤差をより小さくするには，上記のテイラー展開の内、どちらを用いればよいか．理由を記して答えよ．

(筑波大 2006)　　(m20061316)

0.100 (1) $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ で与えられる図形の概略を描け $(a > r > 0)$．

(2) この図形を y 軸の周りに回転して得られるドーナッツ型の回転体（トーラス）の体積 V を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061317)

0.101 空間（３次元のユークリッド空間）の中で，３つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に写す，つまり，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とするような線形写像（行列）A を考える．

(1) A を具体的な数行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061318)

0.102 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 x, y をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell : y = ax$ に関して折り返すという線形写像を P としたとき，P の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061319)

0.103 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,　$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) AB, $B^T A$ を求めなさい．ただし，B^T は B の転置行列である．

(2) $X \neq O$, $AX = XA = O$ となる行列 X を求めなさい．要素が整数となる行列を 1 つだけ解答すればよい．

(筑波大 2006)　　(m20061320)

0.104 曲線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を $C(t)$，直線 $x = 2$ の $y > 0$ の部分を m とする．

(1) $C(t)$ の方程式を求めなさい．

(2) $C(t)$ と m が交点をもつための t の範囲を求めなさい．

(3) $C(t)$, m および x 軸で囲まれてできる三角形の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ を t の式で表しなさい．

(4) $S(t)$ の最大値を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061321)

0.105 次の極限を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} \log(x+1) + \log(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x}) \right\}$

(筑波大 2006)　　(m20061322)

0.106 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$ を求めなさい．

(2) $I(a) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \sin x + 1)^2 dx$ を最小にするような a の値を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061323)

0.107 (1) ２つのベクトル $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, -1)$ のなす角を求めなさい．

(2) ２つのベクトル $\vec{x} = (1, 0, 3)$, $\vec{y} = (2, -1, 1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい．解答する単位ベクトルは一つでよい．

(3) ３点 $A(2, 1, -3)$, $B(3, 1, -1)$, $C(1, 4, 4)$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061324)

0.108 (1) 1 から 11 までの番号のついた 11 枚の札の中から，無作為に 1 枚の札を選んだとき，その札の番号が 2 または 3 の倍数である確率を求めなさい．

(2) 1 枚の銅貨を 10 回投げたとき，裏が少なくとも 2 回出る確率を求めなさい．

(3) 箱 A には黒ボールが 5 個，白ボールが 2 個入っており，箱 B には黒ボールが 3 個，白ボールが 2 個入っている．1 つの箱を無作為に選び，その箱から無作為に 1 つのボールを選ぶ．選んだボールが白である確率を求めなさい．

(4) 1 組のトランプ (52 枚) から無作為に 13 枚のカードを引く．引いた 13 枚のカードに 4 枚のエースが含まれている確率を求めなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061325)

0.109 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ．　　(2) $\dfrac{\cos x}{x}$ の導関数を求めよ．

(3) 上記 (2) および $|\cos x| \leq 1$ を利用し，不等式 $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{x_1}$ が成り立つことを示せ．

ただし，$0 < x_1 < x_2$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071301)

0.110 (1) $3x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$ のとき，$f = x^2 + y^2$ の極値を求めよ．

(2) 上記 (1) の幾何学的意味を論ぜよ．

(筑波大 2007)　　(m20071302)

0.111 次の連立方程式の解を調べよ．ただし，a および b は実数のパラメータとする．

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & -2z & = & -2 \\ ax & -by & -z & = & -1 \\ x & -y & -4az & = & -4b \end{array}\right.$$

(筑波大 2007)　　(m20071303)

0.112 確率変数 X, Y の同時確率密度関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$ から，確率変数 $Z = X + Y$ が従う分布の確率密度関数を導出せよ．ここで，$-\infty < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071304)

0.113 4 次の正方行列 A を　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　と定める．

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各々の固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071305)

0.114 V を複素数体 C 上の n 次元ベクトル空間とする．V 上の線形変換 $f\ :\ V \to V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき,

$$V = \mathrm{Im}\, f\ \oplus\ \mathrm{Ker}\, f$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ は，それぞれ

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\},\quad \mathrm{Ker}\, f = \{v \mid\ \in V,\ f(v) = 0\}$$

で定義される V の部分空間である．

(筑波大 2007)　　(m20071306)

0.115 0 でない n 個の複素数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ をとり，Θ をその (i,j) 成分が $(\theta_i)^{j-1}$ で与えられる n 次正方行列とする. さらに　$p_k = (\theta_1)^k + (\theta_2)^k + \cdots + (\theta_n)^k \quad (k \geq 0)$　とおく．以下の問に答えよ．

(1) 行列 ${}^t\Theta\Theta$ は次の行列に等しいことを示せ．ただし，${}^t\Theta$ は行列 Θ の転置行列である．

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-2} \end{pmatrix}$$

(2) Vandermonde の行列式　$\det\Theta = (-1)^{n(n-1)/2} \displaystyle\prod_{1\le i<j\le n} (\theta_i - \theta_j)$

を用いて次の等式を示せ．　$\det\left({}^t\Theta\Theta\right) = \displaystyle\prod_{1\le i<j\le n} (\theta_i - \theta_j)^2$

(3) $\theta_1, \cdots, \theta_n$ が n 次正方行列 A の固有値であるとき　$\mathrm{tr}\,(A^k) = p_k \quad (k \ge 0)$
となることを示せ．ただし，tr は行列のトレースである．

(筑波大 2007)　　(m20071307)

0.116 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (xg(x)) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$　となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して
$u_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)dy$　とおけば
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n u_n(x) = f(x)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$　をみたすことを示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071308)

0.117 a, b を $a^2 + b^2 = 1$ をみたす実数の定数とし，D を $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ で定めるとき，

積分　$\displaystyle\iint_D \frac{(ax+by)^2}{\sqrt{1-(ax+by)^2}}dxdy$　を求めよ．

必要なら次の変数変換を用いてよい．　$\begin{cases} u = \ \ ax + by \\ v = -bx + ay \end{cases}$

(筑波大 2007)　　(m20071309)

0.118 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の導関数を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071310)

0.119 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする．このとき，　$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする．このとき，閉区間 $[a, b]$ で $g(x) > 0$ であるならば，　$\dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ．

(筑波大 2007)　　(m20071311)

0.120 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$

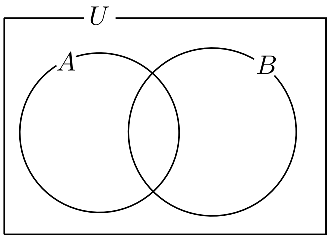
(筑波大 2007)　　(m20071312)

0.121 集合 A,B に対して演算 $\oplus$ を：

$$A\oplus B=\{x\mid x\in A\cap\overline{B}\ \text{または}\ x\in\overline{A}\cap B\}$$

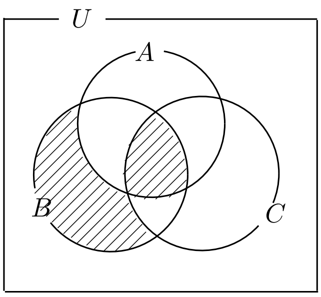
と定義する．$\cap$ は積集合, $\cup$ は和集合, $\overline{A}$ は A の補集合を表す.

(1) $A\oplus B$ に含まれる領域を，下のような図に斜線を入れて示せ．ただし，U は全体集合である．



(2) $\overline{A\oplus B}$ を，A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cup$, $\cap$ 及びカッコだけを使った式で表せ.

(3) 下図の斜線の領域を A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\oplus$ 及びカッコだけを使った式で表せ.



《注》斜線の領域は，原稿では灰色の領域となっていましたが，図の灰色の部分が不明でしたので，仮に，上記の斜線の部分のように改ざん致しましたので，ご承知下さい．

(筑波大 2007)　　(m20071313)

0.122 関数 $f(x)=x\cdot\ln x \quad (x>0)$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．　　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ．

(3) $x\to+0$ および $x\to+\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ．

曲線 $y=x\cdot\ln x$ と x 軸と $x=a \quad (0<a<1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく．

(5) $S(a)$ を求めよ．　　(6) $S(a)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{a\to+0}S(a)$ を求めよ．

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e=2.72$ の値を用いなさい．

(筑波大 2007)　　(m20071314)

0.123 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + x_3 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix}$ $(a \in \boldsymbol{R})$
について，以下の問に答えなさい．

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ．

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ．

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071315)

0.124 積分 $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ を求めよ．ただし，積分領域 D は $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$ とする．

(筑波大 2007) (m20071316)

0.125 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ の一般解を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071317)

0.126 関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 1$ について以下の問に答えよ．

(1) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ． (2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071318)

0.127 (1) 次の連立一次方程式の解の集合を求めよ． $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(2) 次の連立一次方程式の一般解を求めよ． $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(筑波大 2007) (m20071319)

0.128 2次の実対称行列 A で作った2次形式が次のように与えられたとする． ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 2x^2 - 4xy + 5y^2$
ここで $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$， ${}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ である．

(1) A の固有値と固有ベクトル（正規化したもの）をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを並べて作った2次の正方行列 P とその転置行列 ${}^tP$ を使って ${}^tPAP$ を計算せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に適当な一次変換を行い上記の2次形式を標準形に変換せよ．

(筑波大 2007) (m20071320)

0.129 $x > 0$ のとき次の不等式を証明せよ．ただし $\log$ は自然対数とする． $\log(1+x) > x(1-x)$

(筑波大 2007) (m20071321)

0.130 上空の2機の航空機 A, B がそれぞれ一定の速度ベクトル $\vec{v}$, $\vec{w}$ で飛んでいる．この2機のある時刻の位置ベクトルはそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ であるとする．このとき航空機 A, B が最接近するときの A, B 間の距離を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ を用いて表せ．

(筑波大 2007) (m20071322)

0.131 三角形 ABC において，$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ の値がすべて整数であるときに，これらの値を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071323)

0.132 ある人が特定の遺伝子 G を持っているかどうかを調べたい．このとき検査 T で陽性になるとこの人は遺伝子を持っていると判断される．しかし個体差があるために，真に遺伝子を持っている人でも検査結果が陽性になるとは限らないし，真に遺伝子を持っていない人でも検査結果が陰性になるとは限らない．一般に検査の精度は感度と特異度で評価される．感度とは真に遺伝子を持っている人が検査によって陽性になる確率，特異度とは真に遺伝子を持っていない人が検査によって陰性になる確率である．

さて，遺伝子 G は 10000 人に 1 人の割合で存在することがわかっている．ある人 A が検査 T を受けたところ陽性であったとき，このもとで A が真にこの遺伝子 G を持っている条件付き確率を求めよ．ただし検査 T の感度と特異度は 99% であるとする．

(筑波大 2007)　(m20071324)

0.133 $20! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$ を素因数分解せよ．（例えば $5! = 120$ なら $2^3 \times 3 \times 5$ となる．）

(筑波大 2007)　(m20071325)

0.134 すべての実数 x に対し $\sqrt{3}\sin x - \cos x = A\sin(x-\alpha)$ が成り立つとき，A，α を求めよ．ただし $A > 0$，$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ とする．

(筑波大 2007)　(m20071326)

0.135 $4\cos^2 x - 12\cos x + 9$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071327)

0.136 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(筑波大 2007)　(m20071328)

0.137 $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}z = 1$ となる複素数 z を $a+bi$ の形で表せ．ただし $i^2 = -1$ で，a, b は実数とする．

(筑波大 2007)　(m20071329)

0.138 A, B, C はそれぞれ正直（必ず本当のことを言う）か嘘つき（必ず嘘を言う）のどちらかであり，互いに相手の正体を知っている．以下の A, B, C の発言から，それぞれの正体が正直，嘘つき，あるいは不明（これだけからはどちらとも言えない）のいずれであるかを答えよ．

(1) A：「B, C の 1 人は正直で 1 人は嘘つきだ.」

(2) B：「A, C の少なくとも一方は嘘つきだ.」

(3) C：「A は正直だ.」

(筑波大 2007)　(m20071330)

0.139 $1024 \fallingdotseq 1000$，つまり $2^{10} \fallingdotseq 10^3$，という近似式を使えば，$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$，と近似できる．さらにこれと $81 \fallingdotseq 80$，つまり $3^4 \fallingdotseq 2^3 \times 10$ という近似式を使えば，$4\log_{10} 3 \fallingdotseq 1 + 3\log_{10} 2$，したがって $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.48$（小数点第 3 位で四捨五入）と近似できる．

$\log_{10} 7$ について同様の近似式を示し，それを使って $\log_{10} 7$ の近似値を示せ．

(筑波大 2007)　(m20071331)

0.140 球面 $C : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z - 8 = 0$ について以下の問いに答えよ．

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ．

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2007)　　(m20071332)

0.141 1 円, 5 円, 10 円, 50 円, 100 円の 5 種類の硬貨がそれぞれ 3 枚ずつ, 合計 15 枚ある. これについて以下の問いに答えよ.

(1) この中から 2 枚を選んだ合計金額は, 全部で何通りあるか.

(2) この中から 3 枚を選び, それを戻してもう一度 3 枚選んだところ, 3 枚の合計金額は同じなのに, 硬貨の組み合わせ（同じ金額の硬貨が何枚あるか）は異なっていた. そのような 2 通りの組み合わせと合計金額の例を示せ

(3) この中から 3 枚を選んだ合計金額は, 全部で何通りあるか.

(筑波大 2007)　　(m20071333)

0.142 4 次関数 $y=f(x)=x^4-8x^2+ax+b$ のグラフは 2 点 $x=\alpha,\ \beta\quad(\alpha<\beta)$ で x 軸と接する.

(1) a,b,α,β を求めよ.　　(2) $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(筑波大 2007)　　(m20071334)

0.143 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots$ の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ の値を求めよ.

ただし, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ である（π は円周率）.

(筑波大 2007)　　(m20071335)

0.144 $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と単位固有ベクトルを求めよ.　　(2) A^n を求めよ（n は正の整数）.

(筑波大 2007)　　(m20071336)

0.145 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x}=b,\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

を考える（α, β は定数）.

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.　　(2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ.

(3) そのときの一般解を示せ.

(筑波大 2007)　　(m20071337)

0.146 以下の 4 つの列ベクトルがあるとする.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$$

(1) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次独立となる条件を述べなさい.

(2) 次に (1) と異なり，三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属だと仮定する．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合として表せますか？表せる場合はその式を示しなさい．表せない場合はその理由を説明しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081301)

0.147 列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ を二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ が張る空間に射影することを考える． いま $\boldsymbol{a}_1$ を第一列，$\boldsymbol{a}_2$ を第二列，としてもつ 3 行 2 列の行列を A とする．

(1) 3 次元空間にベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ を示す図を描きなさい．

(2) $\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ の張る平面へ射影する点を $p = A\overline{x}$ ，ここで $\overline{x}$ は $2\times\ 1$ 行列，とする．$\overline{x}$ を求める式が $A^TA\overline{x} = A^T\boldsymbol{b}$ で与えられる理由を説明しなさい．なお A^T は行列 A の転置をあらわす．

(3) この時射影された点 p の座標を示しなさい．

(4) この射影を与える $\overline{x}$ の成分 $\overline{x} = (\overline{x}_1\ ,\ \overline{x}_2)^T$ を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081302)

0.148 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義 $\displaystyle\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}$ に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.149 制約 $x^2+y^2-1=0$ の下で目的関数 $h(x,y) = xy - x$ の極値を求めることを考える．

(1) この制約を満たす点の軌跡，および目的関数の値を一定にする (x,y) の組み合わせの軌跡を描きなさい．

(2) 目的関数 $h(x,y)$ の極値を与える点を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081304)

0.150 大リーグのヤンキースが勝つ確率は 50% であるとする．しかし松井が打点をあげると勝つ確率は 70% にあがるとする．また各試合で松井が打点をあげる確率は 40% であるとする．

(1) 松井が打点をあげない時にヤンキースが勝つ確率を求めなさい．

(2) ヤンキースが負けた時に松井が打点をあげている確率を求めなさい．

(注意：答えは分数で示せば十分である．)

(筑波大 2008)　　(m20081305)

0.151 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081306)

0.152 $z = x^2 + 2y^2$，平面 $x + y = 1$，および 3 座標面で囲まれる立体の体積を求めなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081307)

0.153 線形写像 $T\ :\ R^4 \to R^4$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ．

(2) 行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T \circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T \circ T)$ を求めよ.

(3) 連立一次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け.

(筑波大 2008)　　(m20081308)

0.154 $u = \dfrac{y}{x}$ とおいて微分方程式 $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ を解き，それがどのような曲線群を表すか述べよ. なお，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

(筑波大 2008)　　(m20081309)

0.155 線形空間 $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$，線形空間 $\boldsymbol{W}$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ とする. $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ への線形写像 F が下記の関係を満たすとき，これらの基底に関する F の表現行列 M を求めよ. また，F による $\boldsymbol{V}$ の像 $F(\boldsymbol{V})$ の次元を求めよ. なお，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルを表す.

$F(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$, $F(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3$, $F(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = F(\boldsymbol{o})$, $F(\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3$

(筑波大 2008)　　(m20081310)

0.156 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ の値を，以下の 2 通りの方法で計算せよ.

(1) (a) $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ を示せ.

(b) 積分変数を $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ に置換せよ $\left(\text{ヒント：}\cos\theta = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\text{である}\right)$.

(c) 積分を実行して I を求めよ.

(2) (a) 複素数 $z = e^{i\theta}$ とおいたとき，$z + \dfrac{1}{z}$ を計算せよ.

(b) その結果を基に I を z に関する複素積分に変換せよ.

(c) 留数定理を用いて I を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081311)

0.157 方程式 $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの根を 1, α, β とし，$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{bmatrix}$ とする.

(1) A^3 を α, β を用いずに表せ.　　(2) A^2 の逆行列を，A を用いて表せ.

(3) A^7 を α, β を用いて表せ.　　(4) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(5) A を対角化せよ.

(筑波大 2008)　　(m20081312)

0.158 次の行列 A について問いに答えよ.　$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P は存在するか，理由をつけて答えよ.

(筑波大 2008)　　(m20081313)

0.159 V を有限次元のベクトル空間とし，$f\ :\ V \to V$ を線形変換とする．このとき，$\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$ を満たす $n(\geq 1)$ が存在することを示せ．また，その n について $\mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^{n+1}$ が成り立つことを示せ．ただし，f^n は f の n 回の合成変換である．

(筑波大 2008) (m20081314)

0.160 $f(x) = e^{-(1/x)}(x > 0)$ とおき，その $n(\geq 1)$ 階導関数を $f^{(n)}(x)$ で表すとき，$\dfrac{x^{2n} f^{(n)}(x)}{f(x)}$ は x の $(n-1)$ 次多項式であることを示せ．

(筑波大 2008) (m20081315)

0.161 (1) $t = \sqrt{y^2 - x^2}$ と置換することにより，次の積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ とする．

$$\int_x^\infty \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

(2) 次の累次積分を計算せよ． $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^\infty \frac{y}{1+y^2} \frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$

(筑波大 2008) (m20081316)

0.162 (1) 極座標変換により，次の積分を計算せよ． $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

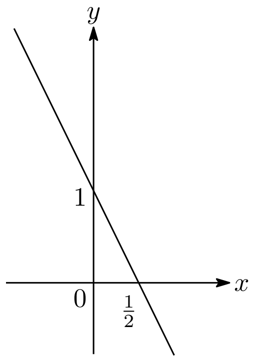
(2) 上の結果を用いて，次の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(筑波大 2008) (m20081317)

0.163 例を参考にして，(1) から (5) の各関数についてそれぞれ $x = 0$ での傾きを求め，グラフを描け．

例：$y = -2x + 1$

$x = 0$ での傾きは -2，グラフは次の通り：



(1) $y = e^x$

(2) $y = \ln x$ （自然対数）

(3) $y = 1/(1 + x^2)$

(4) $y = \exp(-x^2)$

(5) $y = (e^x - e^{-x})/2$

(筑波大 2008) (m20081318)

0.164 いろいろな関数を，多項式で表現してみよう．ある関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

のように，定数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を用いて x の多項式であらわされるとしよう．このとき，

(1) $f(0) = a_0$，$f'(0) = a_1$，$f''(0) = 2a_2$ であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について，$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ であることを示せ．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回，微分したものである（$f(x)$ の n 階導関数）．ゼロの階乗は 1 とする．

(3) $f(x) = \dfrac{f(0)}{0!} + \dfrac{f'(0)}{1!} x + \dfrac{f''(0)}{2!} x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ とできることを示せ．

(4) 関数 $\sin x$ は，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\sin x$ をこのような多項式で表現せよ．

(5) 関数 $\cos x$ や関数 e^x も，このような多項式で表現できることがわかっている．具体的に $\cos x$ と e^x をそれぞれ，このような多項式で表現せよ．

(6) 任意の実数 θ について，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となることを示せ，ただし，i は虚数単位とする．

(筑波大 2008)　　(m20081319)

0.165 $f(x,y,z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} + 1$ で与えられる関数 $f(x,y,z)$ の極値とその座標 (x,y,z) を求めよ．

ただし，$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ であり，かつ，$x + 4y + 9z = 6$ の付加条件があるものとする．

(筑波大 2008)　　(m20081320)

0.166 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz \ \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D = \{(x,y,z) \mid 1 < x^2 + 4y^2 + 9z^2 < 4\}$ とする．

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.167 関数 $f(x) = (2e^x + a)^4$ が与えられている．$f(x)$ を x についてマクローリン展開（$x = 0$ の周りでのテイラー展開）をして x^2 の項まで求めよ．ただし，a は定数である．

(筑波大 2008)　　(m20081322)

0.168 行列 A について以下の設問に答えよ．

$$A \equiv (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A を構成する 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は，1 次独立か 1 次従属か，理由を示して答えよ．

(2) A が正則かどうかを調べ，正則な場合は逆行列を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトル（大きさを 1 に正規化したもの）をすべて求めよ．

(4) A を対角化する行列を与え，それを用いて対角化されることを示せ．

(筑波大 2008)　　(m20081323)

0.169 23 本の染色体に，ある突然変異が起こっているかどうかを調べたところ 5 か所に突然変異を認めた．ただし，1 つの染色体に複数の突然変異が起こることがあるとする．次の (1) から (3) に答えなさい．

(1) 突然変異の起こり方の総数 N は 22 個の青玉と 5 個の赤玉を 1 列に並べる順列の総数と等しいことを示し，N を求めなさい．

(2) 突然変異が 8 番染色体に 3 か所あり，残りの 2 か所は 8 番染色体以外である場合は何通りあるか答えなさい．

(3) この突然変異はどの染色体にも等しく起こりうると仮定した場合，(2) のような場合が起こる確率を計算しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081324)

0.170 (1) 方程式 $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもち，その解は 1 と 2 の間にあることを証明しなさい．

(2) (1) で得られる実数解は無理数であることを証明しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081325)

0.171 次の微分方程式 (D) について (1) から (3) に答えなさい.

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (D)$$

(1) $f'(x) = f(x)$ または $f'(x) = 2f(x)$ ならば，$f(x)$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(2) $f(x) = e^x$ および $f(x) = e^{2x}$ は微分方程式 (D) の解であることを示しなさい.

(3) 微分方程式 (D) の任意の解 $f(x)$ は，ある実数 a, b を用いて $f(x) = ae^x + be^{2x}$ と一意的に表せることを示しなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081326)

0.172 点 $P(3,1)$ と直線 $y = x$ について対称な点を Q，　Q を原点を中心に反時計回りに 90° 回転した点を R とするとき，R の座標を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081327)

0.173 集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表す．A, B, C が集合で：

$n(A \cup B \cup C) = 50$　　$n(A \cap B \cap C) = 10$

$n(A \cap B) = 20$　　$n(B) = 25$　　$n(C) = 20$

のとき．$n(A)$ がとりうる値の最小値・最大値を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081328)

0.174 次の連立一次方程式を解け.
$$\begin{cases} 8x + 5y + 7z = 7 \\ 7x + 2y + 7z = 2 \\ 2x + 9y + 8z = -3 \end{cases}$$

(筑波大 2008)　　(m20081329)

0.175 $\sin 3\theta = \sin\theta$ となる正の θ で最小のものを求めよ．（解答は度，ラジアンのいずれで書いてもよい.）

(筑波大 2008)　　(m20081330)

0.176 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^{2n})dx$（$n$ は 0 以上の整数）の値を n を使って表せ.

(筑波大 2008)　　(m20081331)

0.177 従来型テレビの画面の縦横比は３：４であり，新型テレビでは９：１６である．これについて，以下の問いに答えよ.

(1) 従来型テレビの３：４の映像全体を新型テレビの画面全体に引き伸ばして映すには，縦横いずれの方向に何倍拡大する必要があるか.

(2) デジタル一眼レフカメラで撮影した画像の縦横比は２：３である．この画像の縦横比を変えずに，できるだけ大きくテレビ画面に映す場合，画面全体に対する余白の面積比はいくらか．従来型テレビ，新型テレビのそれぞれの場合について求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081332)

0.178 以下の (1)〜(3) において，「前提」が正しい場合に「結論」が正しい例，正しくない例をそれぞれ1つずつ，a, b, c 等の文字の具体的な数値例で示せ．下の例も参照のこと.

- 正しい例／正しくない例が存在しない場合には解答欄に「なし」と記すこと.
- 考える数値は実数の範囲とし，$1 \div 0$，$\sqrt{-1}$ のように実数として意味を持たない例は用いないこと.

	前提	結論	正しい例	正しくない例
例 1	$a > 0$	$a = ab$	$a = b = 1$	$a = b = 2$
例 2	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x > 0$	$x = 1$	なし

(1) 前提：$a > b,\ c > d$　　　結論：$ac > bd$

(2) 前提：$a^2 + b^2 = 1$　　　結論：$2ab \leqq 1$

(3) 前提：$a > b > 1$　　　結論：$a^b > b^a$

(筑波大 2008)　　(m20081333)

0.179 次の連立不等式で示される領域 S について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqq 18 \\ x + 2y \leqq 10 \\ x \geqq 0 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

(1) S の面積を求めよ．

(2) S 中で $x + y$ の値を最大にする点での x と y の値を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081334)

0.180 $a+b$, $(1+2) \times 3$ のように演算子 $(+, -, \times, \div$等$)$ を文字・数値・式の間に書く通常の数式の記法（中置記法）に対し，$ab+$ のように演算子を後ろに置く書き方を後置記法という．複雑な式の場合も，計算される順に式を組み立てていけばよい．下に例を示す．

$$\underbrace{\underbrace{(a+b)}_{ab+} \times \underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{ab+cd-\times} \qquad \underbrace{a + \underbrace{b \times \underbrace{(c-d)}_{cd-}}_{bcd-\times}}_{abcd-\times+} \qquad \underbrace{\underbrace{a + \underbrace{b \times c}_{bc\times}}_{abc\times+} - d}_{abc\times+d-}$$

上の例にも見られるように，後置記法ではカッコがなくても演算順序を正しく表現できる．

- 後置記法の文字や数値の間には，見やすいように適宜カンマを入れる．例えば $1 + 23$ は $1, 23+$, $12 + 3$ は $12, 3+$ のように表す．
- 以下では後置記法の演算子としては，$+, -, \times$ の 3 種を用いる．べき乗は x^2 を $x, x\times$ ，x^3 を $x, x \times x \times$ のように，乗算の繰り返しとして表す．

(1) $6 \times 5 - 4 - 3$ を後置記法で表せ．

(2) 後置記法で $4, 4 \times 3, 2 \times -, 1+$ と表される式の値を求めよ．

(3) 後置記法で $a, a \times a + 1 + a, 1 - \times$ と表せる式を通常の数式で，できるだけ簡単な形に直して表せ．

(4) $x^3 + ax^2 + bx + c$ と同値で，演算子数ができるだけ少ない式を後置記法で表せ．

(筑波大 2008)　　(m20081335)

0.181 1 直線上にない 3 点 O, A, B をとり，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．また，ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|$ $(= \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})})$ のように表し，$a = |\overrightarrow{a}|$, $b = |\overrightarrow{b}|$ とする．

O, A, B を含む平面上の任意の点 P は，適当な実数 p, q により：

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のように表すことができる．これについて，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が線分 AB（両端 A, B を含む）の上にあるとき，$(*)$ の p, q はどのような条件を満たすか．

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

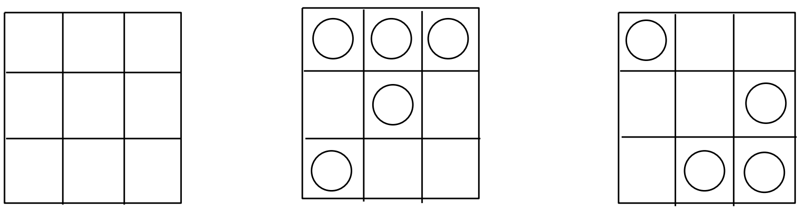
(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ．

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき，$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ．

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.182 下図の (i) のような $3\times\ 3$ のマス目があり，各マスには○を 1 個入れることができる．○を 0 個以上入れた結果を「盤面」と呼ぶ．例えば○が 1 個の盤面は，どのマスに○があるかに応じて全部で 9 通りある．縦, 横, 対角線のいずれかの列に○が 3 個並んだものを「完成盤面」，そうでないものを「未完成盤面」と呼ぶ．例えば下図 (ii) は完成盤面（上段及び対角線に○が 3 個並んでいる），(iii) は未完成盤面の例である．



(i)　(ii)　(iii)

これについて，以下の問いに答えよ．

(1) ○が 4 個ある盤面は全部で何通りあるか．

(2) そのうち，完成盤面は何通りあるか．

(3) ○が 5 個ある盤面のうち，未完成盤面は何通りあるか．

(筑波大 2008)　　(m20081337)

0.183 3 次関数 $f(x) = x^3 - x^2 - 74x + 144$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(-5), f(0), f(5)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) $f(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，直線 $x = -1$，$x = 1$ が囲む面積を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081338)

0.184 $f(x)$ は何回でも微分可能で，$f'(x) = -xf(x)$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を，$f(x)$ を用いて表せ．　　(2) $f(0) = 1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(筑波大 2008)　　(m20081339)

0.185 いま以下のような連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = b$ があるとします．

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} = b\,.$$

この連立方程式を解くために以下のはきだし法を用いることを考える．

(a) 1 行目の方程式を 2 倍して 2 行目の方程式から引く．この操作をする行列を E とする．

(b) 1 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を F とする．

(c) これらの操作の後，2 行目の方程式を -1 倍して 3 行目の方程式から引く．この操作をする行列を G とする．

この結果として新しい係数行列 U をもった以下のような連立一次方程式 $U\boldsymbol{x} = d$ がつくられた．

$$U\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix} = d\,.$$

(1) この連立一次方程式の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(2) 行列 U は上三角行列になっているが，このはきだし法を行う過程で用いた $GFEA = U$ となる行列 E, F, G を求めなさい．

(3) またこれらの行列のうち E の作用の逆，すばわち，第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える行列を求めなさい．この行列を E' とすると $E'\,E$ はどんな行列になるか答えなさい．

(4) 上記の (2) から $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$ と表せるが，この行列 $E^{-1}F^{-1}G^{-1} = L$ が下三角行列になることを示しなさい．

(5) 上記の (2) から (4) ではきだし法を用いて，行列 A が下三角行列 L と上三角行列 U との積，すなわち，$A = LU$ と表されることがわかった．これと同じ考え方を用いて以下の行列 B を下三角行列と上三角行列との積であらわしなさい．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(筑波大 2009)　　(m20091301)

0.186 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.187　$g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$，　$x,y\geq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091303)

0.188　２つの連続な確率変数 X, Y の同時確率密度関数が以下に与えられる．

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & , \quad 0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \quad \text{それ以外} \end{cases}$$

(1)　X の期待値を求めなさい．

(2)　$X=0.5$ の時の Y の条件付確率密度関数を求めなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091304)

0.189　(1)　複素変数 z のべき関数 $f(z)=z^i$ $(i=\sqrt{-1})$ において，$f(i)$ の値をすべて求めよ．

(2)　xyz 空間における曲面 $z=(x+y)^2e^{x-y}$ 上の点 $(1,0,e)$ での接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.190　実変数 x の関数 $f_n(x)=x^n\log x$　（n は自然数）について，以下の問いに答えよ，

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f_n(x)$　（$f_n(x)$ の $x=0$ における右側極限値）を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(3)　$f_n(x)$ の第 $n+1$ 階導関数を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091306)

0.191　2 次曲面 $x^2+3y^2+3z^2-2yz+2y+2z=0$ の標準形を求めよ．また，曲面の名称を答えよ．

(筑波大 2009)　　(m20091307)

0.192　変数 x,y の関数 $z=f(x,y)$ を変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ により新しい変数 r, θ で表す．このとき，関数 $z=f\left(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\right)$ について以下の設問に答えよ．

(1)　1 階偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r, θ, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(2)　2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091308)

0.193　領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\right\}$ 上での重積分 $I=\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ を以下の設問に従って求めよ．ただし，$a>0$, $b>0$ とする．

(1)　$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$ により変数変換を行う．積分領域 D を変数 r, θ で表せ．

(2)　前問 (1) の変数変換を行ったときのヤコビアンを求めよ．

(3)　以上の結果を用い重積分 I を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091309)

0.194 独立変数が 1 個 (t), 従属変数が 2 個 ($x = x(t),\ y = y(t)$) の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える．初期条件を $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ．

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて，与えられた微分方程式を行列 A を使って，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える．A を具体的な行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）し，それを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とする．

(3) $\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{p}_1 + c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする．$c_1(0),\ c_2(0)$ は x_0, y_0 を使ってどう書けるか．

(4) $c_1(t),\ c_2(t)$ が満たす（t に関する）微分方程式を求めよ．

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて，$c_1(t),\ c_2(t)$ を求めよ．初期条件 $c_1(0),\ c_2(0)$ は，設問 (3) で得ていることに注意せよ．

(6) $x(t),\ y(t)$ を x_0, y_0 を使って表せ．

(筑波大 2009)　　(m20091310)

0.195 a を複素数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める．

(1) A の階数 ($= \mathrm{rank}A$) を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091311)

0.196 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，次の 2 条件を考える．

(a) 各成分 a_{ij} は 1 または -1 である．

(b) A の二つの異なる列ベクトルは必ず直交する．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき，条件 (a) と (b) を満たす行列は存在しないことを示せ．

(2) n 次正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき，

$${}^tA\,A = nE$$

となることを示せ．ただし，E は n 次単位行列，${}^tA$ は A の転置行列とする．

(3) 正方行列 A が条件 (a) と (b) を満たすとき，

$$H = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$$

も条件 (a) と (b) を満たすことを示せ．

(筑波大 2009)　　(m20091312)

0.197　球 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leqq x$ の共通部分の体積を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091313)

0.198　$g(x)$ を整数係数の多項式とする，$n \geqq 1$ を与えられた自然数として，

$$f(x) = x^n g(x)$$

とする．このとき，すべての $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$f^{(k)}(0)$ は $n!$ の倍数になることを示せ．ただし，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 回微分してできる多項式を表す．

(筑波大 2009)　　(m20091314)

0.199　集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ による像に関して，以下を示せ．

(1)　任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つ．

(2)　f が単射（1 対 1）であるならば，任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ．

(3)　X の任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つならば，f は単射となる．

(筑波大 2009)　　(m20091315)

0.200　整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \displaystyle\int \cos^n x \, dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい．

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.201　$-1 < x < 1$，$-1 < y < 1$ で定義された関数 $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x，f_y と 2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求め，この関数が極値をもたないことを証明しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091317)

0.202　a と b を実定数とし，x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ 8x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & ax_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & b \end{array}$$

に関して以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1)　$a = b = 1$ のときに解は存在するか．存在すれば，その解を求めよ．

(2)　解が $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ のみとなる a と b の条件を求めよ．

(3)　解を持たないときの a と b の条件を求めよ．

(4)　解が無限個存在するときの a と b の条件を求めよ．

(5)　すべての解の集合が 4 次元実ベクトル空間の部分空間となるときの a と b の条件を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091318)

0.203 (1) 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, $A^2,\ A^3,\ A^4$ を計算せよ.

(2) B が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $B^m = O$ ならば B の固有値はすべて 0 であることを示せ.

(3) C が n 次正方行列とする. ある自然数 m に対して $C^m \neq O$, $C^{m+1} = O$ ならば $n \geq m+1$ であることを示せ.

(筑波大 2010) (m20101301)

0.204 (1) A を正則行列とするとき. ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ を示せ. ただし, ${}^t(A^{-1})$ は A^{-1} の転置行列, ${}^tA$ は A の転置行列とする.

(2) Q を直交行列とするとき, $\det(Q) = \pm 1$ であることを示せ. ただし, $\det(Q)$ は Q の行列式とする.

(3) S を実交代行列とするとき, S の固有値は 0 または純虚数であることを示せ.

(筑波大 2010) (m20101302)

0.205 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \geq 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\, dt$ を求めよ.

(2) $\log t = \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du \quad (t \geq 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log \frac{f(x+1)}{f(2)} \geq x \log x - x + 1 \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010) (m20101303)

0.206 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101304)

0.207 $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11$ のように p_n で n 番目の素数を表すとする. 次の問いに答えよ.

(1) $1 + p_1 \cdots p_n$ を割る最小の素数を p とすると,

$$p_{n+1} \leq p \leq 1 + p_1 \cdots p_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 番目の素数は $2^{2^{n-1}}$ 以下であることを帰納法で示せ.

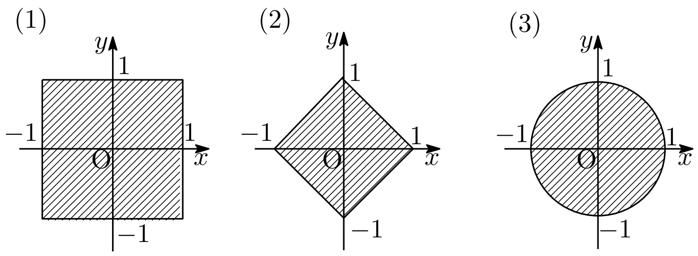
(筑波大 2010)　　(m20101305)

0.208　2 重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ の値を, 積分範囲 D が次の 3 つの場合について, それぞれ計算せよ（図を参照）.

(1) $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(2) $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ を頂点とする正方形の内部

(3) 原点を中心とする単位円の内部



(筑波大 2010)　　(m20101306)

0.209　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2-1}$ の一般解を求め, それが xy 平面上でどのような曲線群になるか調べよ. さらに, 代表的な場合（一通りとは限らない）について, そのグラフを xy 平面上に図示せよ.

(筑波大 2010)　　(m20101307)

0.210　$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$（複号同順）という関係は, 複素関数としての指数関数, 三角関数の間にも成り立つ. この関係を使って, 逆余弦関数 $\arccos z$ ($\cos^{-1} z$ と書くこともある.) を対数関数を使って表せ.

(筑波大 2010)　　(m20101308)

0.211　行列 A について以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) 前問で得た固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101309)

0.212　3 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x+y+z=0$ および $W_2 : x+y-z=0$ について以下の設問に答えよ.

(1) W_1 , W_2 に垂直な直線を l_1 , l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1 , l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1 , l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする) を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101310)

0.213 (1) 次の微分方程式を $y = \dfrac{1}{N}$ と置いて変数変換せよ. ただし, $\alpha,\ \beta$ は正の定数, $N = N(t)$ とする.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

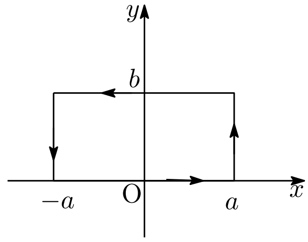
(2) 定数変化法により (1) で得られた式を解き, $N(t)$ を求めよ. ただし, $N(0) = N_0$ とする.

(筑波大 2010) (m20101311)

0.214 (1) 次の式が成り立つことを示せ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(2) 複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ を下図の四角形に沿って積分することにより, 次の定積分の値を求めよ. ただし, $a > 0,\ b > 0,\ i = \sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ibx-x^2}\,dx$$



(筑波大 2010) (m20101312)

0.215 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において, 平面 $P\ :\ x - y + z + 1 = 0$ と直線 $L\ :\ 2(x-1) = -y = -z$ を考える.

(1) 平面を張る 2 つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, 直線を張るベクトル $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

(2) 任意の点を直線 L と平行に平面 P 上へ射影する線形変換を表す行列 A を求めよ.

(3) 任意の点を平面 P と平行に直線 L 上へ射影する線形変換を表す行列 B を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101313)

0.216 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めなさい.

(筑波大 2010) (m20101314)

0.217 $f(x,y) = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}$, $x > 0$ のとき, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ を示しなさい.

(筑波大 2010) (m20101315)

0.218 実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0,\ a_1,\ a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2) $f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3) D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4) V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$\alpha_0(1) = 1\ ;\quad \alpha_0(x) = 0\ ;\quad \alpha_0(x^2) = 0\ ;$

$\alpha_1(1) = 0\ ;\quad \alpha_1(x) = 1\ ;\quad \alpha_1(x^2) = 0\ ;$

$\alpha_2(1) = 0\ ;\quad \alpha_2(x) = 0\ ;\quad \alpha_2(x^2) = 1\ ;$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を α_0 , α_1 , α_2 の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 2010) (m20101316)

0.219 送られてきた, 100 個のある機械は, その内 10 個が壊れていることが分かっている. この中からランダムに連続して 2 個取り出すとき, 2 個とも壊れている確率を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101317)

0.220 ある大学の入学試験では 4 問出題され, 3 問以上の正解が合格ラインである. この大学の入試と同程度の模試で平均して 4 問中 3 問正解している学生が合格する確率は何パーセントかを求めよ（分数による精緻解と小数点以下を四捨五入した数値解の 2 通りで答えよ）.

(筑波大 2010) (m20101318)

0.221 長方形の閉領域 $D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\}$ における次の関数 $f(x, y)$ の最大値, 最小値およびその時の x , y の値を求めなさい.

$$f(x, y) = \sin x\ \sin y\ \sin(x + y)$$

(筑波大 2010) (m20101319)

0.222 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\,dxdy\,, \quad K = \{(x, y) \,|\, y \geqq x^2,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 2010) (m20101320)

0.223 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2010) (m20101321)

0.224 次の 1 階連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

(筑波大 2011) (m20111301)

0.225　次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

必要があれば次の公式を用いてもよい．

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

(筑波大 2011)　　(m20111302)

0.226　複素数 $z=x+iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり，その実部 $u=u(x,y)$，虚部 $v=v(x,y)$ は $u(x,y)=x^3-3xy^2+x$, $v(0,0)=0$ を満たすという．以下の問いに答えよ．

(1)　$v(x,y)$ を求めよ．必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい．

(2)　$f(z)$ を求めよ．

(3)　C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ．

(筑波大 2011)　　(m20111303)

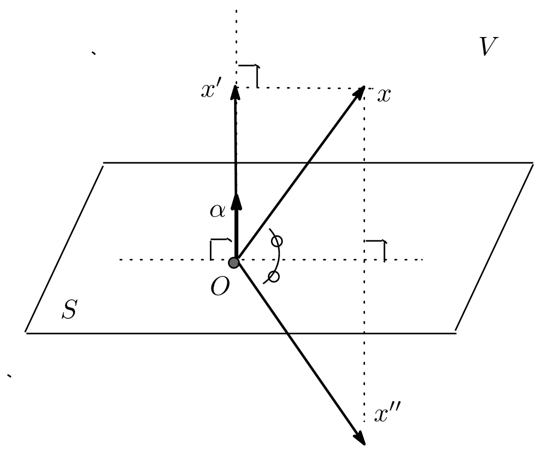
0.227　３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と表すこと．

(1)　$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2)　$\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

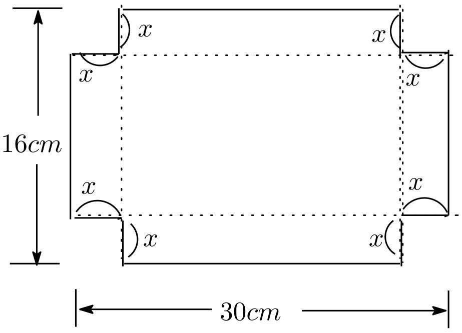
(3)　(2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

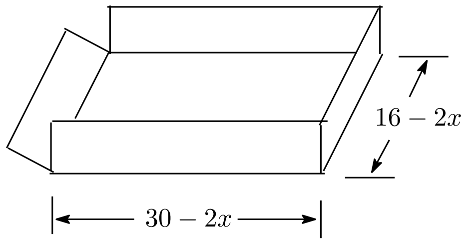
$\boldsymbol{x}''=\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ．



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.228 16cm × 30cm の段ボール紙がある．下図のように，この紙の四隅から一辺 xcm の正方形を取り除き，残りの部分を使って上に開いた箱を作りたい．この箱の容量（体積）を最大にするには x をいくらにしたらよいか答えなさい．





(筑波大 2011)　　(m20111305)

0.229 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい．

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい．

(3) n を任意に固定する．このとき $\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい．

(筑波大 2011)　　(m20111306)

0.230 次の連立一次方程式を掃き出し法によって三角行列に変形して，x_1, x_2, x_3 を求めなさい．解答に際しては，以下の各段階に対応する行列を明記しなさい．

$$\begin{cases} 10x_1 - 30x_2 + 20x_3 = 310 \\ 3x_1 - 4x_2 - 69x_3 = 43 \\ 9x_1 - 20x_2 - 82x_3 = 334 \end{cases}$$

第 1 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

第 2 段階

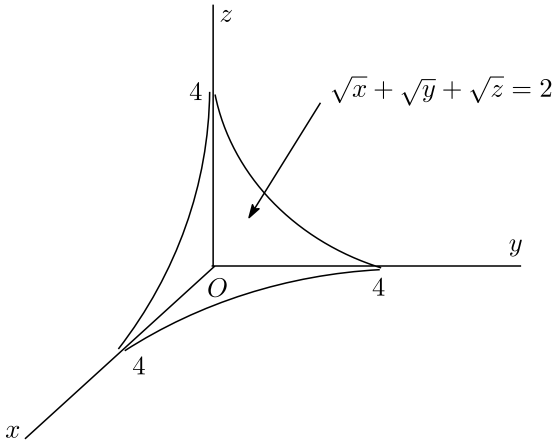
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

第 3 段階

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

(筑波大 2011)　　(m20111307)

0.231 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし，原点 O から点 A, B, C への距離を OA, OB, OC とする．このとき，$OA + OB + OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい．



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.232　次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\log_e(x^2+y^2)\,dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid 1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 5,\ x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(筑波大 2011)　　(m20111309)

0.233　ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\ .\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\y\\1\end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ.

(1)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(2)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ.

(3)　$f(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ.

(4)　$f(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111310)

0.234　実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体を V として，以下の問題に答えなさい.

(1)　以下のような $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ は V のひとつの基底であることを示しなさい.

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(2)　V から V への一次変換 A が以下を満たしているとき，基底 $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ による A の行列表現を求めなさい.

$$A(e_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A(e_2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$A(e_3)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ A(e_4)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

(3) A の固有値を全て求めなさい.

(筑波大 2011) (m20111311)

0.235 正しく作られたサイコロを用いて, "3 の倍数が出るまでサイコロを振り続ける" というゲームを行う. このとき以下の問題に答えなさい.

(1) ちょうど n 回目に 3 の倍数が出る確率を P_n と表す. このとき, 以下の極限値を求めなさい.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P_n$$

(2) 3 の倍数が出たときに 100 円もらえるとすると, このゲームによる獲得金額の期待値を求めなさい.

(3) 3 の倍数が出たときにもらえる金額を, 1 回目なら 100 円, 2 回目なら $100(1+r)$ 円, 3 回目なら $100(1+r)^2$ 円というように, サイコロを振る回数が増えるにしたがって $(1+r)$ 倍する. 但し, $r>0$ とする. このとき, このゲームによる獲得金額の期待値が有限な値になるためには, 正の数 r は, ある範囲内 $0<r<r_0$ にある必要がある. このような r_0 のうち, 最も大きな値を求めなさい.

(筑波大 2011) (m20111312)

0.236 制限時間 1 時間のテストに対して, 一人の学生がそれを解答するまでに要する時間を y とする. このとき, y は, 次の確率密度関数に従う確率変数であるとして, 以下の問題に答えなさい.

$$f(y)=\begin{cases} cy^2+y\ , & 0\leq y\leq 1 \\ 0\ , & \text{その他} \end{cases}$$

(1) c を求めなさい.

(2) 分布関数 $F(y)$ を求めなさい.

(3) $f(y)$ と $F(y)$ のグラフを描きなさい.

(4) $F(y)$ において, $F(-1), F(0), F(1)$ を求めなさい.

(5) 30 分以内に解答を終了する確率を求めなさい.

(筑波大 2011) (m20111313)

0.237 関数 $f(x)=\sin 2x$ の $x=\pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ.

(1) $(x-\pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ. ただし, ここでは剰余項は求めなくてよい.

(2) $\pi/2<x<\pi$ を満たす範囲の x に対して, 剰余項 R_5 は $|R_5|<\dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ.

ただし, (1),(2) において $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開は, 正の整数 n に対して

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_{n+1}$$

と表される. ここで, 剰余項 R_{n+1} は, $a<p<x$ である p が存在して,

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される.

(筑波大 2011) (m20111314)

0.238 領域 D を $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2 \leqq\ y \leqq\ 4x+5\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\right\}$ とする．D を図示し，

重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111315)

0.239 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限した主値を表す関数である．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ．

(2) 定義域 $-1<x<0$ および $0<x<1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111316)

0.240 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値，固有空間を求めよ．　(2) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(筑波大 2011)　　(m20111317)

0.241 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積　$(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$　$(f,g\in P_2(R))$

ノルム　$||f||=\sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ．

(2) $f(x)=1,\ g(x)=x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ．

(3) 基底 $\{1,x,x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111318)

0.242 2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T=\{X\in M(2;R)\ |\ Tr\,X=0\}$，$S=\{Y\in M(2;R)\ |\ {}^tY=Y\}$ について以下を示せ．
ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする．

(1) $ad-bc\neq 0$ のとき $X\in T$ ならば $AXA^{-1}\in T$ が成り立つ．

(2) $Y\in S$ ならば $AY\,{}^t\!A\in S$ が成り立つ．

(3) 写像 $\Phi:T\to S$ を $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\in T$ に対して $\Phi(X)=\begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める．
$ad-bc=1$ のとき任意の $X\in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1})=A\,\Phi(X)\,{}^t\!A$$

が成り立つ．

(筑波大 2011)　　(m20111319)

0.243 4 次正方行列　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を計算せよ. (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 P を求めよ.

(筑波大 2011) (m20111320)

0.244 以下の問いに答えよ.

(1) 2 次関数 $F(u,v)=au^2+2buv+cv^2+du+ev+f$ は, $a>0$ かつ $ac-b^2>0$ のときただ 1 つの点で最小値をとることを示せ.

(2) 空間の 2 直線 $l_1=\{\boldsymbol{x}_1+u\boldsymbol{a}_1 \mid u\in R\}$, $l_2=\{\boldsymbol{x}_2+v\boldsymbol{a}_2 \mid v\in R\}$ 上の点の間の距離の 2 乗 $G(u,v)=|(\boldsymbol{x}_1+u\boldsymbol{a}_1)-(\boldsymbol{x}_2+v\boldsymbol{a}_2)|^2$ を (1) の $F(u,v)$ のように表示したとき, a,b,c,d,e,f を求めよ. ただし $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{a}_2$ は定ベクトルとする.

(3) (2) において, 2 直線 l_1, l_2 が平行でないとき, 2 直線上の点の間の距離が最小になる点の組がただ 1 組あることを示せ.

(筑波大 2011) (m20111321)

0.245 a,b は正の定数とし, D を

$$D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$$

で定めるとき, 積分

$$\iint_D |(ax+by)(-bx+ay)|e^{-(ax+by)^2}dxdy$$

を次のようにして求めよ.

(1) 次の変数変換のヤコビアンを計算せよ.

$$\begin{cases} u=ax+by, \\ v=-bx+ay \end{cases}$$

(2) 上の変数変換を用いて積分を計算せよ.

(筑波大 2011) (m20111322)

0.246 X,Y,Z を集合とする. 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ と合成写像 $g\circ f:X\to Z$ について, 以下を示せ.

(1) $g\circ f$ が単射ならば f は単射である.

(2) $g\circ f$ が全射ならば g は全射である.

(3) Y の部分集合 W に対し, W の f による逆像 $f^{-1}(W)$ を

$$f^{-1}(W)=\{x\in X \mid f(x)\in W\}$$

と定める. Y の任意の部分集合 A,B について $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ が成り立つ.

(筑波大 2011) (m20111323)

0.247 微分方程式

$y'=\dfrac{1}{x}y+xy^2$ の解を求めよ. ただし, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする.

(筑波大 2012) (m20121301)

0.248 3次元幾何ベクトル空間において,

平面 A :　$x+y+mz-1=0$

平面 B :　$x+my+z-3=0$

平面 C :　$mx+y+z-2m=0$

を考える．ただし，m は実定数とする．

(1) 3平面が一点でのみ交わる条件を求めよ．

$m=0$ のとき，以下の (2) から (5) の問いに答えよ．

(2) 平面 A, 平面 B, 平面 C の交点を求めよ．

(3) 平面 A と平面 B の交線 L と平行なベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を求めよ．

(4) 平面 C を張る2つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ．

(5) 3次元空間中の任意の点を交線 L と平行に平面 C 上へ射影する線形変換を表す行列 Q を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121302)

0.249 実関数

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 逆関数が存在することを示せ．

(2) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．導出過程も示せ．

(3) 逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ．導出過程も示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121303)

0.250 複素関数の閉曲線 C に沿っての積分

$$I=\int_C \frac{e^z}{2z-5}\,dz$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲線 C が $|z|=2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ．

(2) 閉曲線 C が $|z-3|=2$ の場合について I を求めよ，導出過程も示せ．

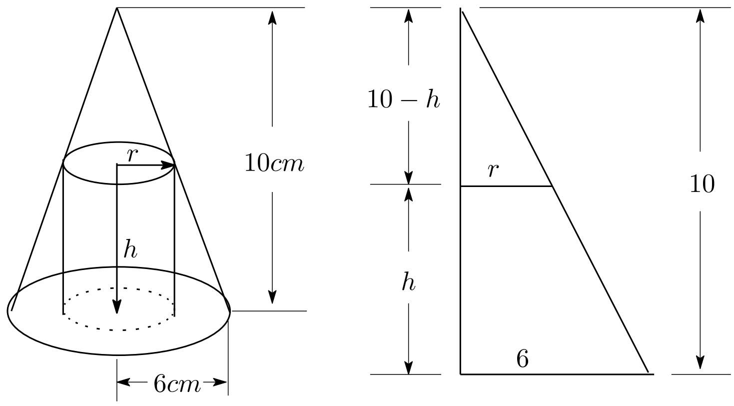
(筑波大 2012)　　(m20121304)

0.251 次の関数の極値を求めよ．

$$f(x,y)=2x^2+xy+y^2-2x+3y-1$$

(筑波大 2012)　　(m20121305)

0.252 下図のように半径 $6cm$, 高さ $10cm$ の円錐の中に内接する円柱がある．この円柱の体積が最大になるときの半径 r と高さ h を求めよ．



(筑波大 2012)　　(m20121306)

0.253　E を単位行列とするとき, 次の実交代行列 A に対して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

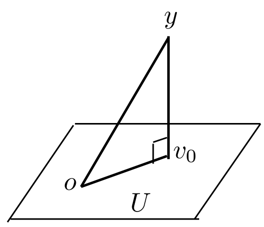
(1)　$E + A$ の逆行列を求めよ.

(2)　上の結果を利用して，$P = (E - A)(E + A)^{-1}$ を求めよ.

(3)　P は直交行列であることを示せ.

(筑波大 2012)　　(m20121307)

0.254　U をベクトル $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, 1)$ と $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 2, 0)$ が張る線形部分空間とする．そのとき，点 $\boldsymbol{y} = (10, 20, 2)$ から最も近い U 上の点 $\boldsymbol{v}_0$ を求めよ.



(筑波大 2012)　　(m20121308)

0.255　同時確率密度関数

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(x - y) & 0 \leq y < x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

(1)　X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.

(2)　X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(3)　X, Y の分散 $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121309)

0.256　方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = m\pi(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$ であることから，多項式

$$g_n(x) = Cx\left[\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\right]\left[\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\right]\cdots\left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right)\right]$$

は，定数 C を適切に選べば $x = 0$ のまわりで $\sin x$ の良い近似であることがわかっている.
ここで，n は正の大きな整数である．この多項式と $x = 0$ のまわりでのベキ級数展開
$\sin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ を比較する．ここで，$a_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である.

(1) $\sin x$ のベキ級数展開の 3 次の項まで，すなわち a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 1 次の項の係数が一致するように C の値を決めよ

(3) 多項式 $g_n(x)$ と (1) で求めたベキ級数展開との 3 次の項の係数は $n \to \infty$ の極限で一致する．このことを使って，無限級数 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ の和 S を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121310)

0.257 領域 $K = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq c\right\}$ とする．3 重積分

$$I = \iiint_K y^2 z^2 \, dxdydz$$

を求めよ．ここで，a, b, c は正の定数である．

(筑波大 2012)　　(m20121311)

0.258 2 次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 12 = 0$ と表すことにする．

ここで，$A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ ，${}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，${}^t\boldsymbol{x} = (x \quad y)$

である．この 2 次曲線について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $a_1,\ a_2\ (a_1 < a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とする．
${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ．

(3) 前問で作った P を使って座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ ，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと，この 2 次曲線は
${}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}' + 2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}' - 12 = 0$ と書ける．この式を $x',\ y'$ を使って表せ．

(4) さらに，座標の平行移動 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{c}$ を行って，この 2 次曲線を標準形で表せ．
ここで，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である．$c_1,\ c_2$ の値も答えよ．

(5) XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け．さらに，その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ．

(筑波大 2012)　　(m20121312)

0.259 (1) 関数 $y = \sin^2 x$ のグラフを (x, y) 平面上に描きなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か．定義を述べなさい．

(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である．この面積を km^2 の単位で表しなさい．

(筑波大 2012)　　(m20121313)

0.260 確率変数 X は $1, 2, 3$ のいずれかの整数値をとる．また，X が整数 x をとる確率 $P(X = x)$ が次式で与えられるものとする $(x = 1, 2, 3)$．

$$P(X = x) = x/6$$

このとき，X の標準偏差を求めなさい．

(筑波大 2012)　　(m20121314)

0.261 (1) 2 つの複素数 $z_1 = a + bi$ および $z_2 = c + di$ を考える（a, b, c, d は実数であり, i は虚数単位である）. いま, 新たな複素数 z を $z = z_1 z_2$ で定義する. このとき, $|z| = |z_1||z_2|$ であることを示しなさい.

(2) 前小問 (1) で述べた状況で, z の偏角が, z_1 の偏角と z_2 の偏角の和に等しいことを示しなさい. ただし, $a, c, ac - bd$ がいずれも 0 でないとする.

(筑波大 2012) (m20121315)

0.262 3 次元ユークリッド空間の 3 つのベクトル :

$$\boldsymbol{a} = (1, 2, -1) \qquad \boldsymbol{b} = (2, 3, 5) \qquad \boldsymbol{c} = (-1, 0, 2)$$

によって張られる平行六面体の体積を求めなさい.

(筑波大 2012) (m20121316)

0.263 関数 $x(t)$ に関する以下の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2 \quad \text{ただし } x(0) = 0 \text{ とする.}$$

(筑波大 2012) (m20121317)

0.264 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{3(x + y)}{xy}$ の極値を求めよ. （ ただし, $x \neq 0,\ y \neq 0.$ ）

(筑波大 2012) (m20121318)

0.265 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ （n は自然数）について以下の問いに答えよ.

(1) $\log(n + 1) < S_n \leq 1 + \log n$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$ を示せ.

(筑波大 2012) (m20121319)

0.266 すべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対し, 第 (i, j) 成分が第 (j, i) 成分に等しい n 次正方行列を n 次対称行列とよぶ. 行列 M の転置行列を M^T, また n 次正方行列全体からなる線形空間を $\mathcal{M}^{n\times n}$ で表すものとして, 以下の (1)〜(4) を示せ.

(1) 任意の $m\times\ n$ 行列 A に対して $A^T A$ は n 次対称行列である.

(2) 任意の n 次正方行列 B に対して $B^T + B$ は対称行列である.

(3) 任意の n 次対称行列 C に対し, $C = B^T + B$ を満たす行列 B が存在する.

(4) n 次対称行列全体の集合は, $\mathcal{M}^{n\times n}$ の部分空間である.

(筑波大 2012) (m20121320)

0.267 次の式が成立する自然数 n の値を求めなさい.

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2$$

(筑波大 2012) (m20121321)

0.268 (1) s と t は実数とする. $x + y = s,\ xy = t$ という関係式が成立するとき, x と y が実数となるための条件を, s と t を用いて表しなさい.

(2) 実数 x, y が $0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1$ を満たして変化するとき, 点 $(x + y, xy)$ の示す領域を求め, 図示しなさい.

(筑波大 2012) (m20121322)

0.269 自然数 n について，$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0$ とする．このとき，次の (1) から (3) の示す不等式が成立することを証明しなさい．

(1) $0<a_1 \leqq 1$ かつ $a_2 \geqq 1$ ならば $a_1+a_2 \geqq a_1a_2+1$

(2) $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=1$ ならば $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n$

(3) $\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$

(筑波大 2012)　　(m20121323)

0.270 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ と 3 次実正方行列 A を

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}a-b & a & b\\ -a+b & -a+c & -b+c\\ a-b & a-c & b-c\end{pmatrix}$$

により与える．ここに，a,b,c は実数とする．

(1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ と異なり，a,b,c によらない 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{w}$ で，a,b,c の値にかかわらず $A\boldsymbol{w}=0$ を満たすものを 1 つ求めよ．

(2) いま求めたベクトル $\boldsymbol{w}$ に対し，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の一組の基底をなすことを示せ．また，$A\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}$ のそれぞれを，これら 3 つのベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) a,b,c によらない正則行列 P で $P^{-1}AP$ を上三角行列にするものが存在することを，具体的に P を与え $P^{-1}AP$ を求めることにより示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121324)

0.271 区間 (a,b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t),\ 1\le i,\ j\le 3,$ を $(i,j)-$成分とする 3 次正方行列を $A(t)=(a_{ij}(t))$ とする．

(1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ．

$$|A(t)|'=\begin{vmatrix}a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t)\\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t)\\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t)\\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t)\\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t)\end{vmatrix}$$

(2) $A(t)$ が正則であるとき，上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより，

$$|A(t)|'=\mathrm{Tr}\left(A'(t)A(t)^{-1}\right)|A(t)|$$

が成り立つことを示せ．ここで $A'(t)=\left(a'_{ij}(t)\right)$ であり，Tr はトレースを表す．

(筑波大 2012)　　(m20121325)

0.272 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121326)

0.273 領域 D を

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0<x+y+z<1,\ x,y,z>0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I=\iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ．

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ uv &= y + z \\ uvw &= z \end{aligned}$$

により，D が領域 $E = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u, v, w < 1\right\}$ に写されることを示せ．

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ を求めよ．

(3) I の値を求めよ．

(筑波大 2012) (m20121327)

0.274 $\mathbb{R}$ の部分集合 A の上限，下限をそれぞれ $\sup A$, $\inf A$ で表す．このとき，以下を示せ．

(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup A = -\inf(-A)$$

が成り立つ．ただし，$-A = \{-a \,|\, a \in A\}$ とする．

(2) $A, B \subset \mathbb{R}$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

が成り立つ．ただし，$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(3) $A, B \subset [0, \infty)$ がともに上に有界でかつ空でないとすると，

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B)$$

が成り立つ．ただし，$AB = \{ab \,|\, a \in A,\ b \in B\}$ とする．

(筑波大 2012) (m20121328)

0.275 m を自然数とし，E_m を m 次の単位行列，$1_m = {}^t(1, 1, \cdots, 1)$，$e_1 = {}^t(1, 0, \cdots, 0)$ をそれぞれ m 項縦ベクトルとする．このとき，次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $E_m + 1_m\, {}^t1_m$

(2) $E_m + e_1\, {}^t1_m$

(筑波大 2013) (m20131301)

0.276 V を複素ベクトル空間，ϕ を V の線形変換とし，$a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$V_a = \left\{ v \in V \,\middle|\, \phi(v) = av \right\}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V_a が部分空間であることを示せ．

(2) a, b, c がすべて互いに異なるなら，

$$(V_a + V_b) \cap V_c = \{0\}$$

となることを示せ．ここで，$V_a + V_b$ は $\left\{ v + u \,\middle|\, v \in V_a\,,\ u \in V_b \right\}$ を表す．

(筑波大 2013) (m20131302)

0.277 積分を利用して，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(筑波大 2013)　　　(m20131303)

0.278 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1-x)^n\cosh x\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　　(m20131304)

0.279 自然数から自然数への写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ に対して，集合 X_n，A_n $(n\in\mathbb{N})$ を

$$X_n=\left\{f(k)\,\middle|\,k\geq n\right\}$$

$$A_n=\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,f(k)=f(n)\right\}$$

で定める．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n\neq\emptyset$ である必要十分条件は，ある $n\in\mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである．

(2) $\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,X_n\neq X_{n+1}\right\}$ が有限集合である必要十分条件は，$\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,A_n\text{が有限集合}\right\}$ が有限集合となることである．

(筑波大 2013)　　　(m20131305)

0.280 関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．極値の極大，極小についても調べよ．

(2) 次の積分領域 D_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$D_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leq a^2\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\right\}$$

(3) 次の積分領域 E_a における関数 $f(x,y)$ の 2 重積分 $\displaystyle\iint_{E_a} f(x,y)dxdy$ の $a\to\infty$ における極限値を求めたい．その導出過程を (2) の結果等と図を用いて説明し，極限値を示せ．

$$E_a=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq a\,,\ o\leq y\leq a\right\}$$

(4) (3) の結果を用いて次の積分値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

(筑波大 2013)　　(m20131306)

0.281 A を正方行列, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(n \geq 2)$ を A の固有値, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 一般に，k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ が線形独立で，$k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{a}_{k+1}$ が線形従属ならば，$\boldsymbol{a}_{k+1}$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_k$ の線形結合であることを示せ.

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立であることを示せ.

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なるとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを，数学的帰納法によって証明せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131307)

0.282 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ 　(ただし，$(x,y) \neq (0,0)$) と定義する．ここで，$\log$ は自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\right\}$ として求めたい． $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon = \left\{(x,y) \,\middle|\, \varepsilon^2 < x^2+y^2 \leq 1\,,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.283 以下でベクトルは位置ベクトルとし，3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x,y,z) とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とを同一視する．特に原点 $(0,0,0)$ はゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ と同一視する．また，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$A\boldsymbol{x}$ と表せる点全体の集合を H とする．つまり $H = \left\{A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\right\}$ である,

(1) H は平面となる．その平面の方程式を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ を示しなさい.

(3) 次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい.

追記： ただし，B はゼロ行列ではないとする.

(a) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{y} \in H$ に対し，$B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する.
（注：ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.）

(b) $\boldsymbol{y} \in H$ に対し，$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である.

(c) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ なら $B\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{z}$ である.

(4) A と前問の B に対し，行列 $A+B$ は正則であること（逆行列を持つこと）を示しなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131309)

0.284 複素数 z についての方程式 $\sin z = 3i$ を考える．i は虚数単位である．以下の問いに答えよ.

(1) $\omega = e^{iz}$ とする．$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ の関係を使い，この方程式を ω に関する 2 次方程式に書き換えよ.

(2) (1) で求めた ω に関する 2 次方程式を解き，その解を極表示 $re^{i\theta}$ の形で表せ.

(3) $\sin z = 3i$ の解を $x + iy$ $(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131310)

0.285 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n - z_n \qquad\qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき, A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $x_0 = -5$, $y_0 = 10$, $z_0 = 5$ のとき, x_n, y_n, z_n を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131311)

0.286 x, y, z に関する連立 1 次方程式について, 以下の問いに答えよ. a は定数である.

$$\begin{cases} ax + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ \ x + ay + \ \ z = 1 \\ \ \ x + \ \ y + az = 1 \end{cases}$$

(1) 解をもつために定数 a が満たすべき条件を求めよ.

(2) そのときの解を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131312)

0.287 V を有限次元の実ベクトル空間であるとする. V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき, W は V の部分空間と呼ばれる.

i. $v_1,\ v_2 \in W$ ならば $v_1 + v_2 \in W$,

ii. $v \in W,\ c \in R$ ならば $cv \in W$.

(1) 次の集合 W_1, W_2 が R^4 の部分空間かどうか理由とともに述べよ.

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1x_2 = x_3x_4 \right\}$

(b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 \right\}$

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合 M は, 通常の行列の和と行列のスカラー倍に関して実ベクトル空間となる. M の（M 自分以外）部分空間の例を 1 つあげ, それが部分空間になっている理由を述べよ.

(筑波大 2013)　　(m20131313)

0.288 次の実正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ．ただし，途中の計算過程も示すこと．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) $p_n=a^n+b^n+c^n+d^n$ とおくとき，$4\times\ 4$ の行列 $B=\Big[p_{i+j-2}\Big]_{1\leq i,\ j\leq 4}$ の行列式を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131314)

0.289 実変数 x,y,z が $x^2+2y^2+3z^2=6$ を満たすとき $f(x,y,z)=xyz$ の最大値と最小値を求め，その時の x,y,z の値を示せ．

(筑波大 2013)　　(m20131315)

0.290 領域 $D=\{(x,y):0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\}$ において，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^2e^{-y}dxdy$$

(筑波大 2013)　　(m20131316)

0.291 定員 11 名のエレベータがある．このエレベータは，総重量が制限荷重の 748kg を超えるとブザーが鳴って動かなくなる．平均 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu,\sigma^2)$ という記号で表すと，男性の体重 (kg) は $N(65,99)$，女性の体重は $N(55,88)$ に従うという．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，乗り合わせる人の体重は互いに独立とする．

(1) エレベータに男性 n_1 人，女性 n_2 人乗るとすると，計 (n_1+n_2) 人の体重の合計 X が従う分布を記号で表せ．

(2) 男性 11 人が乗ったときにブザーが鳴る確率 $P(X>748)$ を求めよ．

(3) 男女計 12 人が乗っても，そのときにブザーが鳴る確率が 1/2 未満になるような女性の人数 n_2 の最小値を求めよ．

注) Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，Z がある範囲にある確率は以下の通りである．

$P(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915\,,\ P(0\leq Z\leq 1)=0.3413\,,\ P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$

$P(0\leq Z\leq 2)=0.4772\,,\ P(0\leq Z\leq 2.5)=0.4938\,,\ P(0\leq Z\leq 3)=0.4987$

(筑波大 2013)　　(m20131317)

0.292 N 人のグループで意見が集約される過程を考える．グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする．各時刻 t から $t+1$ にかけて $(t=1,2,\cdots)$，構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする．この時，意見 A を持つ人の人数 i は，$i=1,2,\cdots,N-1$ の時，確率 $\alpha\ (>0)$ で $i+1$ 人に増え，確率 $\beta\ (>0)$ で $i-1$ 人に減り，確率 $1-\alpha-\beta\ (\geq 0)$ で i 人のままだとする．また，全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら $(i=N$ か $i=0)$，それ以降は意見変更は起こらないとする．以下の問いに答えよ．

(1) $N=3\,,\ \alpha=1/2\,,\ \beta=1/2$ のケースを考える．「時刻 $t=1$ で $i=2$ のとき，時刻 $t=6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ．

(2) 「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき，時刻 $t\to\infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i,t)$ と書くこととする．$N=3\,,\ \alpha=1/2\,,\ \beta=1/2$ のとき，$x(2,1)$ を求めよ．

(3) 任意の $N,\ i,\ \alpha,\ \beta$ に関して $x(i,1)$ は $x(i,2)$ と等しくなる．理由を述べよ．

(4) 上記の問題文の下線部に注意し，$x(i,1)$ を，$x(i,2)$, $x(i+1,2)$, $x(i-1,2)$, α, β のすべてを用いた式で表せ.

(5) $x(i,1)=x(i,2)=x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,N)$ とおき，x_i についての漸化式により x_1 を求めよ.

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.293 任意の実数 x について $y=\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ の値を，$\tan^{-1}(x)$ の微分を用いて求めなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131319)

0.294 $F(x,y)=x^3-3xy+2y^2-4y=0$ を満たす関数 $y=f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $y=f(x)$ の 1 次導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて，$y=f(x)$ の極値を求めなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131320)

0.295 $n\times\ n$ 行列 A は各行に 1 と -1 である要素がひとつずつあり，残りの要素は全て 0 であるとする．ただし，$n\geq 3$ とする.

(1) A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ と表す．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ は線形従属であることを示せ.

(2) A の任意の $2\times\ 2$ 部分正方行列の行列式が取り得る値をすべて求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141301)

0.296 $\boldsymbol{R}^3=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\ \middle|\ x,y,z\in\boldsymbol{R}\right\}$ とし，線形変換 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}8\\2\\-2\end{bmatrix}$,

$f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix}$,　$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\0\\6\end{bmatrix}$ を満たすとする.

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ.

(2) ある実数 $\lambda(\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}||=1$ を満たすベクトルをすべて求めよ.

(3) 整数 $n(>0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$, $f^n(\boldsymbol{x})=f\big(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\big)$ で帰納的に定義する. f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ.

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.297 偏微分可能な $f(x,y)$ が $f(cx,cy)=c^nf(x,y)$ を満たしているとする．この時，$x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いずに示せ.

(筑波大 2014)　　(m20141303)

0.298 $\displaystyle\int\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$ を求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141304)

0.299 ある製品の不良率を p とする.

(1) $p=0,01$ である時，100 個の製品の中の不良品が 1 個以内である確率を，2 項分布を用いて求めよ．（$0.99^{99}\approx 0.37$ とする．）

(2) p について全く見当がつかない時，確率 0.95 で不良率の推定の誤差を 0.02 以下にしたい場合を考える．　この時，標本の大きさを最も大きくする p の推定値 $\hat{p}$ はいくらか．また，その時の標本の大きさ n を求めよ．ここで，$\hat{p}$ は正規分布に従うと仮定する．（添付の正規分布表を利用すること．）

(筑波大 2014)　　(m20141305)

0.300 さいころを振って出た目の数だけマスを進む「すごろく」を考える．　後戻りや，さいころの出た目の数をこえて進むことはないものとする．　すごろくは振り出しの隣から，マスに $1, 2, \cdots$ と番号付けがされており，その順ににマスを進んでいく．

(1) さいころを 1 回振ったときに進めるマスの数の期待値を求めよ．

(2) 振り出しから始めて，さいころを何回か振った後に，マス n に止まる確率を $n = 1, 2, 3, 4$ のそれぞれの場合において求めよ．

(3) 振り出しから始めて，さいころを何回か振った後に，マス $n (1 \leq n \leq 6)$ に止まる確率を ${}_pC_q$ を用いて表し，その理由を説明せよ．ただし，${}_pC_q$ は p 個の要素の中から q 個の要素を取り出す組合せ数を表す．

(筑波大 2014)　　(m20141306)

0.301 複素関数 $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ （z の実部）の微分可能性を定義に基づいて調べよ．

(筑波大 2014)　　(m20141307)

0.302 3 次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし，f を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1$，$f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2$，$f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(4) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

0.303 逆正接関数 $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおき，$x = \tan y$ とすることで，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の関数として求めよ．

(2) $(1 + x^2) f'(x) = 1$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式 $(1 + x^2) f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0$ が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $f^{(n)}(0)$ に関する漸化式を解き，m を 0 以上の整数として $f^{(2m)}(0)$ および $f^{(2m+1)}(0)$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141309)

0.304 半径 a の球体の領域 $D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ．r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.305 行列 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) (2) で求めた $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を使って行列 P を $P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくとき，その逆行列 P^{-1} は P の転置行列 ${}^tP$ で与えられる．これは P がどのような行列であることによる性質か．また，P^{-1} および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け．

(4) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t)=-A\boldsymbol{r}(t)$ を考える．ここで，$\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ である．

$\begin{pmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\\q_3(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ とおくとき，$q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)$ が満たす微分方程式をそれぞれ求めよ．さらに，その一般解を求めよ．

(5) 初期条件が $\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\dot{x}(0)\\\dot{y}(0)\\\dot{z}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ と与えられたとき，$x(t),y(t),z(t)$ を求めよ．ここで，$\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$，$\dot{y}(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$，$\dot{z}(t)=\dfrac{dz(t)}{dt}$ である．

(筑波大 2014)　　(m20141311)

0.306 $(n+1)$ 次実正方行列

$$A=\begin{pmatrix}c&1&1&\cdots&1\\1&c&1&\cdots&1\\1&1&c&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&c\end{pmatrix}$$

に対し，連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$$

が解を持つための必要十分条件は，$c=1$ または $c=-n$ となることである．このことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141312)

0.307 $f : V \to V$ を実ベクトル空間 V の間の線形写像，α を f の実固有値，V_α を α に関する f の固有空間とする．V の部分空間 W_1, W_2 が次の 2 条件を満たすとする:

(a) $V = W_1 \oplus W_2$

(b) $f(W_1) \subseteq W_1\,,\quad f(W_2) \subseteq W_2$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $V_\alpha = (V_\alpha \cap W_1) \oplus (V_\alpha \cap W_2)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\dim V_\alpha = 1$ ならば，V_α は W_1 または W_2 の部分空間であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141313)

0.308 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，曲面 $z = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ と平面 $z = 1$ によって囲まれた図形の体積を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141314)

0.309 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

で定義する．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の，$-1 \leq x \leq 1$ におけるグラフを描け．

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$g(x) \leq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$g\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{n}{2^n}$ を示せ．

(5) 関数 $g(x)$ は $x = 0$ において微分不可能であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.310 $f : X \to X$ を集合 X 上の写像とし，写像 $f^n : X \to X$ を，$n \geq 1$ のとき $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$，$f^0 = \mathrm{id}_X$（=X 上の恒等写像）で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(2) f が単射ならば，$f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.311 次の極限値を求めなさい．ただし，$a > 0,\ b > 0$ とする．

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(筑波大 2014)　　(m20141317)

0.312 次の二重積分を求めなさい．ただし，$a>0$ とする．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ , \quad D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\ ,\ xy\geq 0\right\}$$

(筑波大 2014)　　(m20141318)

0.313 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\quad (a,b,c\in\boldsymbol{R})$$

とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が生成するベクトル空間の基底を一組求めなさい．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ が生成するベクトル空間の次元が 3 となる a,b,c の条件を求めなさい．

(3) $A=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_4)$ を用いて，1 次写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を

$$f(x)=Ax\quad (x\in\boldsymbol{R}^3)$$

によって定める，f の核を求めなさい．

(筑波大 2014)　　(m20141319)

0.314 $A=aE_m+bl_m\,{}^tl_m$ とおく．ただし，$a,b>0,\ E_m$ は m 次単位行列,

$$l_m=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\qquad (m\ \text{次列ベクトル})$$

とし，${}^tl_m$ は l_m の転置とする．

(1) A^2 の固有値をすべて求めよ．

(2) A^2 の逆行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151301)

0.315 実ベクトル空間 V と線形写像 $F:V\to V$ を考える．

(1) $B=\{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B'=\{v_1-v_2,\ v_1+v_2\}$ も基底であることを証明せよ．

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ．

(3) $\dim V=2$ とし，$v_1,\ v_2$ を F の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする．

(a) $v_1,\ v_2$ は一次独立であることを示せ．

(b) n を自然数とし，F^n を F を n 回合成した写像とする．F^n の $B'=\{v_1-v_2,\ v_1+v_2\}$ に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.316 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C:x^3-3xy+y^3=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) C の特異点をすべて求めよ．

(2) C 上の点 (x,y) に関する xy の極値をすべて求めよ．

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおき，C の極方程式を求めよ．

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ．
(ヒント：極方程式を用いて，$t = \tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.317 $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty < x < \infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x}\phi(x)dx$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \int_{-\infty}^{y} \phi(x)dx\right) e^{\mu y - \frac{\mu^2}{2}} dy$ を求めよ．ただし，$\mu > 0$ とする．

(筑波大 2015)　　(m20151304)

0.318 実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは，標準的な論理式で書くと

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}\ \big(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqq\ n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\big) \qquad (*)$$

が成り立つということである．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを，$(*)$ にならって理論式で書け．

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け．ただし，その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない．

(3) (2) の内容から，ある正の実数 ε が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ．

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ．また，実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ．

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに，実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら，f は連続であることを証明せよ．

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.319 2 変数関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x, y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x, y) = (0, 0)$ を中心とする $f(x, y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x, y) = (1, 1)$ を中心とする $f(x, y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z = f(x, y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1, 1, f(1, 1))$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.320 2 変数関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy,\ \ D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ を求めたい．そこで，$D_a = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq o,\ y \geq 0\right\}$，$a > 0$ として，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} f(x,y)dxdy$ を極座標 $r,\ \theta$ を用いて計算することにより，I の値を求めよ．

(2) (7) の結果を用いて積分 $J = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2 dt}$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151307)

0.321 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ $(a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数$)$ の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g,h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ $(g, h \in V)$ を導入する．以下の問いに答えよ．

(1) 3 つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して正規直交基底を作れ．

(2) 線形変換 $F : f(x) \mapsto f(x+c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで，c は実定数である．

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.322 連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) - y(t) + 2z(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 3y(t)$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

を初期条件 $x(0) = 4,\ y(0) = 4,\ z(0) = 1$ の下で解け．

(筑波大 2015)　　(m20151309)

0.323 $x^2 + 3y^2 = 3$ で与えられる楕円 E について，以下の問いに答えよ．計算過程も示せ．

(1) $(x,y) \in R^2$ が楕円 E 上を動くとき，実関数 $f(x,y) = xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ．

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2 + 3y^2 \leq 3)$ で $0 \leq y \leq x$ を満たす領域の面積を求めよ．

(3) x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面を考える．この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする．このとき $z = x + iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5} e^{-z} dz$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151310)

0.324 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x) = A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1,\ \cdots,\ c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{x},\ c_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n) \end{bmatrix}$$ で与えられることを示せ．

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ．

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること $(|\lambda| = 1)$ を示せ．

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.325 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)〜(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい．

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.326 正方行列 A に対して $\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトル，λ を対応する固有値とする．次の命題を証明しなさい．

(1) 各 $k=1,2,\cdots$ について，$A^k\mathbf{x}\neq 0$ のとき $A^k\boldsymbol{x}$ は A の固有ベクトルである．

(2) 行列 A が正則なら $\dfrac{1}{\lambda}$ は A の逆行列の固有値である．

(筑波大 2015)　　(m20151313)

0.327 下の関数 f が $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを，理由を示して答えなさい．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+y^2}{y} & (y\neq 0)\\ 0 & (y=0)\end{cases}$$

(筑波大 2015)　　(m20151314)

0.328 $D=\{(x,y)\mid 0\leq 2x+y\leq 1,\ -1\leq x-2y\leq 0\}$ 上の二重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $u=2x+y,\ v=x-2y$ と変数変換をしたとき，変数 (u,v) の D に対応する積分領域を示しなさい．

(2) 上記の変数変換の逆変換 $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ を示しなさい．

(3) $x=\varphi(u,v),\ \psi(u,v)$ のヤコビアンを求めなさい．

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151315)

0.329 確率変数 X と Y の同時確率分布 $P[X=x,\ Y=y]$ $(x=0,1,2;\ y=0,1,2,3)$ が下の表のように与えられている．ただし，c は実数である．

$x\setminus y$	0	1	2	3
0	c	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 定数 c の値を示しなさい.

(2) $X > y$ となる確率 $P[X > Y]$ を求めなさい.

(3) 確率変数 X と Y が独立であることの定義を記述し，表に与えられた X と Y が独立であるかどうかを判定しなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151316)

0.330 以下の問いに答えなさい（添付の二つの数表を適宜使用すること）.

(1) 製品 A の重量は，平均が $60.0(g)$，標準偏差は $8.0(g)$ の正規分布に従うと考えられている．ある工場の製品 A を 100 個無作為抽出して調べたところ，標本平均は $62.0(g)$ であった．この工場の製品 A の平均重量は，製品 A の平均重量と同じであるといえるか．有意水準 5% で検定しなさい.

(2) 重量が正規分布に従うと考えられる製品 B の集団から，9 個を無作為抽出してその重量を測定したところ，抽出した 9 個の標本平均は $67.9(g)$，偏差平方和は $72.0(g^2)$ であった．製品 B の平均重量が $66.0(g)$ であるという仮説を有意水準 5% で検定しなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151317)

0.331 曲面 $x^2 = y(2+3x+z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151318)

0.332 次の 2 重積分を求めなさい.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 2x\}$$

(筑波大 2015)　　(m20151319)

0.333 未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して設問 (1)〜(4) に答えなさい.

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad H(y) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ただし，a, b, c はいずれも 0 でないものとする.

(1) $G(x)$ と $H(y)$ の行列式 $|G(x)|$ と $|H(y)|$ をそれぞれ求めなさい.

(2) $|G(x)| = |H(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

(3) $|G(x)|$ と $|H(y)|$ を使って $F(x,y)$ の行列式 $|F(x,y)|$ を表しなさい.

(4) $|G(x)| \neq |H(y)|$ のとき，$|F(x,y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151320)

0.334 n 次正方行列 A と B の交換子 $[A,B]$ を $AB - BA$ と定義する．次を示せ.
ただし O は零行列を表すものとする.

(1) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = O$

(2) A と B が交代行列ならば，$[A,B]$ も交代行列である.

(3) A と $[A,B]$ が可換ならば，任意の正整数 n に対して $[A^n, B] = n[A,B]A^{n-1}$ である.

(筑波大 2016)　　(m20161301)

0.335 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

とする．V は $1, x, x^2, x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．
さて，線形変換 $T\ :\ V \to V$ を

$$(T_p)(x) = (1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x) - 2x\frac{dp}{dx}(x) + 12p(x)\ ,\quad p \in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}\,T$ を求めよ．

(3) $\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.336 n は 1 以上の整数とする．2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2}{y} + n\log y \qquad (-\infty < x < \infty,\ y > 0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{i=1}^{n}(i-x)^2 = n(\mu - x)^2 + n\delta$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu = \dfrac{n+1}{2}$，$\delta = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2}{n}$ である．

(2) $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161303)

0.337 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D ye^{xy}dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq\ x \leqq\ 1,\ 0 \leqq\ y \leqq\ 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy\ ,\qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$

(筑波大 2016)　　(m20161304)

0.338 f を実数全体で定義された実数値関数とする．

(1) 「f は至るところ連続ある」という定義を述べよ．

(2) 「f は一様連続ある」という定義を述べよ．

(3) 関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ．

(4) 関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ．

(筑波大 2016)　　(m20161305)

0.339 関数 $f(x)$ が，$X = a$ の近傍で C^2 級の関数であり，$f''(a) \neq 0$ を満たすとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(a+h)$ に，Taylor の定理を適用して展開しなさい．条件下において，できるだけ高い次数の項まで展開すること．また，剰余項の表記には θ_1 $(0 < \theta_1 < 1)$ を用いること．

(2) $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$ において，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{2}$ となることを示しなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161306)

0.340 曲線 $A : y = x \cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 A，x 軸 $(y = 0)$，そして $x = a$ $(a < 0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to -\infty} S(a)$ の値を求めなさい．

(筑波大 2016)　　(m20161307)

0.341 ベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ は線形独立であるとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ で張られる空間の直交基底 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ を求めなさい．

(2) 次の連立一次方程式が解を持つための条件を示し，その条件を満たすときの解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．ここで，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ は (1) で求めた直交基底であり，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ および $\boldsymbol{x}$ は全て列ベクトルとする．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

(筑波大 2016)　　(m20161308)

0.342 $\mathbb{R}^3$ を 3 次元実ベクトル空間とし，次の 2 つの基底（横ベクトル表示）を考える．

$$E = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$$

$$S = \{s_1 = (1,0,1),\ s_2 = (2,1,2),\ s_3 = (1,2,2)\}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 基底 S から基底 E へ変換する行列 P を求めよ．

(2) $[\boldsymbol{v}]_E$ および $[\boldsymbol{v}]_S$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 E および S による横ベクトル表示とする．
$[\boldsymbol{v}]_E = (1,3,5)$ であるとき，$[\boldsymbol{v}]_S$ を求めよ．

(3) A および B を $3\times\ 3$ の行列とする．任意の $[\boldsymbol{v}]_E$ に対して $[\boldsymbol{v}']_E$ が $[\boldsymbol{v}']_E = [\boldsymbol{v}]_E A$ により決められるとき，$[\boldsymbol{v}']_S = [\boldsymbol{v}]_S B$ となる行列 B を P，P^{-1} および A を用いて表せ．

(筑波大 2016)　　(m20161309)

0.343 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の独立な固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A は対角化可能であるかどうかを示せ．もし A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161310)

0.344 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする．

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0)\ , \\ 0 & (x=0)\ . \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $n=2$ のとき，$x=0$ において f は微分可能であるかを示せ．

(2) $n=2$ のとき，$f'(x)$ は $x=0$ で連続であるかどうかを示せ．

(3) $n=3$ のとき，$f'(x)$ は $x=0$ で連続であるかどうかを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161311)

0.345 関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0,1]$ を考える．

$$x_i=\frac{i}{n} \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

で与えられる区間 $[0,1]$ の分割に対して，

$$I_k=(x_{k-1},x_k] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sup_{x\in I_k}f(x)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\inf_{x\in I_k}f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n\to\infty$ において極限を持つとき，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n,$$

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n$$

とする．$S=s$ ならば関数 f が区間 $[0,1]$ で積分可能であるといい，

$$S=s=\int_0^1 f(x)dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)=x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2) 以下の関数 f が $[0,1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{ が無理数}) \\ x & (x\text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.346 確率 p で成功し，確率 $1-p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i=1$，失敗したときに $X_i=0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 「確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2) 確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y-\mu| > \lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y-\mu| > \lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y-\mu| > \lambda\sigma) \leqq \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.347 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geqq x)$ と書くとき，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる．

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ．

(2) $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

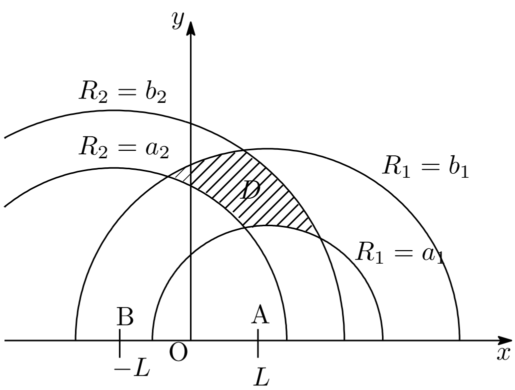
(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.348 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ.

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D ydxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ.

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ.

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.349 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j=\lambda_j\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ とする.

(3) A を $P^{-1}AP=D$（ただし，P は直交行列，D は対角行列）として対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ.

(4) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}(A+aE)^nP$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列，a は実定数，n は正の整数とする.

以下では $AB=BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える.

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ は B の固有ベクトルになることを示せ.

(6) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ.

(筑波大 2016)　　(m20161316)

0.350 次の関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ.

$$f(x)=\begin{cases} x\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & (x \neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

(1) すべての実数 x において連続となる a に関する条件を求めよ.

(2) 上記 (1) の条件のもとで，$x=0$ における微分可能性を調べよ.

(3) 上記 (2) において微分可能である場合は $f'(0)$ を求めよ．　微分可能ではないが，右側微分係数 $f'_+(0)$, 左側微分係数 $f'_-(0)$ が存在する場合は，それぞれを求めよ．ただし，存在しない場合は，“ 存在しない ” と答えること.

(筑波大 2016)　　(m20161317)

0.351 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ.

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ．

(3) 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(x,y)+ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\ z>0\ (x>0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.352 高々2次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $\{1,1+x,x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ．

(2) 任意の f, $g\in V$ に対して $(f,g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f,g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ．

① 任意の $f,g\in V$ に対して $(f,g)=(g,f)$

② 任意の $f,g,h\in V$ に対して $(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$

③ 任意の $f,g\in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$

④ 任意の $f\in V$ に対して $(f,f)\geq 0$ で，等号成立は $f(x)=0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f,g) のもとで $1,x,3x^2-2$ は直交することを示せ．さらに，$1,x,3x^2-2$ を正規化して V の正規直交基底を1組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1,L_2,L_3\}$ とする．線形空間 V から3次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1)=c_1,\ \varphi(1+x)=c_2,\ \varphi(x+x^2)=c_3$$

で定めるとき，$\{L_1,L_2,L_3\}$ と $\{c_1,c_2,c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1,c_2,c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.353 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ (x+y)^2+4(x-y)^2\leq 1\right\}$ における重積分

$I=\displaystyle\iint_D \frac{\left|x^2-y^2\right|}{(x+y)^2+4(x-y)^2}dxdy$ の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) $x+y=r\cos\theta$, $x-y=\dfrac{r}{2}\sin\theta$ とするとき，x, y の r, θ に関するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) I を (1) で与えられた変数変換を用いて求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171301)

0.354 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=\sinh 2z$ 　について，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．　なお，$\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z)=u+iv$ とするとき，u, v を x, y を用いて表せ．　ただし，u, v は x, y の実関数とする．

(2) $f(z)=0$ となる z を求めよ．

(3) $w=f(z)$ により z 平面上の直線 $x=\dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171302)

0.355 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) A を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R，および，その逆行列 R^{-1} を答えよ．

(4) x, y, z をそれぞれ任意の実数とし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する．

また，$\boldsymbol{u}^T = (x \quad y \quad z)$ とする．このとき，x, y, z を変数とする関数 $f(x,y,z) = \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{u}$ について考える．

(a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 X, Y, Z を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，

$f(x,y,z)$ を X, Y, Z の関数 $f(x,y,z) = F(X,Y,Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X,Y,Z)$ を X, Y, Z の式で表せ．

(b) 任意の x, y, z に対して，$f(x,y,z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x,y,z) = 0$ を満たす x, y, z を求めよ．

(筑波大 2017) (m20171303)

0.356 $f(x,y) = xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y) = c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p > 0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x > 0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D = \bigcup_{1 \leq p \leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大 2017) (m20171304)

0.357 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad \cdots\cdots ② $$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T = {}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t = 1,2,3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1,2,1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$ \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③ $$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1, y_2, y_3 を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.358 次の 3 変数連立一次方程式を考える．

$$ \left\{ \begin{array}{ccccccc} cx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2c \\ x_1 & + & cx_2 & + & x_3 & = & c+1 \\ x_1 & + & x_2 & + & cx_3 & = & 3c-1 \end{array} \right. $$

ただし，c は定数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一意の解が得られるときのすべての c の値を求めよ．また，それぞれの c に対応する解を求めよ．

(2) 解が存在しないときのすべての c の値を求めよ．

(3) 解が一組より多くなるときのすべての c の値を求めよ．またそれぞれの c に対応する解を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171306)

0.359 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする．

$$ F(x,y,z,w) = (x - y + z + w,\ 2x - 2y + 3z + 4w,\ 3x - 3y + 4z + 5w) $$

すべての $(x,y,x,w) \in \mathbb{R}^4$ に対して．3 次元ベクトル $F(x,y,z,w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分区間となる．それを $\mathrm{Im}\,(F)$ と表す．また，$F(x,y,z,w) = (0,0,0)$ となる 4 次元ベクトル (x,y,z,w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを $\mathrm{Ker}\,(F)$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Im}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171307)

0.360 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(x,y) = (0,0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(筑波大 2017)　　(m20171308)

0.361 $E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.362 X を非負値離散型確率変数とする．$a > 0$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 I を次のよう定義する，

$$I = \begin{cases} 1 & (X \geq a) \\ 0 & (0 \leq X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると，I の期待値 $E(I)$ と「 $X \geq a$ となる」確率 $Pr(X \geq a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ，

$$E(I) = Pr(X \geq a) \qquad \text{(i)}$$

(2) 等式 (i) を用いて，$E(X)$ と $Pr(X \geq a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ．

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \qquad \text{(ii)}$$

(3) 不等式 (ii) を用いて，$Pr(\,|\,X - E(X)\,|\, \geq a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ．

$$Pr(\,|\,X - E(X)\,|\, \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \qquad \text{(iii)}$$

(筑波大 2017)　　(m20171310)

0.363 ある工場の製品 A が大量生産されているとき，製品 A の不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる. X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x;\theta)$ を求めよ．

(2) $x_1,\ \cdots,\ x_n$ を確率分布 $f(x;\theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く，$\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ.

(筑波大 2017)　　(m20171311)

0.364 (1) 関数 $f(x) = e^x$ をマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでテイラー展開）せよ.

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!} + \frac{n-1}{2!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つ.

(3) 上の性質 (A) を証明せよ.

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.365 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする.

(A) $||\boldsymbol{v}_1|| = \cdots = ||\boldsymbol{v}_1|| = 1$

(B) 相異なる $j, k \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $\langle \boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$

ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積，$||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す．　また，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする．以下の (1)-(4) を証明しなさい.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が実数 $x_1,\ \cdots\ x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき，次の等式が成り立つ.

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である.

(4) $V \neq W$ であれば，$\boldsymbol{w} \notin V$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である.

(筑波大 2017)　　(m20171313)

0.366 a を 0 と異なる実数とし，3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える.

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\ f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および 像 $\mathrm{Im}\ f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを 1 つ求めよ．ただし，O は零行列を表す.

(筑波大 2017)　　(m20171314)

0.367 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^m x_i}$$

とおく．ただし，D_x は $D_x = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_m)$ なる対角行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置とする．

(1) 0 が A_x の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}\,A_x\,\boldsymbol{y} \geqq 0$ を示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171315)

0.368 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\dfrac{(\log_e x - \mu)^2}{2}\right\}$　　$(0 < x < \infty\ ;\ -\infty < \mu < \infty)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$ となる m を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx$ を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171316)

0.369 (1) 数列

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が単調減少であることを示せ．

(2) 上の数列が，$C \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.370 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$，$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.371 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，x，y，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r，θ，z の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x},\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}$ を $r,\ \theta, z$ を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

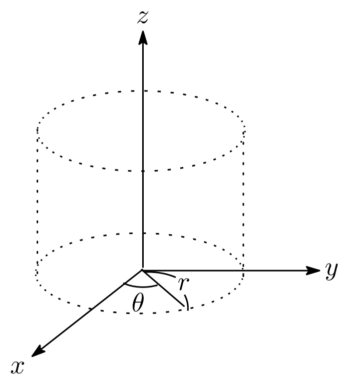
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは
$\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される． 関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0,\ g(1) = 0,\ g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) $x,\ y,\ z$ の $r,\ \theta,\ z$ に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \qquad K = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.372 次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) $a_n,\ b_n$ の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

0.373 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，E は単位行列である．

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること．

(2) A を $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化する行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $f(A)$ を求めよ．

(4) $|f(A)|$ を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181303)

0.374 y に関する以下の線形微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = 2x^3 + x^2 + x$　　(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - n^2y = 0$　(n は定数)

(筑波大 2018)　　(m20181304)

0.375 留数定理を用いて，以下の定積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 - 2x + 2} dx$$

ただし，m は実定数とする．

(筑波大 2018)　　(m20181305)

0.376 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n = 0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x) = 0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x) = 0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x) \neq 0$ かつ $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left| \frac{d}{dx}\varphi(x) \right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.377 x を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 F は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) F が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ.

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ.

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ.

(4) A を対角化して, 行列 A^n を求めよ. (n は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

0.378 (1) n 次正方行列 $A=(a_{ik})$ において, 第 i 行, 第 k 列を取り去って得られる $(n-1)$ 次行列式に符号 $(-1)^{i+k}$ をつけたものを A の第 $(i,\ k)$ 余因子といい, $\triangle_{ik}$ により表す. このとき, 以下の問に答えよ.

(a) A の行列式 $|A|$ を第 $(n,\ k)$ 余因子 $(k=1,\cdots,n)$ を使って表せ.

(b) A の逆行列 A^{-1} の第 $(i,\ k)$ 成分を A の行列式と余因子により表せ.

(2) A を n 次正方行列, D を m 次正方行列とする. また, $O_{m,n}$ を $(m,\ n)$ 次の零行列, $I_n,\ I_m$ をそれぞれ n 次と m 次の単位行列とする. A が正則であるとき,
行列の積 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_{m,n} & I_m \end{bmatrix}$ を求め, それから, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ.

(3) $A,\ B,\ C$ を n 次正則行列, O_n を n 次零行列とするとき, $2n$ 次行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ O_n & C \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(筑波大 2018)　　(m20181308)

0.379 $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) S の固有値をすべて求めよ.

(2) S の固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) S の固有値に対応する固有ベクトルを並べて得られる直交行列 P を一つ示せ.

(4) (3) の直交行列 P に対して, P^TSP を求めよ. ただし, P^T は P の転置行列である.

(筑波大 2018)　　(m20181309)

0.380 関数 f を

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) f は原点 $x=0$ で連続である. その理由を答えよ.

(2) f の原点 $x=0$ 以外の導関数を求めよ.

(3) f の原点 $x=0$ での微分係数を定義に従って求めよ.

(4) f の導関数 f' が原点 $x=0$ で連続かどうかを, その理由とともに答えよ.

(筑波大 2018)　　(m20181310)

0.381 以下の関数を積分せよ. ただし, k は整数であり, 積分定数は省略してよい.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$　　(2) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sin x}$　　(4) $x^k\ln x$

(筑波大 2018)　　(m20181311)

0.382 サイコロを 2 個投げて出た目の大きい方を X，小さい方を Y とする．ただし，同じ目が出たときは，$X = Y$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 確率 $P(X \geq 5)$ 及び $P(Y \leq 1)$ を求めよ．

(2) 条件付き確率 $P(Y \leq 1 \mid X \geq 5)$ を求めよ．

(3) X の期待値 $E[X]$ を計算せよ．

(4) $E[XY] - E[X]E[Y]$ を計算せよ．

(筑波大 2018)　　(m20181312)

0.383 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする． 今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる． ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である． $\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の $100\alpha\%$ 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする． このとき，以下の問に答えよ．

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ．

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ．

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n = 4,\ m = 800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A),\ P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A),\ P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181313)

0.384 xyz 直交座標系において円柱面 $x^2 + y^2 = 1$，xy 平面，平面 $z = x$ により囲まれた部分の体積を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181314)

0.385 関数 $f(x, y)$ は，x および y について偏微分可能で $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する．

関数 $f(x, y)$ を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \ (r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ で変数変換したときの $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は，変数 r を含まない関数となることを証明しなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181315)

0.386 二つのメーカー X および Y からなる市場において，各メーカーのユーザー数を調査したい． 毎年メーカー X のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー Y のユーザーとなり，一方で，メーカー Y のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー X のユーザーとなる，それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし，ユーザーの総数は変化しない．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ある年におけるメーカー X, Y のユーザー数をそれぞれ x_n, y_n で表す．　このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 x_{n+1}, y_{n+1} を二次正方行列 A を使って以下の形で表す．行列 A を具体的に示しなさい．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) A の固有値および固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めるとともに，P の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A^n を求めなさい．

(5) (4) の結果を使って，$n \to \infty$ としたときのメーカー X および Y のユーザー数の比率を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181316)

0.387 0 と異なる実数 a, b, c に対して，$\boldsymbol{u} = (a,\ b,\ c)$ とし，$A = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とおく．ただし，${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の転置とする．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) A が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181317)

0.388 以下の命題の真偽を判定し，その根拠を述べよ．

(1) 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ かつ全射であるものが存在する．

(2) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，U_1, U_2 を V の部分空間とする．$V = U_1 \oplus U_2$ であれば，V の任意の部分空間 W について $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$ が成り立つ．

(3) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，W を V の部分空間とする．$W \neq V$ であれば，V の部分空間 U であって，$U \supset W$ かつ $\dim U = \dim W + 1$ を満たすものが存在する．

(筑波大 2018)　　(m20181318)

0.389 $f(x) = \log(1 + \sin x)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．但し，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x}{3x^2}$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の近似値を誤差 $\dfrac{1}{100}$ 未満で求めよ （求めた近似値の誤差が $\dfrac{1}{100}$ 未満であることの根拠も述べること）．

(筑波大 2018)　　(m20181319)

0.390 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\ ,\qquad D=\left\{(x,y)\mid 1/4\leqq x^2+y^2\leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3|x-y|e^{(x^2-y^2)(x-y)}dxdy\ ,\qquad D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1\}$

(筑波大 2018)　　(m20181320)

0.391 $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている．

(1) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する 」の定義を述べよ．

(2) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する 」の定義を述べよ．

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ．

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする．すべての $n=1,2,\cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば，$f(x)$ も連続関数であることを示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181321)

0.392 $x^2+y^2=4$ の条件の下で，$f(x,y)=4x+2xy$ の最小値，最大値を求めなさい．また，最小，最大となるときの x と y の値も示しなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191301)

0.393 次の二重積分について，以下の問いに答えなさい．

$$V=\iint_D (x^2+xy)dxdy\quad \cdots\cdots(*)$$

ただし，$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とする．

(1) x と y を極座標変換し，式 $(*)$ の右辺を書き換えなさい．

(2) V の値を求めなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191302)

0.394 零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影を考える．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$（ただし添字 T は転置を表す）および，$\boldsymbol{a}$ を正規化したベクトル $\dfrac{1}{||\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{a}$（ただし $||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムを表す）を用いると，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}$$

と書ける．

(1) $\boldsymbol{p}=P\boldsymbol{b}$ となるような射影行列 P を求めなさい．

(2) $P^2=P$ となることを示しなさい．

(3) I を単位行列としたとき，$I-P$ もまた射影行列となる．このとき，$\boldsymbol{b}$ を $I-P$ で射影して得られるベクトル $\boldsymbol{c}$ と，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の関係を図示しなさい，

(筑波大 2019)　　(m20191303)

0.395 線形独立な n 個の m 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$（ただし $n < m$）によって張られる m 次元実数空間の部分空間を考え，この部分空間で，零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に最も近いベクトル，すなわち射影 $\boldsymbol{q}$ を求めたい．実係数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n を用いて

$$\boldsymbol{q} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

とおく．さらに，

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$$

となるような $m\times\ n$ 行列 A および n 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いると，$\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{x}$ と書ける．

(1) $\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かうベクトルと，$\boldsymbol{a}_i$ (ただし $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) によって張られる部分空間は直交する．この関係を表す式を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ のみを用いて表しなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ のみを用いて表しなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191304)

0.396 $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ とする．

(1) $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた停留点のうち，x 座標および y 座標がともに正の点を (a,b) とする． $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値をとるかどうか判定せよ．極値をとる場合は極大と極小のどちらであるか，根拠とともに述べよ．

(3) x, y が $xy = 4$ かつ $x > 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191305)

0.397 $f(x,y) = x^2 + y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2 + y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.398 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A+2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.399 (1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立であるとき，ベクトル $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ は一次独立であるか否かを示せ．

(2) 次の $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_5$ のベクトルの中で，一次独立であるベクトルの数が最大となる一次独立ベクトルの組を 1 つ示せ．また，その他のベクトルを一次独立ベクトルの線形結合により表せ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(筑波大 2019)　　(m20191308)

0.400 次の行列 A について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ．

(3) A は対角化可能か述べよ．また，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191309)

0.401 ラグランジュの未定乗数法を用いて，楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし，直方体の各辺は，いずれも x 軸，y 軸，z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x,y,z)（ただし，$x>0,\ y>0,\ z>0$ ）としたとき，3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と，楕円体に内接する直方体の体積 $V(x,y,z)$ を変数 x,y,z を用いてそれぞれの数式として表せ.

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件を満たす特異点がないことを示せ.

(3) 体積 $V(x,y,z)$ を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めるための，具体的なラグランジュ関数 $F(x,y,z)$ を示せ．ただし，未定乗数を λ とせよ.

(4) (3) で定数化した数式を用いて，楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x,y,z) とその体積を求めよ．ただし，$x>0,\ y>0,\ z>0$ とする.

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.402 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える.

$$I=\iint_D (4x^2-y^2)e^{8xy}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\le 2x+y\le 1\ ,\ 0\le x-\frac{1}{2}y\le 1\right\}$$

(1) $u=2x+y,\ v=x-\dfrac{1}{2}y$ と変数変換したとき， 変数の組 (u,v) の積分領域 E を示せ.

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ.

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.403 確率変数 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ は互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 のある同一の確率分布に従うとする．ここで，2 つの μ の推定量

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} v_iX_i, \qquad \tilde{\mu}=\sum_{i=1}^{n} w_iX_i$$

を考える．ただし，

$$-\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty$$

,

$$v_i=\frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \qquad w_i=\frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

で，n は 2 以上の整数である．なお，解答の際には，

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を利用して良い.

(1) $\hat{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(2) $\tilde{\mu}$ が μ の不偏推定量であることを示せ.

(3) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ.

(4) $\tilde{\mu}$ の分散を求めよ.

(5) (1)〜(4) から，$\hat{\mu}$ と $\tilde{\mu}$ どちらの推定量がより μ の推定にに適していると言えるか．その理由とともに答えよ.

(筑波大 2019)　　(m20191312)

0.404 テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p,q で視聴すると仮定する．また，各世帯

は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．なお，$0 \leq a \leq 1$ を満たす a に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-a)\%$ 点 z_a は

$$P_r(Z \geq z_a) = a$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$P_r(Z \geq z_a)$ は Z が z_a 以上になる確率である．

a	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_a	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\hat{p} = 0.1$ を得た．このとき，p の 95% 信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\hat{q} = 0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191313)

0.405　2 つの実数 a, θ に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) A^2 の行列式を求めよ．

(2) A^2 の階数を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.406　実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$a \neq d$ と仮定する．$M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \qquad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める．

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ．

(2) f_A の核の次元が 2 であることを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191315)

0.407　α を実数の定数とし，n を 2 以上の整数とする．

$$f(x, y) = (y - x)^n + x^2 + \alpha y^2$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ において極値を取るかどうか判定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191316)

0.408 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.409 2 つの実数 a,b に対して，実数 $a \vee b$ を

$$a \vee b = \max\{a,b\}$$

で定める．

(1) 実数 a,b に対して，

$$a \vee b = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合 A,B に対して，$\mathbb{R}$ の部分集合 $A \vee B$ を

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定める．A,B がともに上に有界であれば，$A \vee B$ も上に有界であることを示し，さらに

$$\sup(A \vee B) = (\sup A) \vee (\sup B)$$

が成り立つことを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191318)

0.410 $z = \dfrac{1}{xy}$, $x>0$, $y>0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(1,2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x+3y+9z+18=0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.411 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を求めよ． ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j \ \ (j = 1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として， 対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき，$P,\ P^{-1}$ および D を求めよ． ただし，P は直交行列，D は対角行列， D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が， $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = -e^A \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020)　　(m20201302)

0.412 ある企業で従業員の喫煙状況を調査したところ， 毎年，非喫煙者（喫煙経験がない者）の $\dfrac{1}{9}$ が喫煙を始め， 喫煙者のうち $\dfrac{1}{3}$ が禁煙する． また，禁煙者（かつて喫煙していて，かつ喫煙を止めた者）のうち $\dfrac{1}{6}$ は，再び喫煙を始めることが分かった．ただし，ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ $x_0,\ y_0,\ z_0$，その n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ $x_n,\ y_n,\ z_n$ とし，対象期間中に従業員は変わらないものとする．

(1) 1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数 $x_1,\ y_1,\ z_1$ を $x_0,\ y_0,\ z_0$ で表せ．

(2) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数とその n 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

と書く．1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$$

としたとき，行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}_n$ を A と $\boldsymbol{x}_{n-1}$ で表せ．

(5) n 年後非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_n = B\boldsymbol{x}_0$$

とする．このとき，行列 B を A を用いて表せ．さらに，行列 B を求めよ．

(6) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数はそれぞれ 1458 人，456 人，408 人だった．その 3 年後の禁煙者の人数を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201303)

0.413 (1) 関数 $f(x, y)$ を次のように定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

この関数 $f(x, y)$ について，以下の問に答えよ．

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,0)$ を求めよ.

② $k\neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,k)$ を求めよ.

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け.

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ.

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する.

$$g(x,y)=\frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x,y)$ について，以下の問に答えよ.

① 導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$，$g_{xx}(x,y)$，$g_{xy}(x,y)$，$g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ.

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ．なお，3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い.

(筑波大 2020)　　(m20201304)

0.414 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする.

上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y=\mathrm{Arctan}\,x$ について，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ.

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと.

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.415 次の 2 重積分を計算せよ.

$$I=\iint_D xe^{y^2}\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 1\right\}$$

(筑波大 2020)　　(m20201306)

0.416 当りが 2 本，外れが 2 本からなるくじがあり，A,B の 2 人が非復元抽出で 1 本ずつくじを引く．A の引いたくじが当たりのときを $X=1$，外れのときを $X=0$ とし，B が引いたくじが当たりのときを $Y=1$，外れのときを $Y=0$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の同時確率分布表の (ア)〜(ク) に入る適当な値を答えよ.

X \ Y	1	0	合計
1	(ア)	(イ)	(ウ)
0	(エ)	(オ)	(カ)
合計	(キ)	(ク)	1

(2) 期待値 $E[X]$, $E[Y]$, 分散 $V[X]$, $V[Y]$, 共分散 $Cov[X,Y]$ を求めよ．

(3) 相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201307)

0.417 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ．

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする．

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である．

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2020)　　(m20201308)

0.418 次の式で与えられる陰関数 $z = f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

(筑波大 2020)　　(m20201309)

0.419 次の定積分の値を求めなさい．

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$$

(筑波大 2020)　　(m20201310)

0.420 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような a, b, c の組を全て求めなさい．

(筑波大 2020)　　(m20201311)

0.421 行列 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい．

(1) B の固有多項式を求めなさい．

(2) B が多角化可能となるような d の値を全て求めなさい．

(筑波大 2020)　　(m20201312)

0.422 4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

(筑波大 2020)　　(m20201313)

0.423 V は $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f : V \to V$ について

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$
$$f(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像の次元を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201314)

0.424 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi < x < \pi \;\text{ かつ }\; 0 < y < \pi\right\}$ とする．

関数 $f(x, y) = \sin x - \sin y + \sin(x + y)$ の D における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201315)

0.425 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて，広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^\alpha}{x^4 + y^2} dxdy$ を計算せよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^\alpha) dxdy$ が収束することを示せ．

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.426 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) $V,\ W$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1),\ f(\boldsymbol{v}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $U_1,\ U_2,\ U_3$ が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 $A,\ B$ に対して，$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して，写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.427 $a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める．また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(2) $\dim V = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\operatorname{Im} f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211301)

0.428 U, V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim U > \dim V$ とする．また，$f : U \to V$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\operatorname{Ker} f$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f が単射であることは $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_U\}$ と同値であることを示せ．ここで，$\mathbf{0}_U$ は U のゼロベクトルである．

(3) 線形写像 $g : V \to U$ であって，合成写像 $g \circ f$ が同型写像になるものは存在しないことを示せ．

(4) 線形写像 $g : V \to U$ であって，合成写像 $f \circ g$ が同型写像になるものが存在することと，f が全射であることが同値であることを示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211302)

0.429 (1) $z = f(x, y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 u, v に対して，$x = u + v$, $y = uv$ のとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 - 4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x,\, y) = x^4 + y^4 - 2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211303)

0.430 (1) 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\, dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり，$f(x) > 0 \ \ (x \in [0,1])$ とする．このとき，以下の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021)　　(m20211304)

0.431 集合 X の部分集合 $A,\ B$ に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2) $A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3) $C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4) $A_i \subset X \ \ (i = 1, 2, \cdots, k),\ \ B_j \subset X \ \ (j = 1, 2, \cdots, \ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{\ell}(A_i \triangle B_j)$$

を示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211305)

0.432 次の 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy, \qquad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211306)

0.433 $x + 2y + z + e^{2z} - 1 = 0$ から定まる陰関数 $z = f(x, y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z = f(x, y)$ が表す曲面上の点 $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x, y)$ の原点 $(x, y) = (0, 0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.434 未知数 a, b を含む次の行列 A に関して設問 (1)-(3) に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A による一次変換で直線 $2x + 3y = 1$ が直線 $x + 4y = 3$ に写るとき，a, b の値を求めなさい．

(2) (1) の条件を満たす行列 A のすべての固有値と，各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい．

(3) (1) の条件を満たす行列 A による一次変換で円 $x^2 + y^2 = 1$ を写した図形の方程式を求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211308)

0.435 $n \times n$ 行列 A を

$$\begin{bmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{bmatrix}$$

とおく．但し，n は 2 以上の整数，a, b は実数で，$a \neq 0$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ．

(2) 行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して，b を a と n を用いて表せ．

(3) (2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211309)

0.436 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211310)

0.437 関数 $F(x, y) = xy - x^3 + y^2$ について，以下の問に答えよ．

(1) $F(x, y) = 0$ を満たす陰関数 $y = f(x)$ の極値となる点 $(x, f(x))$ をすべて求めよ．また，その点が極大値か極小値かについても理由とともに説明せよ．

(2) 原点において $F(x, y) = 0$ を近似する直線をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211311)

0.438 (1) 関数 $g(x) = x^x$ $(x > 0)$ について，$\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ．

(2) 与えられた領域 D において，(1) の結果を用いて，次の広義 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy\ ,\ \ D = \left\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\, ,\ x \geq 0\, ,\ y \geq 0\right\}$$

(筑波大 2021)　　(m20211312)

0.439 確率変数 X について，その平均 $\mu = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合，定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ．

(2) $E(X) = 2$，$E(X^2) = 9$ のとき，(1) の結果を用いて，$-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ．

(3) $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_{16}$ が正規分布 $N(2,4)$ からの無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{X}$ に対して $|\overline{X}-2|<0.75$ を満たす確率を求めよ．さらに，(1) を用いて $|\overline{X}-2|<0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し，両者を比較せよ．

付表１ 標準正規分布表：$Q=\displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$，但し，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表２

$\sqrt{2}=1.414$	$\sqrt{3}=1.732$	$\sqrt{5}=2.236$	$\sqrt{7}=2.646$	$\sqrt{11}=3.317$

(筑波大 2021)　　(m20211313)

0.440 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるために，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$，$N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学 で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表３ F 分布表：分子の自由度 m_1，分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1,m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1,m_2)$（下段）

m_1 \ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表４ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120

(筑波大 2021)　　(m20211314)

0.441 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における微分可能性を調べよ (a は定数)．ただし，逆三角関数は主値をとるものとする．

$$f(x)=\begin{cases} a|x|-x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(筑波大 2021)　　(m20211315)

0.442 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ を考える．

(a) 点 $(1,-1)$ において，$f(x,y)$ の変化率（方向微分）が最大となる方向，およびその最大値を求めよ．

(b) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(c) $x^2+y^2 \geq 1$ において，不等式 $0 < f(x,y) \leq \dfrac{2}{e}$ が成り立つことを示せ．

(d) $\mathbb{R}^2$ における $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211316)

0.443 二重積分 $I_n = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}\,dxdy$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は存在するか．存在する場合は，その値を n を用いて表わせ．存在しない場合は，「存在しない」と答えること．

(筑波大 2021)　　(m20211317)

0.444 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ．
（設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 α, β, γ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

0.445 複素変数 z の三角関数 $f(z) = \cos z$ に対し，$z = x + iy$，$f(z) = re^{i\theta}$ （i は虚数単位）とおくとき，以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を求めよ．

$$r^2 = \cos^2 x + \boxed{\quad (a) \quad}$$

(筑波大 2022)　　(m20221301)

0.446 関係式 $F(x,y)=x^2-2xy+9y^2-8=0$ をみたす関数 $y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) 停留点（$f'(x)=0$ となる点）をすべて求めよ．

(b) (a) で求めた各点において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(c) (a), (b) の結果を用いて極値をすべて求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221302)

0.447 定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx \quad (n=1,2,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(a) I_1 を求めよ．

(b) $I_n \ (n \geqq 2)$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221303)

0.448 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.449 次の 3 次正方行列を考える．

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A のそれぞれの固有値に対応する，固有空間を張る（固有）ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて，3 次実数空間の正規直交基底を求めよ．

(4) (3) で求めた正規直交基底を並べた行列 P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221305)

0.450 m 次実数空間 $\mathbb{R}^m$ 内の互いに直交する線形独立な n 個の列ベクトルを $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n \ (\neq \mathbf{0})$ とする．また，これらのベクトルを並べた，$m\times n$ 行列を A と表す．このとき，以下の各問に答えよ．

なお，$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，${}^tA$ は行列 A の転置，E は単位行列を表す．

(1) n 次正方行列 ${}^tAA$ が正則であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^m$ 内のベクトル $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間への正射影を考える． ベクトル $\mathbf{b}$ を射影した点の座標（つまり, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間内でベクトル $\mathbf{b}$ に最も近い点の座標 ）を $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ とする．$\hat{\mathbf{x}}$ を A と $\mathbf{b}$ により表現せよ．

(3) $A\hat{\mathbf{x}} = \Phi\mathbf{b}$ を満たす射影行列 Φ を A により表現せよ．

(4) $(E - \Phi)$ も射影行列を表している．$(E - \Phi)\mathbf{b}$ は ベクトル $\mathbf{b}$ のどの空間への正射影となるかを説明せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221306)

0.451 (1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \left\{ = \lim_{n \to \infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n}) \right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x \log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.452 2 つの 2 変数関数

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$
$$G(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$$

について，以下の各問に答えよ．ただし，$y = \arctan x$ は $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である．また，$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$ である．

(1) $G(x, y)$ の x, y に関する偏導関数 $G_x(x, y)$, $G_y(x, y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて，$F(x, y)$ が条件 $G(x, y) = 0$ のもとで極値をとる点の候補を求めよ．

(3) $G(x, y) = 0$ の陰関数 $y = g(x)$ について，その 1 次導関数 $g'(x)$ を x および $g(x)$ で表せ，また，2 次導関数 $g''(x)$ を $x, g(x)$ および $g'(x)$ で表せ．

(4) (3) を用いて，条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの $F(x, y)$ の極小値を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221308)

0.453 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ.

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ.

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき, μ の 95 % 信頼区間を求めよ.

(筑波大 2022) (m20221309)

付表１

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表３ 標準正規分布表：$Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$, ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表４ χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５ t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.454 ある店の単位時間あたりの来客数 X は, 平均 λ のポアソン分布に従う．すなわち, t 時間あたりの来客数 X_t は,

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

に従う．このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 来客の発生間隔 T の確率密度関数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$ を導出せよ.

(2) 1 時間平均 1.5 人の来客があるとき, 2 時間以上来客が無い確率を求めよ.

(3) 開店時間 t_0 から s 時間来客が無いとき, 時刻 $t_0 + s$ から初めて客が来るまでの時間 H の確率密度関数を導出せよ.

(筑波大 2022) (m20221310)

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

0.455 次の 2 重積分について, 以下の問いに答えなさい.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x,y)}dxdy$$

(1) $f(x, y) = -x^2 - y^2$ とし, I を求めなさい.

(2) $f(x, y) = -ax^2 - 2bxy - cy^2$ とし, I を求めなさい．ただし, $a > 0$, $b^2 - ac < 0$ とする.

(筑波大 2022) (m20221311)

0.456 次の方程式が開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で互いに異なる解をちょうど n 個持つことを証明しなさい.

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-2)^n = 0$$

(筑波大 2022) (m20221312)

0.457 以下に示す実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_3,\ \boldsymbol{\nu}_4,\ \boldsymbol{\nu}_5$ について，線形独立となる組合せを一つ挙げなさい．このとき，残り全てのベクトルを線形独立なベクトルの一次結合として表しなさい.

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\nu}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(筑波大 2022) (m20221313)

0.458 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W について答えなさい.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\ x^2 - y^2 + 4z^2 + 4xz = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の二つの部分空間の組合せで表すことができる． それぞれを $W_1,\ W_2$ とするとき，$W_1,\ W_2$ を求めるとともに，W を $W_1,\ W_2$ を使って表しなさい.

(2) W は部分空間かどうかを理由とともに答えなさい.

(筑波大 2022) (m20221314)

0.459 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \left\{(a_n)\ \middle|\ a_n \in \mathbb{C}\ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$W = \left\{(a_n) \in V\ \middle|\ a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$$

とする．また W の元 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ をそれぞれ

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0,\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0,\quad z_1 = 0,\quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ.

(1) W が V の部分空間になることを示せ.

(2) $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ が W の基底になることを示せ.

(3) $F\ :\ W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ.

(4) W の基底 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ に関する F の表現行列 A を求めよ.

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221315)

0.460　$F(x,y)=xy\tan y+\pi\tan y-x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)\quad(x\to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．
ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x=\frac{1}{x}\qquad(x\in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n=x_n-n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right)=0$ を示せ．

(3) $x=0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x))=0\qquad(x\in I),\qquad\varphi(0)=0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n=n\pi+b_1\frac{1}{n}+b_2\frac{1}{n^2}+b_3\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\qquad(n\to\infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.461　X を集合とし，$f,\ g,\ h$ を X から X への写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f と g が全単射ならば，合成写像 $g\circ f$ は全単射であることを示せ．

(2) $g\circ f$ が全単射ならば，f は単射かつ g は全射であることを示せ．さらに，この命題の逆が成り立たないことを示す反例を 1 つ与え，それが反例であることを示せ．

(3) $f\circ g\circ h$ と $h\circ g\circ f$ が全単射ならば，$f,\ g,\ h$ はすべて全単射であることを示せ．

(筑波大 2022)　　(m20221317)