

[選択項目] 年度：1991～2023 年 大学：宇都宮大

0.1 以下の問に答えよ.

(1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  とする.  $A$  が正則行列かどうか調べ, 正則ならば  $A^{-1}$  を求めよ.

(2)  $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$  とする.

(a)  $B$  の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(b)  $P^{-1}BP$  が対角行列となるような  $P$ , およびそのときの  $P^{-1}BP$  を求めよ.

(宇都宮大 2004) (m20046101)

0.2 以下の問に答えよ.

(1)  $f : (x, y) \rightarrow (2x, -x + y)$  において線形変換  $f$  が与えられているとき,  $f$  をあらわす行列  $A$  を求めよ.

(2)  $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ 1 & g(x) & g'(x) & g''(x) \\ 1 & h(x) & h'(x) & h''(x) \\ 1 & k(x) & k'(x) & k''(x) \end{vmatrix}$  について,  $\frac{dD(x)}{dx}$  を求めよ.

(ただし,  $f(x)$  は  $x$  の関数,  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ,  $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ,  $g(x), h(x), k(x)$  についても同様)

(宇都宮大 2004) (m20046102)

0.3 以下の問に答えよ.

(1)  $x > 0$  における次の関数の極値とそのときの  $x$  の値を求めよ.

$$f(x) = e^{-ax} - e^{-bx} \quad \text{ただし, } b > a > 0 \text{ とする.}$$

(2) 次の定積分の大きさを求めよ.

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

(宇都宮大 2004) (m20046103)

0.4 関数  $f(x) = e^{-x} \sin \pi x (x \geq 0)$  があるとき, 以下の問に答えよ.

(1)  $y = f(x)$  のグラフの概形を描け.

(2)  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸とで囲まれる部分の面積を原点に近い方から  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  とするとき, 1 番目の面積  $S_1$  を求めよ.

(3)  $n$  番目の面積  $S_n$  を求めよ.

(4)  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  の面積の総和を求めよ.

(宇都宮大 2004) (m20046104)

0.5 以下の問に答えよ.

(1)  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} (a \neq 0)$  を求めよ.

(2) 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = y^2 - a^2$  ( $a \neq 0$ ) を解きなさい。

(宇都宮大 2004) (m20046105)

0.6 (1) 行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とする。  $A$  の階数 (ランク) を求めよ。

(2) 行列  $B$  を  $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$  とする。

(a)  $\det B = 0$  となるように  $\alpha$  を求めよ。

(b) この  $\alpha$  に対する  $B$  の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの第1成分が1となるようにせよ。

(宇都宮大 2005) (m20056101)

0.7 関数  $F_n(x) = x^n e^{-x}$  について、以下の問に答えよ。ただし、 $n \geq 2$  とする。

(1)  $x \geq 0$  において  $F_n(x)$  が最大・最小となる  $x$  の値をそれぞれ求めよ。

(2)  $x > 0$  において  $F_n(x)$  の変曲点となる  $x$  の値を求めよ。

(3)  $x \geq 0$  における  $y = F_n(x)$  のグラフの概形を描け。

(4)  $n = 3$  の場合について、

$$I_n = \int_0^{\infty} F_n(x) dx$$

の値を求めよ。

(宇都宮大 2005) (m20056102)

0.8 (1) 次の関数を微分せよ。ただし  $a > 0$  とする。

$$y = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$$

(2)  $m$  と  $n$  を正の整数とすると、次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

(宇都宮大 2005) (m20056103)

0.9 以下の定積分および不定積分を計算せよ。

$$(1) \int_1^2 (x+2)(x-1) dx \quad (2) \int \frac{1}{(x-q)(x-q-1)} dx \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}} dx$$

(宇都宮大 2007) (m20076101)

0.10 関数  $f(x) = (2x^2 - 1)e^{-x^2}$  について、以下の問に答えよ。

(1) 関数  $f(x)$  が偶関数であることを示せ。ただし、偶関数とは  $g(-x) = g(x)$  という性質を持つ関数である。

(2) 関数  $f(x)$  が極大値をとる  $x$  および極小値をとる  $x$  を求めよ。また、それぞれの極値を求めよ。

(3) 関数  $f(x)$  のグラフの概形を描け。ただし、 $e^{-\frac{3}{2}}$  の値は、約 0.223 である。

(宇都宮大 2007) (m20076102)

- 0.11 (1) 3次曲線  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  のグラフの概形を描け。  
 (2) 設問(1)の曲線と  $x$  軸で囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

(宇都宮大 2007) (m20076103)

0.12 次のベクトル  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$

に関して以下の問いに答えよ。ただし、 $a$  は実数とする。

- (1)  $a = 1$  のとき  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  は線形独立か線形従属かを調べよ。  
 (2)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  が線形従属になるための実数  $a$  の条件を求めよ。

(宇都宮大 2007) (m20076104)

0.13 次の行列  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  に関して、以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の固有値と固有ベクトル  $\lambda_i, \mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を求めよ。ただし、各固有ベクトルの最大の成分が1となるようにせよ。  
 (2)  $A$  の固有ベクトル  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) が、数ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の基底となることを示せ。

(宇都宮大 2007) (m20076105)

- 0.14  $n$  は2以上の自然数とする。数学的帰納法によって、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007) (m20076106)

- 0.15 直線  $y = ax - 3$  と円  $x^2 + y^2 + 2y = 0$  がある。この直線と円が交わったり、接したりしないときの  $a$  の値を求めよ。

(宇都宮大 2007) (m20076107)

- 0.16  $\log_x 4 - \log_2 x = 1$  を解け。

(宇都宮大 2007) (m20076108)

0.17  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$  を求めよ。

(宇都宮大 2007) (m20076109)

- 0.18 確率変数  $X$  の確率分布が下表により与えられているとき、 $X$  平均値および分散を求めよ。

$X$	2	4	6	8
確率分布 $P$	0.4	0.3	0.2	0.1

(宇都宮大 2007) (m20076110)

- 0.19 毎秒  $3\text{cm}^2$  の割合で面積が増加している円がある。この円の半径が  $6\text{cm}$  になった瞬間における半径  $r$  の変化率  $dr/dt$  の値を求めよ。ただし、 $t$  は時間を表す。

(宇都宮大 2007) (m20076111)

0.20  $n$  を自然数とするとき,  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  を証明せよ.  
(宇都宮大 2007) (m20076112)

0.21 区間  $[0, 1]$  を 4 等分し,  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  の近似値を台形公式を使って小数第 3 位まで求めよ.  
(宇都宮大 2007) (m20076113)

0.22 ある固体の数  $N$  が増加する速さは  $N$  に比例するという.

- (1) 時間を  $t$ , 比例係数を  $k$  とおいて微分方程式を立て  $N$  と  $t$  の関係を求めよ. ただし,  $t = 0$  の時の個体数を  $N = N_0$  とする.
- (2)  $t = 1$  の時には  $N = 2N_0$  に増加するという.  $t = 8$  の時の  $N$  を求めよ.

(宇都宮大 2007) (m20076114)

0.23 (1) 平面上の零ベクトルでない任意のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  について, シュワルツの不等式,

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

が成立することを示せ.

- (2) シュワルツの不等式で等号が成り立つとき, ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  がどのような関係にあるか答えよ.

(宇都宮大 2010) (m20106101)

0.24 (1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$  としたとき,  $|A| = -2$  となった. この時の  $a$  の値を求めよ.

- (2)  $a$  が (1) の条件を満たすとき,  $A$  の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし,  $a$  が 2 つ以上の値を取るときは最も小さい値を採用する. また, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.
- (3) (2) で求めた固有値および固有ベクトルを用いて,  $A$  を対角化せよ. その時の対角化行列も求めよ.

(宇都宮大 2010) (m20106102)

0.25 次の連立微分方程式の解を求めよ. ただし,  $t = 0$  のとき  $x = 2, y = 0$  とする.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -3y - 2x \end{cases}$$

(宇都宮大 2010) (m20106103)

0.26 次の 2 変数関数  $z = z(x, y)$  の極値を求めよ. ただし,  $x$  の定義域は  $x > 0$  とする.

$$z = z(x, y) = -\frac{1}{2}xy - \log x + y^2 + 3y + 2$$

(宇都宮大 2010) (m20106104)

0.27 (1) 関数  $y = e^{\sin x}$  を微分せよ.

- (2)  $x, y$  の関係が次のように媒介変数  $t$  を用いて表されるとき,  $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  の式で表せ.

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 3t^2 - t - 2 \end{cases}$$

(宇都宮大 2010) (m20106105)

0.28 (1) 不定積分  $\int \frac{2x+1}{x^2-3x-4} dx$  を求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ. ただし,  $a$  は正の定数である.  $\int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx$   
(宇都宮大 2010) (m20106106)

0.29 直線  $ax - y + 1 = 0$  が曲線  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$  とまったく交わずに済むような, 実数  $a$  の範囲を示しなさい.

(宇都宮大 2014) (m20146101)

0.30 3つのベクトル  $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$ ,  $\mathbf{c} = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$  が, いずれも原点  $(0, 0, 0)$  を始点として存在しているとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の内積を求めよ.

(2)  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の成す角の大きさを求めよ.

(3)  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  を共に含む平面を  $\alpha$  と呼ぶとき, 平面  $\alpha$  と  $\mathbf{c}$  の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146102)

0.31 相関係数とはどのようなものか説明するとともに, その結果を用いる場合に注意すべき点を2つあげよ.

(宇都宮大 2014) (m20146103)

0.32  $y = \log(x^2 + 1)$  のとき,  $\frac{dy}{dx}$  および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146104)

0.33  $\int e^{mx} dx$  を求めよ. なお,  $m$  は定数である.

(宇都宮大 2014) (m20146105)

0.34 一般解が  $x^2 - y^2 = Cx$  となる微分方程式を示せ. なお,  $C$  は任意の定数である.

(宇都宮大 2014) (m20146106)

0.35 関数  $z = f(x, y)$  の  $x$  と  $y$  が  $r$  と  $\theta$  の関数で  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  の関係にあるとき,  $\frac{\partial z}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  を求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146107)

0.36 座標の定められた空間における平面と直線について, 下の問いに答えよ.

(1) 直線  $\ell$  は2点  $(2, 1, 3)$  および  $(0, -1, 1)$  を通り, 直線  $m$  は2点  $(4, 3, 1)$  および  $(3, 0, 2)$  通る.

直線  $\ell$  を含み, 直線  $m$  に平行な平面  $p$  の方程式を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(2) 点  $(1, -1, -3)$  を通り, (1) で求めた平面  $p$  と直交する直線を  $k$  とする. 平面  $p$  と直線  $k$  の交点を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156101)

0.37 次の行列  $A$  について下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

(1) 行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ. 計算経過も記入せよ.

- (2) 行列  $A$  が対角化可能か調べよ. 対角化可能であるときは適当な正則行列を求め, 行列  $A$  を対角化せよ. 計算経過も記入せよ.
- (3)  $A = B^3$  を満たす行列  $B$  を 1 つ求めよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156102)

**0.38** 平面上の, 曲線  $y^2 = x - 1$ , および, 直線  $y = x - 3$ , について下の問いに答えよ.

- (1) これらの曲線と直線で囲まれた図形  $S$  の面積を求めよ. 計算経過も記入せよ.
- (2) (1) の図形  $S$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156103)

**0.39** 平面上の閉領域  $D$  を,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$$

と定める.  $D$  における積分  $I = \int_D e^{y^2} dx dy$  について, 下の問いに答えよ.

- (1) 閉領域  $D$  を図示せよ. 途中の過程も記入せよ.
- (2) 積分  $I$  を, 累次積分  $\int_a^b \left( \int_c^d e^{y^2} dx \right) dy$  の形で表し,  $a, b, c, d$  を求めよ. なお,  $a, b, c, d$  は定数とは限らない. 計算経過も記入せよ.
- (3) 積分  $I$  の値を計算せよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156104)

**0.40** 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

- (1) 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

- (2) 次の連立 1 次方程式が解を持つときの  $a$  の値を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 2a \\ 2x + 5y + 9z = 6 \end{cases} \quad (*)$$

- (3) (2) で求めた  $a$  の値に対する連立 1 次方程式 (\*) の解を求めよ.

(宇都宮大 2016) (m20166101)

**0.41** 次の行列  $A$  について下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列  $A$  の固有値を求めよ.
- (2) 行列  $A$  が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能であるときは適当な正則行列を求めて対角化せよ.

(宇都宮大 2016) (m20166102)

**0.42** 方程式  $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 1$  の表す曲線  $C$  について, 下の問いに答えよ.

- (1) 曲線  $C$  で囲まれた図形の面積を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

- (2) 曲線  $C$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. なお, 円周率は  $\pi$  と表記し, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2016) (m20166103)

**0.43** 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

- (1) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = 0 \quad (*1)$$

の一般解を求めよ.

- (2) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = x^2 - 8 \quad (*2)$$

の一般解を求めよ.

- (3) 微分方程式

$$2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 3\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = e^{-2x} \quad (*3)$$

の一般解を求めよ.

(宇都宮大 2016) (m20166104)

**0.44** 次の行列  $A$  について, 下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列  $A$  の固有値と, その固有値に対する固有ベクトルを求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.  
 (2) 行列  $A$  が対角化可能であるかを調べ, 対角化可能であるときは行列  $A$  を適当な正則行列で対角化せよ. なお, 計算過程も記入せよ.  
 (3)  $A^n$  を求めよ. ここで,  $n$  は自然数とする. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019) (m20196101)

**0.45**  $a, b$  を正の実定数とするとき, 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + a^2y^2 = b^2 \quad (2-1)$$

について, 下の問いに答えよ.

- (1)  $\alpha (\alpha \neq 0)$ ,  $\beta$  を実定数,  $C$  を積分定数とするとき, つぎの不定積分が成り立つことを示せ.

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \log_e |\alpha x + \beta| + C \quad (2-2)$$

- (2) 微分方程式 (2-1) の一般解を  $y$  について解け. なお, 計算過程も記入せよ.  
 (3) 微分方程式 (2-1) を条件  $x = 0, y = 0$  のもとで  $y$  について解いた特殊解を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.  
 (4) (3) で求めた特殊解は,  $x$  が十分に大きいとき一定の値に近づく. この一定の値を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019) (m20196102)

**0.46** 曲線  $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  と直線  $y = x, x = 1, x = 4$  で囲まれた図形を  $A$  とする.

下の問いに答えよ

- (1) 図形  $A$  の面積を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(2) 図形  $A$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2019) (m20196103)

0.47 行列  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  について, 以下の問いに答えなさい.

(1)  $A^2 - A + 4E = O$  が成り立つことを示しなさい. ただし,  $E$  および  $O$  はそれぞれ, 2 次の単位行列および 2 次の零行列とする.

(2)  $A^6$  を求めなさい.

(3)  $A^{-1}$  を求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196104)

0.48 3 次方程式  $x^3 - 2ax^2 + 3 = 0$  について, 異なる実数解の個数が実数定数  $a$  の値によってどのように変わるかを調べなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196105)

0.49  $x-y$  平面上の曲線  $4x^2 + y^2 = 4$  に囲まれた図形を  $x$  軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196106)

0.50 「正規分布」とはどのような分布か説明しなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196107)

0.51 縦が  $6\text{cm}$ , 横が  $8\text{cm}$  の長方形において, 各辺の長さを  $0.1\text{cm}$  伸ばしたときの対角線の長さの増加量の近似値を全微分を用いて求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196108)

0.52  $\frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{tx(1+t^2)}$  の一般解を求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196109)

0.53 次の行列  $A$  について, 下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(1) 行列  $A$  の行列式の値が 1 となるときの  $a$  の値を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(2) (1) で求めた  $a$  の値に対する, 行列  $A$  の逆行列を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020) (m20206101)

0.54 次の行列  $B$  について, 下の問いに答えよ.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1) 行列  $B$  の固有値と固有ベクトルを求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(2) 行列  $B$  は対角化が可能であるか調べよ, 対角化が可能であるならば適当な正則行列を求めて行列  $B$  を対角化せよ. なお, 計算過程も記入せよ.



0.55 実数  $a > 1$  として下の問いに答えよ.

- (1) 曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $1 \leq x \leq a$ ) を  $x$  軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積  $V(a)$  を求めよ.
- (2) 曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $1 \leq x \leq a$ ) を  $x$  軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積  $S(a)$  の式を記述し,  $2\pi \int_1^a \frac{dx}{x}$  より大きいことを示せ. なお, 計算過程も記入せよ.
- (3) (1) と (2) で求めた  $V(a), S(a)$  に対して  $a$  を無限大に近づけたとき, おおのこの極限を求めよ.

(宇都宮大 2020) (m20206103)

0.56  $x$  の関数  $u, v$  の第  $n$  次までの導関数が連続ならば, 部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned} \int uv^{(n)} dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)} dx \\ &= uv^{(n-2)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)} dx \\ &= \dots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \dots \\ &\quad + (-1)^{(n-2)} u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)} u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v dx \end{aligned}$$

が成り立つ. このことを利用して下の問いに答えよ.

- (1)  $u = (b-x)^{n-1}$  としたとき,  $u', u'', \dots, u^{(n-2)}, u^{(n-1)}, u^{(n)}$  を求めよ.
- (2)  $u = (b-x)^{n-1}, v = f(x)$  としたとき, 上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ.
- (3) (2) の結果において積分範囲を  $[a, b]$  として定積分を求め,  $x = b$  のとき 0 になる項を整理して  $f(b)$  についてのテイラー展開の式を求めよ. 剰余項は積分形のままでよい. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020) (m20206104)

0.57 次の行列について, 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1)  $A^2 - 5A + 6E = O$  が成り立つことを示せ. ここで,  $E$  と  $O$  は, それぞれ, 2 次の単位行列と 2 次の零行列である.
- (2)  $A^6$  を求めよ.
- (3)  $A^n$  を求めよ. ただし,  $n$  は自然数である.

(宇都宮大 2022) (m20226101)

0.58 次のベクトルについて, 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1)  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  は 3 次元のユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の基底になることを示せ.
- (2)  $\vec{x}_1$  を正規化したベクトル  $\vec{y}_1$  を求めよ

- (3)  $\vec{y}_1, \vec{x}_2$  の一次結合で,  $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$  となるベクトル  $\vec{y}_2$  を求めよ. ただし,  $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1$  は  $\vec{y}_2$  と  $\vec{y}_1$  の内積を表し,  $|\vec{y}_2| = 1$  とする.
- (4)  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3$  の一次結合で,  $\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0$  かつ  $\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0$  となるベクトル  $\vec{y}_3$  を求めよ. ただし,  $|\vec{y}_3| = 1$  とする.

(宇都宮大 2022) (m20226102)

**0.59** 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

- (1) 半径 1 の円の内接正 12 角形の周長を求めよ.
- (2) 半径 1 の円の外接正 12 角形の周長を求めよ.
- (3) 上記の結果を用いて, 円周率  $\pi$  が 3.05 より大きく 3.25 より小さいことを証明せよ.

(宇都宮大 2022) (m20226103)

**0.60**  $\log x$  は自然対数を表すものとして, 下の問いに答えよ.

問 1  $C$  を積分定数とするとき, 積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ.

問 2 問 1 の公式を用いて関数  $y = y(x)$  に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1 + y^2}$$

の一般解を求め, さらに  $x = 0$  のとき  $y = 0$  となるもの (特殊解) を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

問 3 問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y dx$$

を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2022) (m20226104)