[選択項目] 年度：1991〜2023 年　大学：山梨大

0.1 $\dfrac{d\sin^{-1}x}{dx}$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　(m20021801)

0.2 $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{x}dx$ を計算せよ．

(山梨大 2002)　(m20021802)

0.3 $f(x,y)=x^2y$ として，次の問に答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 領域 $D=\{(x,y)\mid y\geqq x,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ を xy–平面上に図示せよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．

(山梨大 2002)　(m20021803)

0.4 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ の解を求めよ．

(山梨大 2002)　(m20021804)

0.5 (1) $1+x^3$ を実数の範囲で因数分解せよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}dx$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^3$ を解け．

(山梨大 2002)　(m20021805)

0.6 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 $A=(f_{ij}(x))$ の微分を，$\dfrac{dA}{dx}=\left(\dfrac{df_{ij}(x)}{dx}\right)$ となる n 次行列と決める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 微分可能な関数を成分とする n 次正方行列 A,B に対し，$\dfrac{dAB}{dx}=\dfrac{dA}{dx}B+A\dfrac{dB}{dx}$ が成立することを示せ．

(2) $\dfrac{dA^{-1}}{dx}=-A^{-1}\dfrac{dA}{dx}A^{-1}$ が成立することを示せ．

(山梨大 2002)　(m20021806)

0.7 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ．

(山梨大 2002)　(m20021807)

0.8 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ．

(山梨大 2003)　(m20031801)

0.9 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ．

（山梨大 2003）　(m20031802)

0.10 (1) 領域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$ を図示せよ．

(2) $\displaystyle\iint_D xydydx$ を求めよ．

(山梨大 2003)　(m20031803)

0.11 ベクトルの内積 $(2-i, 3+i, 4-i)\cdot(1-i, 2, -3i)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(山梨大 2003) (m20031804)

0.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ．

（山梨大 2003） (m20031805)

0.13 2 次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y = 5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える．また，基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする．また，直線 $y = 5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする．即ち， $f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で，S, T, s, t は実数．このとき，S, T を s, t を用いた式で表せ．

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ．

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ．

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し，行列 F を求めよ．

(山梨大 2003) (m20031806)

0.14 2 つのベクトル $(-1, 2, 5)$ と $(1, -3, 5)$ との外積を求めよ．

（山梨大 2003） (m20031807)

0.15 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ を求めよ．

(山梨大 2004) (m20041801)

0.16 不定積分 $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$ を求めよ．

（山梨大 2004） (m20041802)

0.17 $f(x, y) = x\arcsin y + y\arccos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．ただし，$\arcsin y$, $\arccos x$ は，逆三角関数である．

(山梨大 2004) (m20041803)

0.18 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，A の行列式の値および逆行列を求めよ．

(山梨大 2004) (m20041804)

0.19 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(山梨大 2004) (m20041805)

0.20 2 つのベクトル $(3, -2, 1)$ と $(-2, 5, 4)$ との外積を求めよ．

(山梨大 2004) (m20041806)

0.21 下記に示す 4 × 4 行列 $\boldsymbol{A}$ が逆行列をもつための条件を導け.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(山梨大 2005) (m20051801)

0.22 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2005) (m20051802)

0.23 2 次の実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその転置行列（ A の行と列を入れ替えた行列 ）${}^tA$ について次の問いに答えよ.

(1) $A = {}^tA$ となる条件を, a, b, c, d を用いて表せ.

(2) $A = {}^tA$ となるとき, A の固有値は実数であることを示せ.

(山梨大 2005) (m20051803)

0.24 (1) $f(x, y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ を求めよ.

(山梨大 2005) (m20051804)

0.25 $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 7$ とする. 点 $(1, 2)$ での曲面 $f(x, y) = 0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005) (m20051805)

0.26 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061801)

0.27 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ と行列 $B = \begin{pmatrix} d & e \\ 1 & f \end{pmatrix}$ が $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たしているとき, 次の問に答えなさい.

(1) $b = c = 0$ のとき, $CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる零行列でない 2 次の正方行列 C を一つ求めなさい.

(2) ある零行列でない 2 次の正方行列 D で $DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示しなさい.

(3) 行列 A の行列式の値を求めなさい.

(4) A の固有値を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061802)

0.28 不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$ を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061803)

0.29 (1) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を $xy-$ 平面に図示しなさい.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061804)

0.30 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2007) (m20071801)

0.31 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を考えるとき, A が逆行列をもつために必要かつ十分な $a,\ b,\ c$ についての条件を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071802)

0.32 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ が異なる固有値をもたないような k の値をすべて求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071803)

0.33 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$ を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071804)

0.34 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(\lambda x + \mu)dx$ を求め, 定数 $\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu$ の式で表しなさい. ただし, $\lambda \neq 0$ とする.

(山梨大 2007) (m20071805)

0.35 座標平面上の領域 $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき, D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x \sin y\, dxdy$ の値を求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071806)

0.36 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 1024 桁の 2 進数の非負の整数が表す数の個数を 10 進数で表すと, 最大で何桁になるか求めよ.

(2) 1024 桁の 2 進数の非負の整数と 100 桁の 3 進数の非負の整数の積で表される数の個数を 10 進数で表すと, 最大で何桁になるか求めよ.

(山梨大 2007) (m20071807)

0.37 次の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めなさい. (2) A の固有ベクトルを求めなさい.

(山梨大 2007) (m20071808)

0.38 n を自然数とするとき, $2^{2n+1} + 1$ が 3 で割り切れることを, 数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 2007) (m20071809)

0.39 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_2 - 3x_2 + \ \ x_3 = 3 \end{cases}$ を解きなさい.

(山梨大 2008) (m20081801)

0.40 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問 (1)(2) に答えなさい．

(1) A^2, A^3 を求め，さらに A^{10}を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値をすべて求めなさい．

(山梨大 2008) (m20081802)

0.41 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x^2)}{x}$ を求めなさい．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(山梨大 2008) (m20081803)

0.42 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \cos x \, dx$ を α の式で表しなさい．

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x) \, dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2008) (m20081804)

0.43 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$ を解きなさい．

(山梨大 2009) (m20091801)

0.44 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える．

ただし，θ は任意の実数とする．

(1) A の固有値をすべて求めなさい．

(2) $\boldsymbol{V}$ は A の一つの固有ベクトルであることを示し，固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する A の固有値を求めなさい．

(山梨大 2009) (m20091802)

0.45 関数 $f(x) = \sqrt{x} - \log x \quad (x > 0)$ を考える．ただし，対数関数は自然対数によるものとする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極小値を求めなさい．

(山梨大 2009) (m20091803)

0.46 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y \, dxdy$ を求め，α の式で表しなさい．

(山梨大 2009) (m20091804)

0.47 次の行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2009) (m20091805)

0.48 n を自然数とするとき,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ.

(山梨大 2009) (m20091806)

0.49 次の 3 つの命題を仮定する.

$\boldsymbol{S}_1$: 犯人は悪代官である.

$\boldsymbol{S}_2$: 水戸黄門は歓迎される.

$\boldsymbol{S}_3$: 悪代官は歓迎されない.

これらの命題から得られる結論をすべて述べよ.

(山梨大 2009) (m20091807)

0.50 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2010) (m20101801)

0.51 ベクトル空間 V, W とその間の線形写像を $f : V \to W$ として, 次の問に答えなさい.

(1) V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラーを k, ℓ とするとき, f が線形写像である定義式を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および k, ℓ を用いて表しなさい.

(2) V を基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を持つ 2 次元実ベクトル空間, W を基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を持つ 3 次元実ベクトル空間とする.

$f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$, $f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 - 6\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3$ とすると,

f の像と核は原点を通る直線（1 次元実ベクトル空間）であることを示し, この直線を求めなさい.

(山梨大 2010) (m20101802)

0.52 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x) = x^3$ の導関数は $f'(x) = 3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 2010) (m20101803)

0.53 定積分 $\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-1}\,dx$ の値を求めなさい.

(山梨大 2010) (m20101804)

0.54 $f(x, y) = x^2 + xy$ とする. $x^2 + y^2 = 4$ を満たす (x, y) での $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めなさい.

(山梨大 2010) (m20101805)

0.55 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルを求める際, 適当な定数を用いてもかまいません.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 前問で求めた固有ベクトルを列として並べた行列を P とします. 逆行列 P^{-1} を求めなさい.

(3) 前問で求めた P^{-1} を用いて, $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(4) 前問で求めた $P^{-1}AP$ を計算することにより, A^N を求めたい. どのようにしたら求められるか方針を示し, そのあと具体的に計算しなさい.

(山梨大 2010) (m20101806)

0.56 以下の関数に対して, $x = 0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい.

$$f(x) = \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(山梨大 2010) (m20101807)

0.57 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

(山梨大 2010) (m20101808)

0.58 行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として, 次の問に答えなさい.

(1) $\boldsymbol{v}$ は A の固有ベクトルであることを示しなさい. また, その固有値を求めなさい.

(2) A の行列式 $|A|$ を計算し, この式を因数分解した式で表しなさい.

(3) x, y, z を実数とするとき, $x + y + z \geqq 0$ なら $|A| \geqq 0$ を示しなさい.

(山梨大 2011) (m20111801)

0.59 2 変数関数 $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int g(x, 1)dx$ を求めなさい.

(2) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき, 二重積分

$$\iint_D g(x, y)dxdy$$

の値を求めなさい.

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ を満たす点 (x, y) を求めなさい.

(4) 上記の領域 D での $g(x, y)$ の最大値を求めなさい.

(山梨大 2011) (m20111802)

0.60 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011) (m20111803)

0.61 次の4つのベクトルの中から．一次独立なものは最大でいくつ取ることができるか答えなさい．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011)　　(m20111804)

0.62 関数 $f(x) = \log(1+\sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111805)

0.63 関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3$ の極値を求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111806)

0.64 領域 $D = \{(x,y) \mid x-y \leqq 1,\ x+y \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ に対し，2重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}\,dxdy$ を求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111807)

0.65 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ の値を求めなさい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121801)

0.66 偏微分 $\displaystyle\frac{\partial^2 \sin^2(x^2y)}{\partial y\,\partial x}$ を求めなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121802)

0.67 次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(山梨大 2012)　　(m20121803)

0.68 次の問に答えなさい．

(1) 次の行列 A の固有値とその固有ベクトル空間を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 A は対角化可能か否かを判定し，対角化可能ならば A を対角化しなさい．

(山梨大 2012)　　(m20121804)

0.69 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．また，A が対角化できるかどうか判定して，対角化できる場合は対角化しなさい．

(山梨大 2013)　　(m20131801)

0.70 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & b & a \\ 0 & b & (a+1)^2 & ab \\ 0 & a & ab & (b+1)^2 \end{pmatrix}$ を考えるとき，A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b についての条件を求めなさい.

(山梨大 2013)　　(m20131802)

0.71 領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 4x\ ,\ y \geqq 0\}$ における二重積分

$$\iint_D y^2\, dxdy$$

の値を求めなさい.

(山梨大 2013)　　(m20131803)

0.72 次の微分方程式を解きなさい.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{2x+y}$$

(山梨大 2013)　　(m20131804)

0.73 $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ を対角化し，A^n を n で表せ.

(山梨大 2015)　　(m20151801)

0.74 1 から 6 の目のサイコロがある．各目がでる確率を同じとする. 次の問いに答えよ.

(1) 4 個のサイコロを同時に振ったとき，目が互いに異なる確率を求めよ.

(2) 3 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和が 6 である確率を求めよ.

(3) 2 個のサイコロを同時に振ったとき，サイコロの目の和の期待値と分散を求めよ.

(山梨大 2015)　　(m20151802)

0.75 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} \geq \sqrt{n}$

(山梨大 2015)　　(m20151803)

0.76 x, y を実数としたとき，次のそれぞれが「$x^2+y^2 \leq 1$」に対して「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「いずれでもない」のうちいずれかを答えよ.

(1) $x \leq 1/2$ または $y \leq 1/2$

(2) $|x| \leq 1$ かつ $y \leq \sqrt{1-x^2}$ かつ $y \geq -\sqrt{1-x^2}$

(3) $|xy| \leq 1/2$

(4) $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ かつ $|y| \leq 1/\sqrt{2}$

(山梨大 2016)　　(m20161801)

0.77 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交し，かつ大きさを 1 とする.

(山梨大 2016)　　(m20161802)

0.78 コインの表裏を出す確率事象に対して，表がでる確率が 0.1 で裏がでる確率が 0.9 であるとする．この事象を n 回行う試行を考える．

n 回の試行を行ったとき，表が k 回出現する確率分布 $P(k)$ が次式で与えられることを示せ．

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{ただし } p = 0.1$$

n が 100 であるとき，k に関して $P(k)$ が，$k = 10$ で最大になることを示せ．

(山梨大 2016)　　(m20161803)

0.79 (1) 関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ．

$f(x) = (1+x)^k$ (k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい．

(2) n 回微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい．

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i f^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.80 方程式 $z = f(x,y) = x^2 + g(y) - 1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ．

但し，$g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1) 点 $(1, s, f(1,s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ．

(2) 接平面 S' の z 軸切片が $z = -3s^4 + 2s^2 - 1$ であるとき，$g(y)$ を求めよ．

(3) $z = f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ に停留点を持つとする． このとき，(2) で求めた $g(y)$ を用いて，$z = f(x,y)$ が極大または極小となる (x,y) およびそのときの極値を全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.81 N 行 N 列の単位行列を E と表し，N 行 N 列の行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と定義する．N は 1 以外の自然数であるとして，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A^2 および $AA^\dagger$ の成分を，$(*)$ にならって示せ．ここで，$\dagger$ は転置行列を表す．

(2) $A^n = A$ を満たす 1 以外の最小の自然数 n を求めよ．

(3) e_n をその第 n 成分が 1，それ以外の成分は 0 である N 次元空間の基本ベクトルとする ($n = 1, 2, \cdots, N$)． このとき，Ae_n および $A^\dagger e_n$ を基本ベクトルを用いて表せ．

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161806)

0.82 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x_i)$ と時間 t の関数として，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が与えられているとき，次の設問に答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{A}$ の成分 A_i (但し，$i = 1, 2, 3$) を用いて，
(a) $\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}$　(b) $\bigtriangledown \times \boldsymbol{A}$　(c) $\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown \boldsymbol{A} \equiv \bigtriangledown^2 \boldsymbol{A}$ を表せ．

(2) $\bigtriangledown \times \bigtriangledown \times \boldsymbol{A} = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}) - \bigtriangledown^2 \boldsymbol{A}$ という関係が成り立つことを，i 成分について示せ．

(3) $\bigtriangledown \times \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ および $\bigtriangledown \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ から，$\boldsymbol{E}$ を消去して $\boldsymbol{B}$ の満たす方程式を求めよ．但し，c はゼロでない定数とする．

(4) $\boldsymbol{B} = \bigtriangledown \times \boldsymbol{A}$ かつ $\bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A} = 0$ が成り立つとき，(2) と (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式を求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161807)

0.83 3 次元空間の曲線 $x = 0$，かつ　$z = y^2$　$(0 \leqq y \leqq 2)$ を z 軸のまわりに回転させてできる曲面を考える．この曲面を内面とする容器を z 軸の正方向が鉛直上向きになるように置き，単位時間当たり体積 V_0（定数）の水を容器が完全に満たされるまで注ぎ入れる．このとき，次の設問に答えよ．

(1) 容器の底から水面までの高さが h のとき，容器内の水の体積 V を求めよ．

(2) 空の容器に水を注ぎ入れ始めてから時間 t 後の容器の底から水面までの高さを t の関数 $h(t)$ と表す．$h(t)$ に対する微分方程式を導け．また，それを解いて $h(t)$ を求めよ．

(3) 容器を完全に満たしてから静かに 45 度傾けたとき，容器内に残る水の体積を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171801)

0.84 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$　$(n = 1, 2, 3)$ を考える．$f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，$i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x + 1\right)$，$f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x - 1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$, $(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$　($a,\ b$ は定数) とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$, $(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ．

(3) $f_i(-x) = M f_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く．M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ．

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.85 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ．

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ．

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ．

(3) 設問 (1)，(2) と同様にして，x 軸，y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon)$, $R_y(\epsilon)$ を，それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ．

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き，$[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする．このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で，単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ．

(山梨大 2017)　　(m20171803)

0.86 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $f(x) = x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.87 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.88 z は複素数で，$z^n = 1$ を満たす 1 の n 乗根（但し，n は自然数）であるとする．このとき，以下の小問に答えよ．

(1) 全ての z（n 乗根）を求めよ．また要点を押さえて，n 乗根の概略を複素平面上に図示せよ．

(2) 1 でない n 乗根の一つを ω とし，ω^2, $\cdots$, ω^{n-1} のいずれも 1 でないとする．また，m が自然数で n の倍数でないとき，次の 2 式 P, S_m の値を求めよ．

$$P = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\ ,$$

$$S_m = 1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m}\ .$$

(3) $n = 10$ の場合を考え，ω, ω^2, ω^3, $\cdots$, ω^9 がいずれも 1 にならないような ω はいくつあるか求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181803)

0.89 命題の証明に関する以下の問いに答えなさい．

(1) p と q を命題とする．命題 $p \to q$ が真であることを証明するために，下表に示す 3 つの方法がある．直接法に関する説明を参考にして，対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい．

直接法	pを真と仮定して, qが真であることを証明する.
対偶法	（解答用紙に説明しなさい）
背理法	（解答用紙に説明しなさい）

(2) 命題関数 $P(n)$ を「最初の n 個の正の奇数の和は n^2 である」とする．すべての正の奇数 n に対して $P(n)$ が真であることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181804)

0.90 2 つの箱 A, B があって，箱 A には赤玉 1 個と白玉 5 個，箱 B には赤玉 5 個と白玉 1 個が入っている．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したとき，その玉が赤玉である確率を求めなさい．

(2) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出し, 元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出す．このとき，2 回連続して赤玉である確率を求めなさい．

(3) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したら赤玉であった．その玉を元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出したとき，赤玉である確率を求めなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181805)

0.91 x, y を実数としたとき，命題 A「$x^2+y^2 \leq 1$」と命題 B「$y^2 \leq x$」に対して答えよ．

(1) それぞれ A と B が真である x, y の領域を図示せよ．

(2) A と B が同時に真である x, y の領域を図示せよ．

(3) A または B が真である x, y の領域を図示せよ．

(4) 「A と B の否定」あるいは「A の否定と B」が真である x, y の領域を図示せよ．

(山梨大 2018)　　(m20181806)

0.92 $a > 0$ をパラメータとした行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさを 1 とする．さらに $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を求めよ．ここで n は任意の自然数である．

(山梨大 2018)　　(m20181807)

0.93 連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている．

$$p(x) = \begin{cases} 0 & for\ \ x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & for\ \ -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & for\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & for\ \ 2 \leq x \end{cases}$$

(1) この確率分布に対して，平均値 m と分散 σ^2 を求めよ．

(2) 不等式 $P(|X-m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ．
なお $P(|X-m| \geq 1)$ は確率変数 X が平均値より 1 以上離れている事象の確率である．

(山梨大 2018)　　(m20181808)

0.94 整数 n，正数 b に対して，$I_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \sin nx\,dx$, $R_n = \displaystyle\int_{-b}^{b} e^x \cos nx\,dx$ とおく．次の小問に答えよ．

(1) $I_n + nR_n$ を求めよ．

(2) $R_n - nI_n$ を求めよ．

(3) I_n と R_n を求めよ．

(4) $b = \pi$ のとき，I_n と R_n を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191801)

0.95 a, b, c, d を互いに異なる実数として，次の小問に答えよ．

(1) 次に示す行列式の値を求めよ．

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

(2) 4 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ を

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}$$

と定義する．また，x_1, x_2, x_3, x_4 を方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 + x_4\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

を満たす未知数とする． このとき， 自明でない未知数 x_1， x_2， x_3， x_4 を求めよ． また，$\boldsymbol{u}_1$， $\boldsymbol{u}_2$， $\boldsymbol{u}_3$， $\boldsymbol{u}_4$ の中で 1 次独立なベクトルの組をひとつ示せ． ただし，$\boldsymbol{0}$ は 3 次元のゼロベクトルである．

(山梨大 2019)　　(m20191802)

0.96 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε, α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ により α を変換せよ．

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.97 40 名のクラスについて，選択科目 A, B, C の履修状況は以下のとおりである．

・科目 A, B, C のそれぞれの履修者は 18 名である．

・少なくとも科目 A と B を履修している学生は 9 名である．

・少なくとも科目 A と C を履修している学生は 8 名である．

・少なくとも科目 B と C を履修している学生は 5 名である．

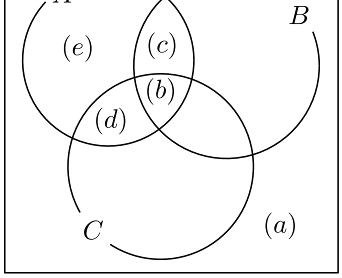
・1 科目以上を履修している学生は 35 名である．

右のベン図における領域のうち，以下の (a)〜(e) に

該当する人数を求めなさい．

(a) 1 科目も履修していない学生

(b) 3 科目履修している学生



(c) 2 科目 A と B のみを履修している学生

(d) 2 科目 A と C のみを履修している学生

(e) 1 科目 A のみを履修している学生

(山梨大 2019)　　(m20191804)

0.98 (1) 正四面体のサイコロとは，正四面体の 4 頂点に 1〜4 の数値が割り当てられており，上の頂点の数値を出目とするサイコロである．出目を確率変数 X とすると，その確率分布表は以下のとおりである．

X	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

さて，2 個の正四面体サイコロを振り，2 つの出目の和を Y とする．まず，確率変数 Y について確率分布表を求めなさい．そして，Y の期待値を求めなさい．

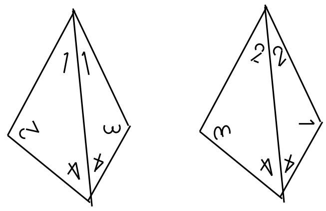


図 正四面体のサイコロ
（左のサイコロの出目は 1 で，
右の出目は 2 である）

(2) n 人がいるとき，少なくとも 2 人の誕生日が同じ月日である確率を求めなさい．
ただし，$1 < n < 365$ とし，うるう年は考えないこととする．

(山梨大 2019)　　(m20191805)

0.99 推移律の成立とは，集合の任意の要素，A, B, C に対し関係 (A, B) と関係 (B, C) がともに真ならば，関係 (A, C) が真になることである．

例えば，「集合:整数，関係 (A, B):A は B より小さい」において，推移律は成立する．

次の集合，関係について推移律が成立するかどうか，具体例をあげて述べよ．

(1) 「集合:整数，関係 (A, B):A は B より 10 以上大きい」

(2) 「集合:整数，関係 (A, B):A と B の差の絶対値は 1 である」

(3) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A は B と原点を結ぶ直線上にある」

(4) 「集合:3 次元空間，関係 (A, B):A と B との距離が 1 未満である」

(山梨大 2019)　　(m20191806)

0.100 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A が逆行列を持たないことを示せ．

(2) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191807)

0.101 互いに独立な確率変数 X と確率変数 Y が区間 $(0,\ 1)$ で一様連続分布に従う．確率変数 Z がこれらの和 $Z = X + Y$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) Z の値 z が 1 より小さいとき，確率密度関数は $p(z) = z$ であることを示せ．

(2) Z の値 z が 1 より大きいとき，確率密度関数は $p(z) = 2 - z$ であることを示せ．

(3) Z の平均値，分散を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191808)

0.102 次の行列 A を考えます．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2020)　　(m20201801)

0.103 以下の式を考える．

$$AX = B$$

ここで，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$，$X = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$，$B = [1,3,5]^T$ である．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) $x_1,\ x_2,\ x_3$ を求めよ;

(山梨大 2020)　　(m20201802)

0.104 連続的な確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられたとする．

$$f(x) = \begin{cases} ax(6-x) & (0 \leq x \leq 6) \\ 0 & (x < 0,\ x > 6) \end{cases}$$

(1) 定数 a の値を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散値 $V(X)$ をそれぞれ求めよ．

(山梨大 2020)　　(m20201803)

0.105 ${}_nC_r$ $(0 \leq r \leq n)$ は式 (1)-(3) で与えられる．

$$ {}_nC_0 = 1 \tag{1}$$

$$ {}_nC_n = 1 \tag{2}$$

$$ {}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \qquad (1 \leq r \leq n) \tag{3}$$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ．

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \tag{4}$$

(山梨大 2020)　　(m20201804)

0.106 10 進表記の $m(m \geq 1)$ 桁の自然数 n の各位の数字を $d_i(1 \leq i \leq m,\ 0 \leq d_i \leq 9)$ と表すものとし，$r(n)$ を以下と定義する．

$$r(n) = \sum_{i=1}^{m} d_i$$

このとき，$r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ．

(山梨大 2021)　　(m20211801)

0.107 ある会社は，A，B，C 社から同じ製品を $2:3:5$ の比率で購入している．A，B，C 社の製品にはそれぞれ 2.5%，1.5%，1.0% の割合で不良品が含まれていることがわかっている．

このとき，次の (a)〜(b) に答えよ．

(a) 購入した製品の中から任意に取り出した製品 1 個が不良品である確率を求めよ．

(b) 購入した製品の中から任意に 1 個を取り出したところ，不良品であった．取り出した不良品が，① A 社の製品である確率，② B 社の製品である確率，　③ C 社の製品である確率をそれぞれ求めよ．

(山梨大 2021)　　(m20211802)

0.108 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ について，(a)〜(c) に答えよ．

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の固有値とその固有ベクトルを求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(c) 行列 A を対角化する行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2021)　　(m20211803)

0.109 以下の式を考える．

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

ここで，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，　$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，　$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$，

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$，　$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$　とする．

(1) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 上式を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ．

(山梨大 2023)　　(m20231801)

0.110 目が「-1」,「0」,「1」,「2」にふられた 4 面体のサイコロを考える．

ただし，「-1」,「0」,「1」の出目は同じ確率で出現するが，「2」の出目は他の 2 倍の確率で出現するものとする．

(1) このサイコロを 1 回振ったときの出目の期待値と分散を求めよ．

(2) このサイコロを n 回振ったときの出目の合計値の期待値と分散を求めよ．

(3) このサイコロを 2 回振ったときの出目を掛け合わせた積の値の確率分布をグラフに示せ．ただし，範囲は -4 から 5 の間とする．

(山梨大 2023)　　(m20231802)

0.111 任意の点 $P(x,y)$ が以下の関数により点 $Q(u,v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，x,y は任意の実数とする．

$$u = \frac{2}{\pi}x$$

$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ．

(2) 点 P が $(0,1) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right) \to \left(\dfrac{3\pi}{2}, 3\right) \to (0,3) \to (0,1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ．

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ．

(山梨大 2023)　　(m20231803)