作成責任者：軽井沢数学 IC 数学教育研究所 所長 碓氷長 (91 歳)

0.1 $f(x)$ は x の多項式で，等式 $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) - f(x-1) = (2x-1)^3 \end{cases}$ を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 次の級数の和を計算せよ．

$$(\sin x + 1)^3 + (\sin x + 3)^3 + (\sin x + 5)^3 + \cdots + (\sin x + 2n - 1)^3$$

(東北大 1993)　(m19930501)

0.2 放物線
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \qquad (*)$$
の上の点 $P(a, b)$ において，放物線より上側に中心 $Q(X, Y)$ をもつ半径 $\sqrt{(a-1)^2 + 1}$ の円 C が接している．次の問いに答えよ．

(1) 円 C の中心 Q の座標 (X, Y) を a で表せ．

(2) 点 P が放物線 $(*)$ 上を動くとき，円 C の中心 Q が描く曲線の方程式を求めよ．

(3) 中心 Q が直線 $x + 2y = 6$ に最も近づくとき，中心 Q の座標 (X, Y) を求めよ．

(東北大 1993)　(m19930502)

0.3 なめらかな曲線 $y = f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線上の点 $P(a, b)$ における法線と x 軸との交点の座標が $(\frac{1}{2}(a+b^2), 0)$ であるとき，関数 $y = f(x)$ の満たす微分方程式を導け．

(2) (1) の微分方程式を満たし，点 $(0, 2)$ を通る曲線の方程式を求めよ．また，$-3 \leq x \leq 1$ において，この曲線の概形を描け．必要ならば，$e = 2.718\cdots$，$e^{-1} = 0.367\cdots$，$e^{-1.5} = 0.223\cdots$ を使ってもよい．

(東北大 1993)　(m19930503)

0.4 2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q = I - P$ について，次の問いに答えよ．ただし，I は 2 行 2 列の単位行列である．

(1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き，そのとき P^{-1} を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$Q^n = (p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ．

(3) $|P + q - 1| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} P^n$ を求めよ．

(東北大 1993)　(m19930504)

0.5 連立常微分方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases}$$
について，下記の問に答えよ．

(1) x-y 面上での平衡点を求めよ．

(2) $t = 0$ で $x = 1$，$y = 2$ とするとき，x と y の関係式を求めよ．

(3) 前問 (2) で，x と y の取り得る最大の値を求めよ．

(4) $t = 0$ で x，y が共に正のとき，解が周期解になることを説明し，1 周期における x と y の平均（t に関する平均）を求めよ．

(横浜国立大 1993)　(m19931101)

0.6 3次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0<\theta<\pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径1の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993） (m19931102)