[選択項目] 年度：1994 年

0.1 不等式 $\log_{1/2} x > -3$ を満足する x の範囲を求めよ．

(岩手大 1994) (m19940301)

0.2 $\sin\theta + \cos\theta = 1/3$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta + 1/\tan\theta$

(岩手大 1994) (m19940302)

0.3 放物線 $y^2 = 4x$ の焦点を F，この放物線上の頂点以外の任意の点を $P(x_1, y_1)$，P から x 軸に下ろした垂線の足を H，点 $(-x_1, 0)$ を Q とする．以下の問に答えよ．

(1) $PF = QF$ であることを示せ．

(2) 直線 PQ は，点 P において放物線に接することを示せ．

(岩手大 1994) (m19940303)

0.4 次の関数を微分せよ．

(1) $y = x\cos^2 x$ (2) $y = (x^2 - 1)\, e^{2x}$ (3) $y = \log(2 - x)$

(岩手大 1994) (m19940304)

0.5 次の関数の極値とそのときの x の値，および変曲点における関数の値と x の値を求めよ．ただし，極値については極大であるか極小であるかを明記せよ．

(1) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

(2) $f(x) = 1/(1 + x^2)$

(岩手大 1994) (m19940305)

0.6 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x dx$ (2) $\displaystyle\int (x+1)\log x\ dx$ (3) $\displaystyle\int e^{-3x} dx$

(岩手大 1994) (m19940306)

0.7 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \exp[-(x-t)^2] dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_n}} \exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ． $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994) (m19940307)

0.8 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が，次のような行列 A で表されるとする．

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また，x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする．次の各問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は，1次変換 f により，どのようなベクトルに移されるか．

$$x_1 = e_1 + e_3, \qquad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような3つのベクトル ${e_1}', {e_2}', {e_3}'$ を考える．

$${e_1}' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \qquad {e_2}' = e_2, \qquad {e_3}' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

6つの内積 ${e_1}'\cdot{e_1}'$, ${e_2}'\cdot{e_2}'$, ${e_3}'\cdot{e_3}'$, ${e_1}'\cdot{e_2}'$, ${e_2}'\cdot{e_3}'$, ${e_3}'\cdot{e_1}'$ の値を求めよ．

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から ${e_1}'$, ${e_2}'$, ${e_3}'$ に変えると，1次変換 f を表す行列は，どのような形になるか．

(5) 1次変換 f はどのような変換か，明確に述べよ．

(岩手大 1994) (m19940308)

0.9 xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x(a-x),\ 0 \leq z \leq by^2$$

ただし，a, b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1) G を平面 $x = \dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2) G の体積 V を求めよ．

(3) a と b に関係 $b = e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994) (m19940501)

0.10 関数 $f(x) > 0$ は閉区間 $[a, b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a, 0)$ と動点 $P(x, 0)$ をとる．ただし，$a < x \leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な2直線と曲線 $y = f(x)$ との交点をそれぞれ B, Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 弧 BQ の長さを求める式を書け．

(2) 曲線 $y = f(x), x$ 軸，直線 AB, 直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け．

(東北大 1994) (m19940502)

0.11 2行2列の行列 P と単位行列 E をそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} 1+\cos x & \sin x \\ \sin x & 1-\cos x \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) P^2 を計算せよ．

(2) 正整数 n に対して P^n を求めよ．

(3) 正整数 n に対して $(P+E)^n$ を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940503)

0.12 xy 平面上に 2 点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ がある．原点 O と点 P,Q は同一直線上にはなく，また $d \neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P,R を通る直線と x 軸との交点 $S(e,0)$ の x 座標 e を a,b,c,d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0,d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940504)

0.13 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$

(2) $f(x,y) = x^4(x-2)^2 + y^2$

(電気通信大 1994)　　(m19941001)

0.14 関数

$$u = x^2 - xy + y^2 \ , \qquad v = x^2 + xy + y^2$$

によって定められる (x,y) 平面から (u,v) 平面への写像 F を考える．(x,y) 平面の円の内部

$$D \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

の F による像 $E = F(D)$ の面積を求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941002)

0.15 次の連立 1 次方程式が (1) 解がない，(2) 解があってただ 1 つ，(3) 解空間の次元が 1 より大きい，の各場合 a の値を定め，(2),(3) の場合は解を求めよ．

$$\begin{cases} ax + y - 2z - w = 1 \\ x - y + z + 2w = 0 \\ 2x + y - 2z - w = -5 \\ x + z + aw = -3 \end{cases}$$

(電気通信大 1994)　　(m19941003)

0.16 今 $\mathbf{R}^4$ の要素を $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と書くことにする．その二つの部分空間 W_1 , W_2 を次のように定義する．

$$W_1 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x + 2y + 3z + 4w = 0 \ , \ 5x + 5z + 2w = 0 \right\}$$
$$W_2 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2x - y + z - w = 0 \ , \ 3x + y + 4z + 3w = 0 \right\}$$

(1) $\dim\,(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．また，$W_1 \cap W_2$ の一組の基底を求めよ．

(2) (1) で求めた基底を含む $\mathbf{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941004)

0.17 原点を中心とし，半径 2 の円周を C とするとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{9z^2+\pi^2}\,dz$$

を計算せよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941005)

0.18 xy 平面上の点 $P(x,y)$ が， $t \geqq 0$ の範囲で，次の連立微分方程式に従って移動する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -|y| \\ \dfrac{dy}{dt} = -|x| \end{cases}$$

ここで， $t=0$ で， $x=1$ ， $y=3$ とする．

(1) 第 1 象限 ($x>0$ ， $y>0$) で， x と y を t で表せ．

(2) 第 1 象限で点 P の描く曲線の方程式を求めよ．また，$x=0$ となるときの y と t を求めよ．

(3) 第 2 象限 ($x<0$ ， $y>0$) で， x と y を t で表せ．また，第 1 ，第 2 象限で点 P の描く曲線の概略を図示せよ．

(4) 点 P の描く曲線と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1994)　　(m19941101)

0.19 $xyz-$ 空間内に 4 つの頂点 A , B , C , D をもつ正 4 面体があり，その中心は原点 O と一致する． A の座標が $(-1,1,1)$ ， B の座標が $(1,-1,1)$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) 他の 2 つの頂点 C , D の座標を求めよ．

(2) 空間内の 1 次変換 f が，

$$f(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}\,,\ \ f(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}\,,\ \ f(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OD}\,,\ \ f(\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OC}$$

を満たすとき， f を標準的な xyz-空間の座標で表した行列を求めよ．

(横浜国立大 1994)　　(m19941102)

0.20 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

(千葉大 1994)　　(m19941201)

0.21 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + xy \end{cases} \qquad (\ t>0\ )$$

$$x(0)=a \quad y(0)=b$$

について，初期値 (a,b) が第 1 象限 I にあるとき，解 $\bigl(x(t),\ y(t)\bigr)$ が I に留まることを示せ．

(千葉大 1994)　　(m19941202)

0.22 次の行列 A の行列式を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(千葉大 1994)　　(m19941203)

0.23 ２次形式 $4{x_1}^2 - 12x_1x_2 + 5{x_2}^2$ を式 ${y_1}^2 - {y_2}^2$ に変換する一次変換を求めよ．

(千葉大 1994)　　(m19941204)

0.24 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について，次の問に答えよ．ただし，a, b, c は有理数とする．

(1) $a \neq 0$ として「２次方程式の解の公式」を導け．

(2) 次のような解になるための，a, b, c の条件を示せ．

（ア）１つの有理数　（イ）１つの複素数　（ウ）２つの有理数　（エ）２つの実数

（オ）２つの複素数　（カ）不定（x の値が定まらない）　（キ）矛盾している

(図書館情報大 1994)　　(m19941601)

0.25 10 進数を 2 進数に変換する方法として,「10 進数を次々に 2 で割り，その結果の余りを下から順に並べる」という方法がある．

（例）　10 進数　13　　　1101　2 進数

$$\begin{array}{lllll} & \Downarrow & & & \Uparrow \\ 2 & 13 & & & 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1 \\ 2 & \underline{)\ 6} & \cdots & 1 & \\ 2 & \underline{)\ 3} & \cdots & 0 & \\ 2 & \underline{)\ 1} & \cdots & 1 & \\ & \underline{)\ 0} & \cdots & 1 & \end{array}$$

(1) n 桁の p 進数は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, p^{i-1}, \quad 0 \leqq a_i < p, \quad a_i \text{ は 0 または自然数}$$

であることを利用して，上記の方法が正しいことを示せ．

(2) 10 進小数を 2 進小数に変換する，たとえば 10 進小数 0.625 を 2 進小数 0.101 に直す方法を示し，その方法が正しいことを示せ．

(図書館情報大 1994)　　(m19941602)

0.26 ３点の座標が $A(-1, 3, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(2, 2, -2)$ で与えられている時，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．

(図書館情報大 1994)　　(m19941603)

0.27 以下の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 1994)　　(m19941604)

0.28 次の各問いに答えよ．

(1) サイコロを３回振る．１回目，２回目，３回目に出た数をそれぞれ a, b, c とすると $a < b < c$ となるのは何通りあるか．

(2) サイコロを３回振る．１回目，２回目，３回目に出た数をそれぞれ100の位，10の位，１の位としたとき，得られた数が３の倍数になる確率を求めよ．

(3) ３桁の整数が３の倍数であるなら，各桁の数の和は３の倍数であることを示せ．

(図書館情報大 1994)　　(m19941605)

0.29 $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$ とおく．$a_n > 1000$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942101)

0.30 中心 O，半径１の円がある．円外の点 P からこの円に２本の接線を引き，O と接点 A, B とで作られる３角形 OAB の面積を S とする．P が動くときの S の最大値，およびその値を与える点 P と O との距離 $\overline{OP}$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942102)

0.31 実数 x の関数 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x-k|$ を考える．

(1) $f_3(x)$ の最小値とそれを与える x をすべて求めよ．

(2) $f_4(x)$ の最小値とそれを与える x をすべて求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942103)

0.32 微分方程式

$$(x+1)y'' + xy' - y = 0$$

を以下の手順により解け．

(1) $y = ue^{-x}$ がこの微分方程式の解になるために u が満たすべき微分方程式を求めよ．

(2) 前問で求めた微分方程式を解け．

(3) もとの微分方程式を解け．

(長岡技科大 1994)　　(m19942104)

0.33 以下の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ について，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ のなす角，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角を求めよ．

(2) 一直線上にない３つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある．A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき，次の式を証明せよ．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942105)

0.34 $f(t) = e^{-t}\cos t$, $g(t) = e^{-t}\sin t$ とするとき，

(1) $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ となる，定数を成分とする 2×2 行列 A を求めよ．

(2) 4 階の導関数 $f^{(4)}(t)$, $g^{(4)}(t)$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942106)

0.35 空間の点 (x, y, z) の平面 $z = \sqrt{3}x$ に関する対称点を (x', y', z') とする． $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942107)

0.36 次の $y_1(t)$, $y_2(t)$ に関する連立微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} & = & y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} & = & -y_1 + \cos t \end{cases}$$

(1) 上の連立微分方程式の同次方程式（第 2 式右辺の $\cos t$ が無い場合の連立微分方程式）の一般解を求めよ．

(2) 定数変化法を用いて，上の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(富山大 1994)　　(m19942301)

0.37 (1) 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$M = A + B$ となるような対称行列 A，交代行列 B を求めよ．

註：A が対称行列であるとは ${}^tA = A$ であること（${}^tA$ は A の転置行列を表す），B が交代行列であるとは ${}^tB = -B$ であることを意味する．

(2) (1) で求めた対称行列 A を，適当な直交行列 P によって対角化せよ．(直交行列 P を求める計算の過程も明示すること）

(富山大 1994)　　(m19942302)

0.38 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ という関係がある．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として，$(x, y) \to (r, \theta)$ に変数変換せよ．ただし，$f(x, y) = g(r, \theta)$

(神戸大 1994)　　(m19943801)

0.39 微分方程式

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - y}{x + y}$ を $u = \dfrac{y}{x}$ とおいて u の微分方程式にせよ．

(2) (1) の一般解を求めよ．

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \dfrac{(6x^2 - y^2 - 2)}{(x^2 + y^2 + 2)}$ の一般解を求めよ．

(神戸大 1994)　　(m19943802)

0.40 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(神戸大 1994)　　(m19943803)

0.41 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子を使って求めよ.

(神戸大 1994)　　(m19943804)

0.42 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.（変換行列も示せ）

(神戸大 1994)　　(m19943805)

0.43 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を用い，正規直交基底を求めよ.

(神戸大 1994)　　(m19943806)