0.1 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta = a_0 + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x = a\sin^2\theta \quad (a > 0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}\,dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ が，2 平面 $z = ax,\ z = -ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(東北大 1995) (m19950501)

0.2 滑らかな曲線 $y = f(x)$ 上の第 1 象限にある 1 点 P における法線が x 軸と交わる点を N とし，次の問いに答えよ．

(1) 長さ PN を求めよ．

(2) PN と点 P の y 座標の平方の比が一定値 k であるとき，点 $(0, 1/k)$ を通る曲線の方程式を求めよ．

(東北大 1995) (m19950502)

0.3 2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ から 4 行 4 列の行列

$$C = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

を作り，$C = A \otimes B$ と表わす．$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおいて，次の問いに答えよ．

(1) $X \otimes Y$, $Y \otimes X$ を求めよ．

(2) $X^{-1} \otimes Y^{-1}$ を求めよ．ただし，A^{-1} は行列 A の逆行列を表わす．

(3) (1) で求めた 4 行 4 列の行列 $X \otimes Y$ の固有値を求めよ．

(東北大 1995) (m19950503)

0.4 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = f(x) \qquad (*)$

($\lambda \neq 0$, $0 \leq x \leq l$) を境界条件 $y(0) = y(l) = 0$ の下で解け．ただし， $y = y(x)$ である．

(1) $(*)$ に付随する同次方程式が，同じ境界条件の下で，恒等的に 0 でない解を持つための λ（固有値）の表式を求めよ．

(2) λ が (1) で求めた固有値と異なる場合，非同次方程式 (*) の一般解を求めよ．

(横浜国立大 1995） (m19951101)

0.5 (1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における関数

$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

の最大値と最小値を求めよ．

(横浜国立大 1995)　　(m19951102)

0.6 (1) 次の極限値を求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(2) 次の関数の概形を描け．$y=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

(千葉大 1995)　　(m19951201)

0.7 次の不定積分を求めよ．

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx$ (但し，$A\neq 0$)

(千葉大 1995)　　(m19951202)

0.8 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+b^2x=0 \quad (\text{但し，} a<b\ )$$

(千葉大 1995)　　(m19951203)

0.9 次の行列 A の行列式の値を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2x & 2y & x+y+3z \\ 2x & x+3y+z & 2z \\ 3x+y+z & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

(千葉大 1995)　　(m19951204)

0.10 $n=0,1,2,\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1(\log x)^n\,dx$ とおく．ここで，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x(\log x)^n$ を求めよ．

(2) I_0 , I_1 を求めよ．

(3) I_n を n の式で表せ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952101)

0.11 $u(x,y)=3x^2y-y^3$ とするとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ ,\ v(1,1)=1$$

を満たす $v(x,y)$ を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952102)

0.12 連立微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$$

の初期条件 ： $x(0)=0$, $y(0)=1$ を満たす解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ について，以下の問に答えよ．

(1) $z(t)=x(t)+y(t)$ とおくとき，$z=z(t)$ が満たす微分方程式および初期条件を求めよ．

(2) $z(t)$ を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952103)

0.13 空間の点 (a,b,c) に関する点対称移動で，点 (x,y,z) が移される点の座標をかけ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952104)

0.14 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される空間の 1 次変換を f とする．点 $P(x,y,z)$ が球面 : $x^2+y^2+z^2=1$ 上を動くとき，点 $f(P)$ と定点 $Q(0,1,0)$ との距離の最大値および最小値を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952105)

0.15 複素数 z で $z^3-8=0$ を満たすものをすべて求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952106)

0.16 (1) $|x|<1$ として，次式を証明せよ．

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)$$

(2) $\log_e \dfrac{3}{2}$, $\log_e 2$, $\log_e 3$ を小数第 3 位まで求めよ．

(京都大 1995)　　(m19953301)

0.17 $x^2+y^2+z^2 \ =1$ として， $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

(京都大 1995)　　(m19953302)

0.18 $D=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2 \ \leqq a^2\right\}$ として，次式を求めよ．

$$\iiint_D z^n\,dx\,dy\,dz \qquad \text{（ n は自然数）}$$

(京都大 1995)　　(m19953303)

0.19 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な P を選べ．

(京都大 1995)　　(m19953304)

0.20 縦 $1(m)$, 横 $n(m)$ の床がある．この床に，縦 $1(m)$, 横 $k(m)$ のタイル T_k を何枚か使って敷き詰めたい． T_k は何枚でも使ってよいものとする．床が $n(m)$ のときのタイルの敷き詰め方を f_n 通り，また T_1 を使わずに敷き詰めるときの詰め方を g_n 通りとする時，次の問に答えよ．なお，n,k は整数とする．

例：

f_1 は $T_1\times\ 1$ の 1 通りだけなので，$f_1=1$

f_2 は $T_1\times\ 2$ および $T_2\times\ 1$ の 2 通りだけなので，$f_2=2$

(1) $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+\cdots+f_2+f_1$ であることを示せ．

(2) f_n を求めよ．

(3) $g_n - g_{n-1} - g_{n-2} = 0$, $g_2 = 1$, $g_1 = 0$ であることを示せ.

(4) g_n を求めよ.

(大阪大 1995)　　(m19953501)

0.21 次の不等式を証明せよ．(ただし, $x \geq 0$)　　$e^x > \dfrac{x^2}{2}$

(大阪大 1995)　　(m19953502)

0.22 次のことを証明せよ．$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$　　（ヒント：$\log x = -y$ とおき給え.）

(大阪大 1995)　　(m19953503)

0.23 次の広義積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \log x dx$

(大阪大 1995)　　(m19953504)

0.24 次の積分の積分値を求めよ.

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}} dxdy \qquad \text{（ただし，積分領域 } D : x^2+y^2 \leq 1 \text{ である.）}$$

(大阪大 1995)　　(m19953505)

0.25 $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ について以下の各問いに答えよ.

(1) ２次形式 F の表現行列 $\mathbf{A}$ を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有値 α, β およびそれに対応する単位固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求めよ.

(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交することを示せ.

(4) 一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ.

(5) $\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とした時， $\mathbf{P}$ は直交行列であることを示せ.

(6) $\mathbf{A}$ を対角化せよ.

(7) F の標準形を求めよ.

(大阪大 1995)　　(m19953506)