0.1 任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

$$\text{(a)} \qquad f_0(x) = x^2$$

$$\text{(b)} \qquad f_n(x)\, e^{-x} = \int_x^{\infty} f_{n-1}(t)\, e^{-t} dt$$

次の問に答えよ．

(1) 次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t} dt\,, \quad J = \int_x^{\infty} t\, e^{-t} dt\,, \quad K = \int_x^{\infty} t^2\, e^{-t} dt$$

(2) ２つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (\, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3) 前問の２つの数列の一般項 $a_n, b_n(\, n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960301)

0.2 関数 $r = f(\theta)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = a$$

に関し，次の問に答えよ．ただし，a は正の定数である．

(1) 上の常微分方程式の一般解を求めよ．

(2) 一般解の積分定数を次の条件によって決定せよ．

$$\theta = 0 \text{ において } \; f = 2a, \;\; \frac{df}{d\theta} = 0$$

(3) θ の範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ とする．(r, θ) を極座標とするとき，方程式 $r = f(\theta)$ で表される図形の概形を描け．

(4) 前問の図形によって囲まれる面積を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960302)

0.3 ３つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\phi \qquad (a)$$

で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (b)$$

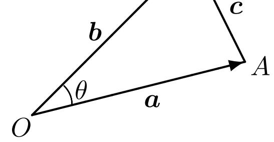
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \qquad (e)$$

さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

３つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を



$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\quad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\quad \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996)　　(m19960303)

0.4　t を実変数，x,y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt}=2x+5y\,,\quad \frac{dy}{dt}=x-2y \qquad (\mathbf{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる．

$$\frac{dr}{dt}=Ar \qquad (\mathbf{b})$$

ここで，行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\qquad r=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ．

(1)　実定数を成分とする 2 行 2 列の正則行列 P を導入すると，上記の $(\mathbf{b})$ が次のように書きかえられることを示しなさい．

$$\frac{dR}{dt}=BR \qquad (\mathbf{c})$$

ここで，B,R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる．

$$B=P^{-1}AP,\quad R=P^{-1}r$$

(2)　P を次のようにとると，B が対角行列になることが分かった．

$$P=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $det\,P$, P の逆行列 P^{-1}，および B を求めよ．

(3)　次式のように，列ベクトル R の成分を X,Y とする．

$$R=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 $(\mathbf{c})$ を解き，X,Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ．

(4)　$t=0$ において $x=x_0, y=y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 $(\mathbf{a})$ の解を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960304)

0.5　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ を

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x)$$

とおくとき，$|x|<1$ の範囲で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ となることを示せ．

(2)　(1) を利用して，関数 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ の x に関するべき級数展開を $|x|<1$ の範囲で求めよ．

(3) (2) の結果を利用して，$\sin x$ に関するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sin x)^{2n}$ の和を求めよ．ここに，$|x| < \frac{\pi}{2}$ とする．

(東北大 1996)　　(m19960501)

0.6 次の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式を $y(0) = a$ の条件の下に解け．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}xy = x + \frac{1}{4}x^3 \qquad (*)$$

(2) x の関数 $y(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}(\cos xt + x^2 t)dt$ について，式 $(*)$ が成り立つことを示せ．ただし，微分と積分の順序は交換できるものとする．

(東北大 1996)　　(m19960502)

0.7 3つの1次変換を f, g, h とし，これらを表す行列をそれぞれ A, B, C とおく，また，任意の点 $P(x, y)$ の2つの合成変換 $f \circ h$, $h \circ g$ を $f \circ h(P) = f(h(P)), h \circ g(P) = h(g(P))$ と定義し，$f \circ h = h \circ g$ が成立するとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a \neq 0$ の実定数とする．

(1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2) g を表す行列 B を求めよ．

(3) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 Q の変換 $f \circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996)　　(m19960503)

0.8 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで， $f(x, y) = x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2$ の最大値，最小値，およびそれらを与える x, y を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960801)

0.9 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 dx\, dy \qquad , \qquad D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \qquad (a, b > 0)$$

を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960802)

0.10 微分方程式

$$x\sqrt{1+y^2}\, dx + y\sqrt{1+x^2}\, dy = 0$$

の一般解を求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960803)

0.11 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 行列Ａの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする．
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する．φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(東京工業大 1996)　(m19960804)

0.12 関数 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ について以下の問に答えよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の極点，変曲点，凹凸を調べグラフを描け．

(東京農工大 1996)　(m19960901)

0.13 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}dx$ を求めよ．

(2) $\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおいて $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　(m19960902)

0.14 関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ について以下の問に答えよ．

(1) f_x , f_y を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(東京農工大 1996)　(m19960903)

0.15 $D = \left\{(x,y)\,|\,1 < x < 2\,,\ \frac{1}{2} < y < 2\right\}$ で $\displaystyle\iint_D (x^2 - 8xy)dxdy$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　(m19960904)

0.16 (1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ を解け．

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ を解け．

(東京農工大 1996)　(m19960905)

0.17 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京農工大 1996)　(m19960906)

0.18 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

(東京農工大 1996)　(m19960907)

0.19 (1) $1 + \sqrt{3}\,i$ を極表示せよ．

(2) 関数 $f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 2y) + iv(x,y)$ で $f(z)$ を正則とする実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(東京農工大 1996)　(m19960908)

0.20 方程式 $\dfrac{dx}{dt} = x + x^2$ の解で，$t = 0$ で $x = \xi$ となるものを $x = \varphi(t,\xi)$ とする．

(1) $x = \varphi(t,\xi)$ の表式を求めよ．

(2) t を固定したとき, $x=\varphi(t,\xi)$ が ξ について連続となるような ξ の範囲を求めよ.

(3) ξ を固定したとき, $x=\varphi(t,\xi)$ が t について連続となるような t の範囲を求めよ.

(4) 特に, $x=\varphi(t,\xi)$ が $-\infty<t<\infty$ において t の連続関数になるためには, ξ はどんな範囲にあればよいか.

(横浜国立大 1996) (m19961101)

0.21 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき,

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 t を求めよ.

(3) 3変数関数

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz$$

の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1996) (m19961102)

0.22 極座標による曲線 $r=r(\theta)$ を x,y 座標に変換したとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^3}$$

ただし, $r'=\dfrac{d}{d\theta}r(\theta) \quad , \quad r''=\dfrac{d^2}{d\theta^2}r(\theta)$

(千葉大 1996) (m19961201)

0.23 $D=\{(x,y)|\ x+y\leqq 1\ ,\ x,y\geqq 0\}$ とするとき, 次の2重積分 I を求めよ.

$$I=\iint_D(2x+3y^2)dxdy$$

(千葉大 1996) (m19961202)

0.24 微分方程式 $y''+4y'+4y=x^2$ の一般解を求めよ.

(千葉大 1996) (m19961203)

0.25 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき, 行列 $B=A^4-3A^3+2A^2+4A+E$ を求めよ. ここで E は単位行列とする.

(千葉大 1996) (m19961204)

0.26 $(a+bi)^2=i$ となる実数の組 (a,b) を求めよ. (ただし, $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位.)

(長岡技科大 1996) (m19962101)

0.27 曲面 $z=x^2+y^2$ の $z\leqq 4$ の部分でできる容器を z 軸正方向を上向きにして水をいっぱいに満たす. 以下の問いに答えよ.

(1) 満たされた水の体積を求めよ.

(2) 容器を静かに 45°傾けて水をこぼしたとき，残った水の体積を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962102)

0.28 次の 2 つの微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$y'' - y = 0 \qquad (*)$$

$$y'' - y = e^{2x}\cos x \qquad (**)$$

(1) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) $y = e^{2x}(a\cos x + b\sin x)$ が $(**)$ の解となるような定数 a, b を求めよ．

(3) 微分方程式 $(**)$ の一般解を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962103)

0.29 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．(n は自然数，E は単位行列とする．)

(1) $(A-E)(A+\frac{1}{2}E)$ を計算せよ．

(2) x^n を $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする．a_n, b_n を n の式で表せ．

(3) $A^n = a_n A + b_n E$ と表せることを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962104)

0.30 $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる x, y を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962105)

0.31 2 つのさいころを投げるとき，出る目の積が 10 の倍数となる確率を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962106)

0.32 連立方程式 $\begin{cases} 2x + y = kx \\ 2x + 3y = ky \end{cases}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつような定数 k の値を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962701)

0.33 $x + y = 2$ のとき，$\log_{10} x + \log_{10} y$ の最大値を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962702)

0.34 $x + 2y \leqq 4$，$2x + y \leqq 4$，$x + y \geqq 1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす，
すべての x，y に対して，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ．　(豊橋技科大 1996)
(m19962703)

0.35 集合 $\{a, b, c\}$ から集合 $\{p, q, r, s\}$ への写像は全部で何個あるか．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962704)

0.36 x を変数とする関数 $F(x)$ が

$$F(x) = \int_x^{\sqrt{3}x} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

と与えられるとき，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．

(1) $\dfrac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $F(x)$ の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ を求めよ.

(豊橋技科大 1996) (m19962705)

0.37 ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のなす角 θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ を満たすとき，点 (x, y) の存在する領域を x，y に関する不等式で表せ.

(豊橋技科大 1996) (m19962706)

0.38 x，y，z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $\triangle ABC$ の重心を G，$\overrightarrow{OG} = \boldsymbol{g}$ としたとき，$\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表せ.

(2) $\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ.

(豊橋技科大 1996) (m19962707)

0.39 $z = xf(z) + y$，$u = g(z)$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(z)\frac{\partial u}{\partial y}$$

であることを証明せよ.

(京都大 1996) (m19963301)

0.40 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0)$ の $x^2 + y^2 = ax$ の円柱内の体積を求めよ.

(京都大 1996) (m19963302)

0.41 行列 A, B, C が $A \cdot B$，$B \cdot C$ が各々の行と列が与えられるように定義されているとき，以下の問いに答えよ.

(1) $(A \cdot B) \cdot C$，$A \cdot (B \cdot C)$ が定義されていることを示せ.

(2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ を証明せよ．ただし，A^T は転置行列である.

(3) (2) を用いて $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ を証明せよ.

(京都大 1996) (m19963303)

0.42 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^T \cdot A \cdot T = D$

とするとき，直交行列 T と対角行列 D を一組求めよ．また，$A = B^2$ となる正方行列 B を一組求めよ.

(京都大 1996) (m19963304)

0.43 2 つの 3 次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ に対して，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は次のように定義される.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ 1，互いに垂直）を，また，$|\ \ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2) 外積について $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) 3つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ．($\cdot$ は，内積を表す．)

(大阪大 1996）　(m19963501)

0.44 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0) \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ．

(大阪大 1996）　(m19963502)

0.45 以下の問 (1)〜(6) に答えよ．

あるパーティで，n 人がひとつずつプレゼントを用意して，お互いに交換することになった．n 人には 1 番から n 番までの番号がついているものとし，すべてのプレゼントは区別できるものとする．本問では，集合 X の要素数を $|X|$ と表すことにする．

[集合 $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ の定義]

j 番（ただし，j は 1 以上 n 以下の任意の整数）の人に着目する．j 番の人にその人自身が用意したプレゼントがあたるような交換のしかたすべての集合を $S(j)$ と定義する．この記法は 1 パラメタに関するものであるが，これを任意の $k(1 \leqq k \leqq n)$ 個のパラメタに関する記法に拡張する．ある k 人 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ がそれぞれ自分のプレゼントに当たることが同時に起きるような交換のしかたすべての集合を $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ と表す．ただし，次の (a)〜(c) の条件を満たすものとする．

(a) k は 1 以上 n 以下の任意の整数である．

(b) $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n$

(c) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ に属する交換のしかたのなかには，$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 以外の人で自分のプレゼントに当たっている人がいる交換のしかたも含まれるものとする．

（定義終わり）

(1) プレゼントの交換のしかたは全部で何通りあるか．n を用いて表せ．

(2) 集合 $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ を $S(j_1), S(j_2), \cdots, S(j_k)$ を用いて表せ．

(3) $|\,S(j_1, j_2, \cdots, j_k)\,|$ の値を n および k を用いて表せ.

(4) $|\,S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)\,|$ の値を n を用いて表せ.

(5) だれも自分のプレゼントには当たらないような交換のしかたは何通りあるか. n を用いて表せ. また，そのように表すことができる理由を簡単に説明せよ.

(6) n 個のプレゼントをでたらめに n 人に配ったとする．このとき自分のプレゼントが自分に配られるような人の数の期待値を求めよ．また，その導出過程も簡単に示せ.

(大阪大 1996) (m19963503)

0.46 $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ とするとき，I_{n+1} と I_n の関係を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963801)

0.47 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963802)

0.48 関数 $f(x) = 2^x$ について，次の問に答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ と n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ をマクローリン (Maclaurin) の定理によって

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R_{n+1}$$

の形で表すとき， a_1 ， a_n ， 剰余項 R_{n+1} を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963803)

0.49 $f(x) = a^x$ とする．$(0 < a)$

(1) $f(x)$ を $x = 0$ でマクローリン展開せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ $(1 < a)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x x^n = 0$ $(0 < a < 1)$ を証明せよ.

(神戸大 1996) (m19963804)

0.50 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

について，次の問に答えよ.

(1) 行列 A は正則であるか.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があれば，その解を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963805)

0.51 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(神戸大 1996) (m19963806)

0.52 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) P は正則であることを示し，P^{-1} を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを計算せよ.

(神戸大 1996)　(m19963807)

0.53 $f(x,y,z) = \dfrac{e^{kr}}{r}$,　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
の時，次の問に答えよ（ここで k は定数である）.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ を求めよ.

(2) ラプラシアン $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ.

(九州大 1996)　(m19964701)

0.54 $V : x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $(a>1)$ において，次の積分を求めよ.

(1) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(2) $$\int_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$$

(九州大 1996)　(m19964702)

0.55 文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次式の全体を H_n とする，即ち
$H_n = \{f : x$ と y に関する多項式 $\mid$ 任意の定数 a に対して $f(ax,ay) = a^n f(x,y)\}$

(1) H_n は線形空間（ベクトル空間）になることを示せ.

(2) H_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次対称式の全体を S_n とする，即ち

$$S_n = \{f \in H_n \mid f(x,y) = f(y,x)\}$$

(1) S_n は線形空間になることを示せ.

(2) S_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

（一般の n でやる前に $n = 1, \cdots, 6$ の場合にやってみよ.）

(九州大 1996)　(m19964703)